レイノルズ応力方程式中の消散項のモデル化*

吉田 啓之^{*1}, 清水 昭比古^{*2}

Model Development for Dissipation Terms in Reynolds Stress Equations

Hiroyuki YOSHIDA and Akihiko SHIMIZU

This paper presents an anisotropic dissipation term modeling for the Reynolds stress transport equation, and presents a comparison with Direct Numerical Simulation (DNS) data for three different flow systems. In the present model, the anisotropic tensor of the dissipation term is evaluated using three algebraic expressions, e_{ij}^s , e_{ij}^R and e_{ij}^W . e_{ij}^s represents the effects of only fluctuating velocity, and constitutes the anisotropic tensor of Reynolds stress. The term e_{ij}^R includes the effects of the mean velocity gradient tensor in addition to that of fluctuating velocity. e_{ij}^W is analogous to the wall term in the redistribution term for Reynolds stress equations, and reproduces near-wall behavior of the dissipation term. The present model predicts the anisotropic tensor of the dissipation term with good accuracy with respect to diagonal components. However, for non-diagonal components, the predictions are not accurate enough for all systems. Some improvements are necessary for expression of model functions.

Key Words: Fluid Dynamics, Turbulence Flow, Numerical Analysis, Reynolds Stress Model, Turbulent Anisotropy, Dissipation Term

1. 緒 言

壁面の有無に関わらず平均速度勾配の大きな流れにおいては乱れの非等方性が全体に影響を与える。またこの強い非等方性の存在は乱流をモデル化をする際の大きな問題ともなる。 k - ϵ モデル等では何らかの、いわゆる“dumping function”を用いることでこの影響を間接的に表現している⁽¹⁾が、これは一般に壁面からの距離の関数であり汎用性に問題がある。一方、非等方性そのものを直接に求めるレイノルズ応力モデルは、広い適用性と高い予測精度を併せ持つ可能性があり、種々の研究者によりモデル開発が行われているが十分とは言い難い。この最大の理由は乱れの非等方性を十分に精度よく再現することの困難さに帰結する。乱れの非等方性を直接に評価することはレイノルズ応力モデルの最大の長所であるが、その反面最大の問題点ともなる。非等方性を精度よく予測するためには非等方性を生成あるいは散逸する機構を的確にモデル化することが必要であり、モデル開発の主眼もこの点に置かれる。

レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ の厳密な輸送方程式はNavier-Stokes方程式より導かれる。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} + T_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

ここで P_{ij} , D_{ij} , T_{ij} および ϵ_{ij} はレイノルズ応力の生成、粘性による拡散、乱れそのものによる拡散、消散を表し、 $\Pi_{ij}[-(\overline{u_i p_j} + \overline{u_j p_i})/\rho]$ は速度圧力勾配相関項である。式(1)中で生成項と粘性拡散項はレイノルズ応力と平均速度を用いて表現されモデル化の必要はない。その他の項のうち、乱流拡散項は壁面のごく近傍を除いて他の項と比較して十分小さい。速度圧力勾配相関項は圧力歪相関項 ϕ_{ij} と圧力拡散項に分解される⁽²⁾。

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})}/\rho - (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik})_{,k}/\rho \\ &= \phi_{ij} - (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik})_{,k}/\rho \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

圧力歪相関項はレイノルズ応力の各成分間のエネルギーの分配を表現し、乱れの等方化を促進する作用をもつ。圧力拡散項は実験による評価が非常に困難であることもあって無視されることが多かった。近年のDNS(Direct Numerical Simulation)より壁面近傍を除けば十分に小さいことが確認されている⁽³⁾⁽⁴⁾。したがって、乱れの非等方性を精度よく再現するには特に圧力歪相関項と消散項のモデル化が重要であることが

* 原稿受付 平成5年4月12日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院 (〒816 春日市春日公園6-1)。^{*2} 正員, 九州大学総合理工学研究科。

わかる。圧力歪相関項のモデル化は長年の研究の結果かなり改善され、比較的よい結果を与えるようになった。

しかしながら、消散項のモデル化はそれと比較して低次の段階にとどまり、十分な検討およびモデル化がなされているとは言い難い。これまで消散項のモデル化が不十分であったのは、主に実験により消散項の非等方部分の単独での評価が困難であったことに起因している。現在、比較的低いレイノルズ数に限られるものの、DNSにより消散項の値を厳密に得ることが可能となっており、より高次のモデル化を行う環境が整っている。そこで本研究では広い適用性をもつ消散項のモデル化を行い、DNSのデータとの比較を通してその有効性ならびに問題点を示す。

2. 記 号

A_2, A_3 : a_{ij} の第2および第3普遍量

a_{ij} : レイノルズ応力の非等方テンソル

e_{ij} : 消散項の非等方テンソル

e_{ij}^R : e_{ij} のうち変動速度のみで表現される部分

e_{ij}^S : e_{ij} のうち平均速度勾配を含む部分

e_{ij}^W : e_{ij} に対する壁面の影響を表現する部分

f_1, f_2, f_3 : モデル関数

f_A, f_S, f_R : モデル関数

k : 乱流エネルギー $= \overline{u_i u_i} / 2$

m_i : 主流方向単位ベクトルの i 方向成分

n_i : 壁面垂直方向単位ベクトルの i 方向成分

p : 変動圧力

Re : レイノルズ数

Re_t : 乱流レイノルズ数 $= k^2 / \nu \epsilon$

t : 時間

U_i, u_i : i 方向の平均および変動速度

$\overline{u_i u_j}$: レイノルズ応力の (i, j) 成分

u_τ : 摩擦速度

x_k : k 方向座標

Π_{ij} : 速度圧力勾配相関項

ϕ_{ij} : 圧力歪相関項

δ : チャネル半幅

δ_{ij} : クロネッカのデルタ

ϵ : 乱流エネルギー消散率 $= \epsilon_{ii} / 2$

ϵ_{ij} : レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ の消散項 $= 2\nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}}$

ϵ_{ijk} : エディントンのイプシロン

ν : 動粘性係数

ρ : 密度

$_{,k}$: x_k に関する偏微分 $= \partial / \partial x_k$

$\overline{\quad}$: アンサンブル平均

3. モデル化の方針

従来の消散項のモデル化は以下の三つに大別される。

(1) 消散の等方性を仮定 $e_{ij} = 2\delta_{ij}\epsilon/3$

(2) レイノルズ応力の一次関数で表現⁽⁵⁾。

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \left[(1-E) \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} E \right],$$

$$E = (1 + Re_t/10)^{-1} \dots\dots\dots (3)$$

(3) 圧力歪相関項に消散項の非等方部分を含める⁽⁶⁾

$$\phi_{ij} - \epsilon_{ij} = \phi_{ij}^* - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon, \quad \phi_{ij}^* = \phi_{ij} + \left(\epsilon_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \right) \dots\dots\dots (4)$$

ϕ_{ij}^* は消散項の非等方部分を含む圧力歪相関項である。

式(3)は乱流レイノルズ数が無限大になると(1)と同じ等方的消散を与える。最近のDNSや実験から平均速度勾配の存在する流れにおいては流れのスケールの大小の比、すなわち乱流レイノルズ数の大きさに関わらず小さなスケールの非等方性が存在することがわかっている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。したがって平均速度勾配に関係なく消散の等方性を導く(1)、(2)のモデル化は不適当である。(3)はモデルの形式としては(1)と同一であるが、消散項の非等方性を考慮している点で大きく異なる。しかしながら圧力歪相関項が非等方性を生成あるいは減衰する機構と、消散項の非等方部分を生ずる機構が同一であるとは思われず、このままでは複雑乱流場への適用性に疑問が残る。消散項の個別のモデル化はHallbäckらによって行われ⁽⁹⁾、一様せん断流に関してはよい結果を得ている。しかしながら彼らのモデルは一様せん断流に対してのみモデル化がなされ、壁面の存在する場には適用できない。本研究では主に実際の工業装置等の解析を目的とし、壁面においても十分な予測精度をもつモデルを開発する。

消散項 ϵ_{ij} に対する厳密な輸送方程式もレイノルズ応力に対してと同様の方法で導かれ、変動圧力に対するポアソン方程式を代入すると以下が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon_{ij}}{Dt} = & -2\nu(\overline{u_{j,k} u_{i,l}} + \overline{u_{i,k} u_{j,l}}) U_{l,k} \\ & - \epsilon_{jk} U_{i,k} - \epsilon_{ik} U_{j,k} \\ & - 2\nu(\overline{u_i u_{j,k}} U_{i,kl} + \overline{u_{i,k} u_j} U_{j,kl}) \\ & + 4\nu(\overline{u_{j,i} u_{l,m}} U_{m,l} + \overline{u_{i,j} u_{l,m}} U_{m,l}) \\ & - 2\nu(\overline{u_{j,k} u_{l,k} u_{i,l}} + \overline{u_{i,k} u_{l,k} u_{j,l}} - \overline{u_{j,i} u_{l,m} u_{m,l}}) \\ & + 2\nu\overline{u_{i,j} u_{l,m} u_{m,l}} - 4\nu^2 \overline{u_{i,k} u_{j,k} u_{l,l}} - 2\nu(\overline{u_i u_{i,k} u_{j,k}})_{,l} \\ & - 2\nu[(\overline{u_{j,k} p k})_{,i} + (\overline{u_{i,k} p k})_{,j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\overline{u_{j,i} p_k} + \overline{u_{i,j} p_k})_{,k} / \rho \\
& + 2\nu^2 (\overline{u_{j,k} u_{i,k l}} + \overline{u_{i,k} u_{j,k l}})_{,l} \\
& - 2\nu \overline{u_{j,k} u_{i,l} u_{k,l}} - 2\nu \overline{u_{i,k} u_{j,l} u_{k,l}} \\
& + 2\nu (\overline{u_{j,i} u_{l,m} u_{m,l}} + \overline{u_{i,j} u_{l,m} u_{m,l}}) + (\overline{u_i \varepsilon'_{ij}})_{,l} \\
& \dots\dots\dots (5)
\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon'_{ij} = 2\nu u_{i,k} u_{j,k}$ である。式(5)の右辺は三つの部分に分類できる。すなわち

(i) 変動速度のみで構成される部分

$$\begin{aligned}
& -4\nu^2 \overline{u_{i,k} u_{j,k l}} - 2\nu (\overline{u_{l,i} u_{i,k} u_{j,k}})_{,l} \\
& + 2\nu^2 (\overline{u_{j,k} u_{i,k l}} + \overline{u_{i,k} u_{j,k l}})_{,l} + (\overline{u_i \varepsilon'_{ij}})_{,l} \dots (6)
\end{aligned}$$

(ii) 変動および平均速度で構成される部分

$$\begin{aligned}
& -2\nu \overline{u_{l,i} u_{j,k}} U_{i,k l} - 2\nu \overline{u_{l,i} u_{i,k}} U_{j,k l} \\
& + 4\nu (\overline{u_{j,i} u_{l,m}} U_{m,l} + \overline{u_{i,j} u_{l,m}} U_{m,l}) \\
& \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

(iii) 変動速度および変動圧力で構成される部分

$$-2\nu [(\overline{u_{j,i} p_k})_{,i} + (\overline{u_{i,k} p_k})_{,j} + (\overline{u_{j,i} p_k} + \overline{u_{i,j} p_k})_{,k}] / \rho \dots\dots\dots (8)$$

ここで(iii)はレイノルズ応力方程式中の圧力拡散項に対応し、壁面近傍でのみ有意な値をもち、壁面の影響を表す項とみなされる。

これらの各項個別のモデル化は非現実的であるので、ここでは消散項の等方部分 ε については従来同様輸送方程式で与え、非等方部分

$$e_{ij} = \left(\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \dots\dots\dots (9)$$

を代数式によって与えるモデルを考える。式(4)に式(9)を代入すると以下ようになる。

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \right) = \phi_{ij} + e_{ij} \varepsilon$$

したがって消散項の非等方性を代数式により与えることは、従来のモデルから非等方部分を取り出すことに対応する。 ϕ_{ij}^* は一般に

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^s + \phi_{ij}^r + \phi_{ij}^w \dots\dots\dots (10)$$

と三つの部分に分解してモデル化される。ここで ϕ_{ij}^s は変動速度のみで表現される部分(slow 項)、 ϕ_{ij}^r は平均速度勾配を含む項(rapid 項)であり、 ϕ_{ij}^w は壁面による等方化作用の減少を表現する。式(9)が同様の三つの部分で構成されることも考慮して e_{ij} に対しても式(10)と同じモデル化が考えられる。

$$e_{ij} = e_{ij}^s + e_{ij}^r + e_{ij}^w \dots\dots\dots (11)$$

4章で各項についてのモデル化を行う。

4. 消散項のモデル化

4.1 モデル化の準備 消散項のモデル化を行う前に e_{ij} が満足すべき条件について説明する。まずモデル開発においてしばしば用いられる RDT(Rapid

Distortion Theory)より乱れの非等方性が十分小さい場合

$$e_{ij} = a_{ij} / 2 \dots\dots\dots (12)$$

となることが示される⁽⁹⁾。ここで a_{ij} はレイノルズ応力の非等方テンソル

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \dots\dots\dots (13)$$

である。

壁面の低レイノルズ数領域に適用できるモデル化を行う場合に重要となるのは壁面への漸近挙動である。連続の式を用いて壁面近傍の各方向変動速度は次のように表せる⁽⁹⁾。

$$\begin{cases} u_1 = b_1 x_2 + c_1 x_2^2 + \dots \\ u_2 = c_2 x_2^2 + d_2 x_2^3 + \dots \\ u_3 = b_3 x_2 + c_3 x_2^2 + \dots \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

ここで添字 1 は主流方向、2 は壁面に垂直な方向、3 は 1, 2 に垂直な方向を表す。 ε_{ij} , $\overline{u_i u_j}$ の定義に上式を代入すれば

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\nu} = \begin{cases} 2\overline{b_1^2} + 8\overline{b_1 c_1} x_2 + O(x_2^2) & : i=j=1 \\ 8\overline{c_2^2} x_2^2 + O(x_2^3) & : i=j=2 \\ 2\overline{b_3^2} + 8\overline{b_3 c_3} x_2 + O(x_2^2) & : i=j=3 \\ 4\overline{b_1 c_2} x_2 + O(x_2^2) & : i=1, j=2 \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

$$\overline{u_i u_j} = \begin{cases} \overline{b_1^2} x_2^2 + 2\overline{b_1 c_1} x_2^3 + O(x_2^4) & : i=j=1 \\ \overline{c_2^2} x_2^4 + O(x_2^5) & : i=j=2 \\ \overline{b_3^2} x_2^2 + 2\overline{b_3 c_3} x_2^3 + O(x_2^4) & : i=j=3 \\ \overline{b_1 c_2} x_2^3 + O(x_2^4) & : i=1, j=2 \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

となる。したがって式(9), (13)に式(15), (16)を代入することにより壁面において

$$e_{ij} = a_{ij} \dots\dots\dots (17)$$

であることが示される。すなわち壁面上で消散項とレイノルズ応力の非等方性は一致する。

前述のように平均速度勾配の有無に関わらず等方消散を与えるモデル化は不適当であるが、平均速度勾配がなく乱れの大小のスケール比が大きな場合には消散が等方的になることは妥当なように思われる。そこでモデルの適用性を向上させるためにはこの消散の等方性($e_{ij}=0$)を考慮しなければならない。

以上をまとめると次のようになる。

(1) RDTより乱れの非等方性が小さい場合に $e_{ij} = a_{ij}/2$ 。

(2) 壁面漸近挙動より壁面上で $e_{ij} = a_{ij}$ 。

(3) 平均速度勾配がなく乱れの大小のスケール比が大きい場合に $e_{ij}=0$ 。

本研究では以上の三つの条件を e_{ij}^s のみにより満足さ

せ, その他の項はそれに反しないようにする。すなわち

(1) RDT より乱れの非等方性が小さい場合に $e_{ij}^S = a_{ij}/2$, $e_{ij}^R = 0$, $e_{ij}^W = 0$,

(2) 壁面漸近挙動より壁面上で $e_{ij}^S = a_{ij}$, $e_{ij}^R = 0$, $e_{ij}^W = 0$,

(3) 平均速度勾配がなく乱れの大小のスケール比が大きい場合に $e_{ij}^S = 0$, $e_{ij}^R = 0$, $e_{ij}^W = 0$, と仮定して以下で各項のモデル化を行う。

4.2 レイノルズ応力テンソルの影響 Hallbäck

ら⁹⁾ は e_{ij} を次の代数式で表現するモデルを提案した。

$$e_{ij} = \left[1 + \alpha \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2}{3} \right) \right] a_{ij} - \alpha \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{A_2}{3} \delta_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで $A_2 (= a_{ij} a_{ij})$ は a_{ij} の第2普遍量であり, α はモデル定数である。ここで上式を e_{ij}^S に適用することを考える。Hallbäck らは壁面の存在しない流れ(一様せん断流)を対象としてモデルの展開を行い, 前述のRDTによる条件を考慮して $\alpha = 3/4$ とした。しかしながらこの場合残りの2条件が満足されない。そこでこの定数 α を関数 f_1 にすることを考える。

$$e_{ij}^S = \left[1 + f_1 \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2}{3} \right) \right] a_{ij} - f_1 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{A_2}{3} \delta_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

上記の e_{ij}^S に対する条件は f_1 の関数形により満足させる。RDT は乱流レイノルズ数 Re_t が大きくしかも平均歪が大きい場合を想定する理論である。したがって Re_t が大きくしかも平均歪が大きい場合には Hallbäck らに従い

$$f_1 = 3/4 \quad \dots\dots\dots (20)$$

とならなければならない。また壁面の近傍の低乱流レイノルズ数領域では $e_{ij} = a_{ij}$ であることから

$$f_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる必要がある。

最後の等方消散の条件を任意の a_{ij} に対して満足させる f_1 は存在しない。そこで等方消散が成り立つ場合にはレイノルズ応力の非等方性も小さいと仮定し, 式(19)中の a_{ij} の二次の項を無視する。

$$(1 - 2f_1/3) a_{ij} = 0$$

a_{ij} に関係なく上式が成り立つ条件は $1 - 2f_1/3 = 0$ である。したがって平均歪が小さく Re_t が大きい場合には f_1 が以下の値を取るようにモデル化する。

$$f_1 = 3/2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

Durbin らの考察¹⁰⁾ に従い平均歪の大きさを表す指標として $S (= \sqrt{S_{ij} S_{ij}} k/\epsilon)$ を用いる。ここで S_{ij} は以下

で表される平均歪テンソルである。

$$S_{ij} = \frac{U_{i,j} + U_{j,i}}{2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(20)~(22)をまとめると以下のようになる。

(1) $Re_t \rightarrow \infty$ で S が十分大きく, さらにレイノルズ応力の非等方性が小さいとき $f_1 = 3/4$,

(2) $Re_t \rightarrow 0$ のとき $f_1 = 0$,

(3) $Re_t \rightarrow \infty$, $S \rightarrow 0$ であり, さらにレイノルズ応力の非等方性が小さいとき $f_1 = 3/2$,

これらの条件より f_1 を以下のように決定した。

$$f_1 = \frac{3}{4} f_R (1 + f_S) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} f_R &= 1 - \exp(-C_R Re_t) \\ f_S &= \exp[-(C_S S)^2] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

なお C_R , C_S はモデル定数である。

4.3 平均速度勾配テンソルの影響 式(7)は次

のように変形できる。

$$\begin{aligned} (\text{Eq. 7}) &= -2\nu (\overline{u_{j,k} u_{i,l}} + \overline{u_{i,k} u_{j,l}}) (S_{lk} + W_{lk}) \\ &\quad - \epsilon e_{jk} (S_{ik} + W_{ik}) - \epsilon e_{ik} (S_{jk} + W_{jk}) \\ &\quad + 4\epsilon S_{ij} / 3 - 2\nu \overline{u_l u_{j,k}} U_{i,kl} - 2\nu \overline{u_l u_{i,k}} U_{j,kl} \\ &\quad + 4\nu [\overline{u_{j,i} u_{k,l}} (S_{lk} + W_{lk}) + \overline{u_{i,j} u_{k,l}} (S_{lk} + W_{lk})] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで W_{ij} は平均速度勾配テンソルの反対称部分

$$W_{ij} = \frac{U_{i,j} - U_{j,i}}{2}$$

である。式(26)をもとに e_{ij}^R を次のようにモデル化する。

$$\begin{aligned} e_{ij}^R &= \frac{k}{\epsilon} \{ D_{ijkl} S_{kl} + D'_{ijkl} W_{kl} + E_{ik} S_{kj} + E_{jk} S_{ki} \\ &\quad + E'_{ik} W_{kj} + E'_{jk} W_{ki} + F_{jkl} U_{i,kl} \\ &\quad + F'_{ikl} U_{j,kl} + G S_{ij} \} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここで D_{ijkl} , D'_{ijkl} , E_{ik} , E'_{ik} , F_{jkl} , F'_{jkl} および G はそれぞれ4階, 4階, 2階, 2階, 3階, 3階, 0階のテンソルであり, S_{ij} , W_{ij} を含まない。

まず簡単のため平均速度の2階微分の影響を無視する。添字 i, j に関する対称性とトレースが0($e_{ii}^R = 0$)であることより D_{ijkl} , D'_{ijkl} , E_{ik} , E'_{ik} に関し

$$\left. \begin{aligned} D_{ijkl} &= D_{jikl}, D_{iikl} = 0 \\ D'_{ijkl} &= D'_{jikl}, D'_{iikl} = 0 \\ E_{ik} S_{ki} &= 0, E'_{ik} W_{ki} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

が成り立つ。 D_{ijkl} が a_{ij} および δ_{ij} の線形結合によって表されると仮定すると, 式(28)を用いることにより, $D_{ijkl} S_{kl} = \eta a_{ij} a_{kl} S_{kl}$ と表せる。 D'_{ijkl} , E_{ik} , E'_{ik} についても同様の考察を行えば

$$D'_{ijkl} W_{kl} = \eta' a_{ij} a_{kl} W_{kl} = 0$$

$$E_{ik}S_{kj} + E_{jk}S_{ki} = \xi \left(a_{ik}S_{kj} + a_{jk}S_{ki} - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{lm} S_{lm} \right)$$

$$E'_{ik}W_{kj} + E'_{jk}W_{ki} = \xi' (a_{ik}W_{kj} + a_{jk}W_{ki})$$

となる。さらに Realizability⁽¹¹⁾ を考慮すると e_{ij}^R は以下のようにモデル化される。

$$e_{ij}^R = f_2 \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{4}{3} S_{ij} + a_{ik}S_{kj} + a_{jk}S_{ki} - \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) a_{lm} S_{lm} \right] + f_3 \frac{k}{\varepsilon} (a_{ik}W_{kj} + a_{jk}W_{ki}) \dots\dots\dots (29)$$

ここで f_2, f_3 はモデル関数であり、4・1 節の e_{ij}^R に関する条件に反しないように、

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= C_1 f_R f_S A_2 \\ f_3 &= C_2 f_R f_S A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

とした。 C_1, C_2 はモデル定数、 f_R, f_S は f_1 中と同一の関数である。

4・4 壁面の影響 式(19), (29) は壁面近傍では以下のように近似される。

$$e_{ij}^S = a_{ij}, \quad e_{ij}^R = 0 \dots\dots\dots (31)$$

上式から壁面近傍の消散項は次式で与えられる

$$\varepsilon_{ij}^+ = \left(e_{ij}^S + e_{ij}^R + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \varepsilon = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon$$

ここで $^+$ は式(31)により与えられることを表す。 ε_{ij}^+ の壁面での挙動は式(14)を用いて

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon_{11}^+}{\nu} &= 2\overline{b_1^2} + 4\overline{b_1 c_1} x_2 + \frac{4\overline{b_1^2}(\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3})x_2}{\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}} + O(x_2^2) \\ \frac{\varepsilon_{22}^+}{\nu} &= 2\overline{c_2^2} x_2^2 + O(x_2^3) \\ \frac{\varepsilon_{33}^+}{\nu} &= 2\overline{b_3^2} + 4\overline{b_3 c_3} x_2 + \frac{4\overline{b_3^2}(\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3})x_2}{\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}} + O(x_2^2) \\ \frac{\varepsilon_{12}^+}{\nu} &= 2\overline{b_1 c_2} x_2 + O(x_2^2) \end{aligned} \right.$$

.....(32)

で示される。式(32)と厳密な ε_{ij} の漸近挙動[式(15)]には

表 1 モデル定数

C_R	C_S	C_1	C_2	$C_{\varepsilon w}$
0.005	0.05	-0.2	0.2	1

図 1 チャンネル乱流の e_{ij} の分布

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^+}{\nu} = 4 \overline{b_1 c_1} x_2 - \frac{4 \overline{b_1^2} (\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3})}{\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}} + O(x_2^2) \\ \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^+}{\nu} = 6 \overline{c_2^2} x_2^2 + O(x_2^3) \\ \frac{\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^+}{\nu} = 4 \overline{b_3 c_3} x_2 - \frac{4 \overline{b_3^2} (\overline{b_1 c_1} + \overline{b_3 c_3})}{\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}} + O(x_2^2) \\ \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^+}{\nu} = 2 \overline{b_1 c_2} x_2 + O(x_2^2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (33)$$

の差が存在する。そこで壁面の影響を表す e_{ij}^W を、正確な漸近挙動を表現するための項 $e_{ij,1}^W$ と、本来の壁面の影響を表す部分 $e_{ij,2}^W$ に分解して個別にモデル化を行う。

$$e_{ij}^W = e_{ij,1}^W + e_{ij,2}^W \quad \dots\dots\dots (34)$$

$e_{ij,1}^W$ として以下に注目する。

$$\frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k \bar{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^+}{\partial x_l} \right), \quad \bar{\varepsilon} = 2 \nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_m} \right)^2 \quad \dots\dots (35)$$

上式の漸近挙動は式(33)と少なくとも x_2 の最小次数に関し一致する。 ε_{ij} の対角成分の和としての ε が変化しないように

$$e_{ij,1}^W = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k \bar{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^+}{\partial x_l} \right) - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k \bar{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (36)$$

とする。なお上式は Realizability を満足する。

式(36)を e_{ij}^W として計算を行ったところ壁面近傍の予測は改善されたが、壁面よりやや離れた領域では逆に悪化した。この予測の悪化が $e_{ij,2}^W$ を考慮していないことに起因すると考え、これを補正するようにモデル化する。

●	DNS data	—	Present
○	DNS data(a_{ij})	----	$e_{ij}^S + e_{ij}^R + e_{ij,1}^W$
		----	$e_{ij}^S + e_{ij}^R$

図2 壁面近傍の e_{ij} の分布

●	DNS data
○	DNS data(a_{ij})
----	Hallbäck et al.
—	Present
----	$e_{ij}^S + e_{ij}^W$

図3 クエット・ポワゼユ乱流の e_{ij} の分布

図4 移動壁および固定壁近傍の e_{11} の分布

$$e_{ij,2}^W = C_{ew} f_A (m_i m_j - \epsilon_{ipq} m_p n_q \epsilon_{jrs} m_r n_s) \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで

$$f_A = 1 - \exp(-15A), \quad A = 1 - 9(A_2 - A_3)/8$$

である。 $A_3 (= a_{ik} a_{kj} a_{ji})$ は a_{ij} の第3 普偏量であり、関数 f_A は Realizability を満たすために用いられる。また m_i, n_i はそれぞれ主流方向および壁面に垂直な方向の単位ベクトル、 C_{ew} はモデル定数である。

5. モデル定数の決定

DNS によれば $a_{ij}, S_{ij}, W_{ij}, k$ および ϵ の正確な値が得られる。そこで本研究で開発したモデル方程式中にこれらの値を代入すればモデルによる e_{ij} の値が得られる。十分発達したチャンネル乱流に対し、その値と DNS による厳密な値を比較することにより各式中

図5 一様せん断流の e_{11} および e_{12} の分布

のモデル定数を表1のように決定した。

モデル定数の決定に際して用いた DNS データは Kuroda らによる十分発達したチャンネル乱流に対してのものである⁽⁴⁾。摩擦速度とチャンネル半幅で定義したレイノルズ数は150である。図1に e_{ij} の各成分の分布を示す。 a_{ij} 、Hallbäck らのモデル式(18)による予測、平均速度勾配の影響を除いた $e_{ij}^S + e_{ij}^W$ の値も比較のため図示する。DNS データについては a_{ij} は壁付近で比較的 e_{ij} と一致し、Mansour らの指摘⁽³⁾ どおり $e_{ij} = a_{ij}$ とするモデルが比較的よい結果を与える。しかし中心部では e_{ij} との差が増大し、乱流レイノルズ数等の影響を考慮する必要性が確認される。

式(18)は全般的に非等方性を過小評価し、低レイノルズ数領域の影響を考慮していないため壁での値が零でない(1,1)および(3,3)成分の壁面近傍の予測が特に不十分である。それに対し本研究のモデルは全領域にわたってほぼ DNS と一致する結果を与える。非対角成分 [(1,2)成分] については Hallbäck らのモデルと同様に本モデルも DNS の壁面近傍の急激な変化を再現しない。 e_{ij}^S を含めない場合には DNS との差が拡大

する傾向にあるので、 e_{ij} のモデル化に対して平均速度勾配の影響を組み入れることの必要性はあるものと思われる。

図2に壁面近傍での e_{11} の分布を示す。比較のため壁面の影響の補正を除いた値 $e_{11}^S + e_{11}^R$ と a_{11} の値も図示する。壁面の影響を考慮しない場合には a_{11} とほぼ一致するが、考慮した場合はその傾向を改善し DNS と同じ $e_{11} > a_{11}$ となる予測を与える。しかしながら壁面よりやや離れた領域においては非等方性を過大に見積もる。

6. DNS との比較

チャンネル乱流の場合と同様の方法を異なる二つの流れに適用してモデルの検証を行った。

6・1 クエット・ポワゼユ乱流 Kuroda らによるクエット・ポワゼユ乱流の DNS⁽⁴⁾ に適用した。固定壁側の摩擦速度と δ を用いたレイノルズ数は 154、上下壁の速度勾配の比は -0.0193 である。

図3に e_{ij} の分布を示す。図1と同様に Hallbäck らのモデル、 a_{ij} および $e_{ij}^S + e_{ij}^R$ も図示している。Hallbäck らのモデルが中心部においては e_{11} を過大評価するのに対し、本モデルでは中心部においても DNS と一致する結果を与える。これは Re_t に加え S の関数を導入することで、等方的な消散を再現可能としたことによる。 e_{12} についてはチャンネル乱流と同じく DNS との差異は対角成分に比べ大きく、 e_{ij}^R による改善もほとんど見られない。

図4(a), (b)に移動壁および固定壁近傍の e_{11} の分布を示す。固定壁側では最大値を若干過小に見積もることを除いて図2と大きな差異はない。 e_{ij}^R を付加することにより壁面近傍の分布は移動壁側でも改善されるが補正が過剰である。壁面近傍で A_3 が負となることを考慮し、 A_3 の関数をモデル中に導入することで改善される可能性はある。

6・2 一様せん断乱流 Rogers ら⁽¹²⁾ による一様せん断乱流 ($S_{12}=28.284$) の DNS と比較した。図5に e_{11} および e_{12} の時間変化を示す。 e_{11} に対しては本研究のモデルは、一様せん断乱流に対してモデル化された式(18)と同程度の予測精度を維持している。 e_{12} につ

いては本モデル、Hallbäck らのモデルとも a_{12} の影響を強く受け予測は不十分である。式(18)と逆に本モデルと DNS との差は t が小さいほど大きい。平均速度勾配の影響を考慮することにより若干 DNS の値に近づくが十分とはいえない。チャンネル乱流の結果等と併せて e_{ij}^R による非対角成分の予測の改善が今後の主要な問題であろう。

7. 結 言

(1) 消散項をレイノルズ応力の非等方テンソルや平均速度勾配テンソル等の代数式として与えるモデルを開発し、対角成分に対しては今回比較した3種の流れに対し十分な予測が行われることを確認した。

(2) 非対角成分については本モデルは従来のモデルと同様に十分な結果を与えず、非対角成分についての改善が今後の課題となるであろう。

(3) クエット・ポワゼユ乱流の移動壁近傍での予測は十分とはいえない。これはレイノルズ応力の非等方テンソルの第3普遍量 A_3 の関数を組み入れることにより改善される可能性がある。

文 献

- (1) 例えば, Nagano, Y. and Hishida, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **109**(1987), 156.
- (2) Rotta, J., *Z. Physik*, **129**(1951), 547.
- (3) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., *J. Fluid Mech.*, **194**-15(1988), 15.
- (4) Kuroda, A., Kasagi, N. and Hirata, M., *Proc. 27th Natl. Heat Transf. Symp. Jpn.*, (1990)46.
- (5) Hanjalic, K. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.* **74**-4 (1976), 593.
- (6) Lumley, J. L., *Advance in Applied Mech.*, **18**(1978), 123, Academic Press.
- (7) Hallbäck, M., Groth, J. and Johanson, A. V., *Proc. 7th Symp. Turbulence Shear Flows*, Stanford, (1989), 415.
- (8) Lee, M. J. and Reynolds, W. C., *Turbulence Shear Flows*, 5(1985), 54, Springer-Verlag, New York.
- (9) Hallbäck, M., Groth, J. and Johanson, A. V., *Phys. Fluids*, **A2**-10(1990), 1859.
- (10) Durbin, P. A. and Speziale, C. G., *J. Fluids Eng.* **113** (1991), 707.
- (11) Schumann, U., *Phys. Fluids*, **20**-5(1977), 721.
- (12) Rogers, M. M., Moin, P. and Reynolds, W. C., *Dept. Mech. Eng. Rep.*, TF-25, Stanford University, (1986), Stanford, California.