オゼーン速度場の重ね合わせによる球群の低 Re 数での運動の記述*熊谷輝雄^{*1}, 中條俊明^{*2}, 加藤哲哉^{*2}

Numerical Analysis of Equation of Motion for a Cluster of Spheres in Fluid at Low Reynolds Numbers by Superposing Oseen's Flow Field

Teruo KUMAGAI, Toshiaki NAKAJOH and Tetsuya KATOH

The equation of motion for a cluster of solid spheres moving in fluid at low Reynolds numbers is developed taking into consideration of hydrodynamic interaction among the spheres. The hydrodynamic forces of the spheres in the equation of motion are estimated using their relative velocities. The relative velocities are assumed to be represented by superposing Oseen's flow field around each sphere. When the inertia term is negligible in the equation of motion for the spheres, it is shown that the analytical solutions are easily obtained for free-fall motions of solid spheres in fluid. In order to discuss the effectiveness of the above-described method, experiments for two equal spheres falling freely in quiescent glycerol are carried out. The numerical results show good agreement with the experimental results.

Key Words: Fluid Dynamics, Equation of Motion, Cluster of Spheres, Hydrodynamic Drag, Reflection Method, Oseen Approximation, Numerical Analysis, Two Spheres, Free-Fall Motion

1. はじめに

粘性流体中での微粒子群の低レイノルズ数での運動は古典的な問題であるばかりでなく、半導体製造のためのクリーンルーム内でのダスト微粒子群の挙動やトレーサ法による流れの定量的可視化⁽¹⁾の際のトレーサ微粒子群の挙動などの問題とも密接に関係しており、最近では microhydrodynamics^{(2)~(4)}の基本問題としても注目されてきている。

簡単のため、微粒子の形状を球形として球群間の流体力学的相互作用のみに焦点をしばらくと、この問題は球群の低レイノルズ数での運動の問題に帰着する。球群の低レイノルズ数での運動に対する従来の理論的扱いは簡単さのために主としてストークス近似の仮定の下に展開されてきている⁽²⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし、従来ストークス域であるとされていたレイノルズ数が1以下の低レイノルズ数でも単独球、単一気泡や球群がストークス近似の予測する運動とは異なる運動をすることが最近次々と明らかにされてきている^{(7)~(13)}。そこで、前報では従来のストークス近似での反映法(以下簡単のため

めストークス反映法と呼ぶ)を発展させて誘導したオゼーン近似での反映法(以下簡単のためオゼーン反映法と呼ぶ)を提案して球群の中のそれぞれの球の流体抵抗を求め、運動方程式を構築してその有効性を代表的な2球問題で確かめた⁽¹⁶⁾。しかし、境界条件を満足させるように逐次近似で補正していく反映法はもともと球の存在を点力で近似していて各球表面での境界条件を完全に満足するわけではないうえ、数直径以上離れると第2近似以降の反映は急激に小さくなるので、一般には第1近似の反映をとるだけで十分よい近似になっていることが予想される。事実、ストークス近似のもとではこのような手法で球群の運動を扱った例⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾がある。

以上の事情を考慮して、本論文では球群の中のそれぞれの球が作るオゼーン速度場を単に重ね合わせることで球群の運動を記述する簡便な方法(以下簡単のためオゼーン速度場重ね合わせ法と呼ぶ)と、準定常状態での球群の自由落下運動を解析するための簡便な準定常近似のオゼーン速度場重ね合わせ法を提案し、これらの方法の有効性を静止流体中を自由落下する直列配置2球の問題に応用して検討する。

* 原稿受付 平成5年6月18日。

*¹ 正員, 東京理科大学理工学部 (〒278 野田市山崎 2641)。*² 学生員, 東京理科大学大学院。

2. オゼン速度場重ね合わせ法

2・1 運動方程式 本論文では簡単のため密度が等しく、大きさも等しい球群を等しい球群と呼び、等しい球群が相互に数直径以上離れていて回転による揚力が無視でき⁽¹²⁾、それぞれの球が流体力学的に点力 (point force) で近似できる⁽⁶⁾ 場合の低レイノルズ数での運動を考える。具体的には流体中での希薄な微粒子分散体の運動⁽⁵⁾ に相当する。

いま、図 1 に示す座標系で静止している粘性流体中の $(a, b, \dots, n)$ の n 個の固体球群の運動を考えよう。これらの球群の中の任意の球 j に着目すると、一般に運動方程式は

$$\frac{\pi d_j^3}{6} \left(\rho_s + \frac{\rho_f}{2} \right) \frac{d\mathbf{U}_j}{dt} = \mathbf{X}_j + \mathbf{D}_j \dots \dots \dots (1)$$

で記述されよう⁽¹⁶⁾。ここに $d, \rho_s, \rho_f, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{D}$ はそれぞれ球の直径、球の密度、流体の密度、球の速度、浮力を考慮した球の重力、球群相互の流体力学的相互作用を考慮した流体抵抗である。以下、添字 j で球 j を表すことにする。図 1 で x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると、浮力を考慮した球 j の重力は g を重力の加速度として

$$\mathbf{X}_j = -\mathbf{k} \frac{\pi d_j^3}{6} (\rho_s - \rho_f) g \dots \dots \dots (2)$$

で記述される。低レイノルズ数での球の抵抗はオゼンの抵抗則

$$\mathbf{D}_{jo} = -3\pi\mu d_j \mathbf{v}_j \left(1 + \frac{3}{16} Re_j \right) \dots \dots \dots (3)$$

で記述されるものとする⁽⁷⁾⁽⁸⁾。ここに $\mathbf{v}_j$ は球 j の相対速度である。球群間の流体力学的相互作用を考える場合には n 個の球群の中の球 j の相対速度 $\mathbf{v}_j$ は

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{U}_j - \mathbf{v}'_j = \mathbf{U}_j - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{U}'_{kj} \dots \dots \dots (4)$$

で記述されよう。ここに $\mathbf{U}'_{kj}$ は球 j の中心の位置に別の球 k の運動によって作られる流れ場の流速で、 $\mathbf{v}'_j$ は j 以外の他の球群によって j の位置に作られる流速を表す。また、 Re_j は相対速度 $\mathbf{v}_j$ を代表速度とするレイノルズ数で

$$Re_j = \frac{|\mathbf{v}_j| d_j}{\nu}$$

である。

したがって式 (4) の相対速度 $\mathbf{v}_j$ を見積もることができれば、式 (2) と式 (3) を式 (1) に代入して球群の運動方程式が完結されることになる。

2・2 相対速度 $\mathbf{v}_j$ の決定 オゼン反映法⁽¹⁶⁾ では球群の中の着目した球 j の相対速度 $\mathbf{v}_j$ は他の球からの反映速度場の和で

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^{(1)} + \mathbf{v}_j^{(3)} + \mathbf{v}_j^{(5)} + \dots \dots \dots (5)$$

で記述されるものとした。

ここで、 $\mathbf{v}_j^{(n)}$ の大きさを簡単に吟味しておこう。代表的な場合として静止流体中を自由落下する密度が相互に等しく直径も相互に等しい直列配置 2 球と並列配置 2 球の場合にオゼン反映法⁽¹⁶⁾ により具体的に反映速度の大きさを計算した結果を図 2 に示す。ここに l は 2 球の中心間距離である。また

$$E_n = |\mathbf{v}_j^{(n)}| / |\mathbf{v}_j^{(1)}| \dots \dots \dots (6)$$

である。図 2(a) は並列配置 2 球の場合を、図 2(b) は直列配置 2 球の場合を示す。直列配置 2 球の場合には

図 1 球群の直角座標表示

(a) 並列配置 2 球の場合

(b) 直列配置 2 球の場合

図 2 反映速度の大きさ $E_n = |\mathbf{v}_j^{(n)}| / |\mathbf{v}_j^{(1)}|$

進行方向に対して前側の球 [図 2(b) で Front side] と後側の球 [図 2(b) で Rear side] とで異なっているが、いずれの場合にも 2 球が離れていくと $v_j^{(5)}$ 以下の項は $v_j^{(3)}$ に比べて急激に小さくなり、4 直径以上離れた場合 ($l/d \geq 5$ の場合) には $v_j^{(5)}$ 以下の項が無視できる程度に小さくなっている。そこで $v_j^{(5)}$ 以下の項を省略して簡単に

$$v_j = v_j^{(1)} + v_j^{(3)} \dots \dots \dots (7)$$

で近似してもよさそうである。反映法では $v_j^{(3)} = -v_j^{(2)}$ とおいているので、この近似は球 j の相対速度 v_j が単に球 j の速度 $v_j^{(1)}$ と他の球群が球 j の位置に作るオゼーン速度を重ね合わせた速度 $v_j^{(2)}$ との差で近似されることを意味する。

以上の事情を考慮して、本論文ではオゼーン反映法⁽¹⁶⁾をより簡単化して、球 j の相対速度 v_j が単に球 j の速度 $v_j^{(1)} = U_j$ と球 j 以外の他の $(n-1)$ 個 (例えば球 k とする) の球群が球 j の位置に作るオゼーン速度を重ね合わせた速度 $v_j^{(2)} = \sum v_k^{(1)}$ との差で近似され

$$v_j = U_j - \sum v_k^{(1)} \dots \dots \dots (8)$$

で記述されるものとする。ここに $v_k^{(1)}$ は速度 U_k で進行している球 k が球 j の位置に作るオゼーン速度で、式 (4) の U'_{kj} に相当するので、以下簡単のため $v_k^{(1)} = U'_{kj}$ と書くことにする。

いま、図 3 で原点 O に対する球 j, k の中心の位置ベクトルを r_j, r_k とし k と j との相対位置ベクトルを $r_{kj} = r_j - r_k$ とすると、速度 U_k で進行する球 k が球 j の位置に作るオゼーン速度 U'_{kj} は

$$\begin{aligned} U'_{kj} &= |U_k| (i_{rkj} v_{rkj} + i_{\theta kj} v_{\theta kj}) \\ &= |U_k| \left[i \left(\frac{v_{rkj} x_{kj}}{|r_{kj}|} + \frac{v_{\theta kj} R_{xkj}}{|R_{kj}|} \right) \right. \\ &\quad + j \left(\frac{v_{rkj} y_{kj}}{|r_{kj}|} + \frac{v_{\theta kj} R_{ykj}}{|R_{kj}|} \right) \\ &\quad \left. + k \left(\frac{v_{rkj} z_{kj}}{|r_{kj}|} + \frac{v_{\theta kj} R_{zkj}}{|R_{kj}|} \right) \right] \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

で記述される⁽¹⁶⁾。ここに

$$\begin{aligned} U_k &= iU_{xk} + jU_{yk} + kU_{zk} \\ |U_k| &= (U_{xk}^2 + U_{yk}^2 + U_{zk}^2)^{1/2} \\ r_{kj} &= r_j - r_k = ix_{kj} + jy_{kj} + kz_{kj} \\ x_{kj} &= x_j - x_k, \quad y_{kj} = y_j - y_k, \quad z_{kj} = z_j - z_k \\ i_{rkj} &= \frac{r_{kj}}{|r_{kj}|} \\ i_{\theta kj} &= \frac{r_{kj} \times (U_k \times r_{kj})}{|r_{kj} \times (U_k \times r_{kj})|} \\ R_{kj} &= r_{kj} \times (U_k \times r_{kj}) = iR_{xkj} + jR_{ykj} + kR_{zkj} \\ R_{xkj} &= (U_{xk}y_{kj}^2 - U_{yk}x_{kj}y_{kj}) \\ &\quad - (U_{zk}x_{kj}z_{kj} - U_{xk}z_{kj}^2) \\ R_{ykj} &= (U_{yk}z_{kj}^2 - U_{zk}y_{kj}z_{kj}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(U_{xk}y_{kj}x_{kj} - U_{yk}x_{kj}^2) \\ R_{zkj} &= (U_{zk}x_{kj}^2 - U_{xk}z_{kj}x_{kj}) \\ &-(U_{yk}z_{kj}y_{kj} - U_{zk}y_{kj}^2) \end{aligned} \dots \dots \dots (10)$$

である。また、 i_{rkj} , $i_{\theta kj}$ はそれぞれ r_{kj} , θ_{kj} 方向の単位ベクトルである。参考のため、図 3 には $U_j - r_{jk}$ 面と $U_k - r_{kj}$ 面を示してある。

図 3 の $U_k - r_{kj}$ 面に対応する図 4 に示す座標系で静止流体中を一定速度 $U_k = -kU_k$ で進行する半径 a の球 k が j の位置に作る速度は低レイノルズ数では

$$U'_{kj} = |U_k| (i_{rkj} v_{rkj} + i_{\theta kj} v_{\theta kj}) \dots \dots \dots (11)$$

で記述される⁽⁷⁾⁽⁸⁾。ここに

(1) ストークス解

$$\begin{aligned} v_{rkj} &= \left(\frac{a^3}{2r_{kj}^3} - \frac{3a}{2r_{kj}} \right) \cos \theta_{kj} \\ v_{\theta kj} &= \left(\frac{3a}{4r_{kj}} + \frac{a^3}{4r_{kj}^3} \right) \sin \theta_{kj} \end{aligned} \dots \dots \dots (12)$$

(2) オゼーン基礎解

$$\begin{aligned} v_{rkj} &= \frac{a^3}{2r_{kj}^3} \cos \theta_{kj} - \frac{3a}{4r_{kj}} (1 + \cos \theta_{kj}) \\ &\quad \times \exp[-Re_k r_{kj} (1 - \cos \theta_{kj}) / 4a] \\ &\quad + \frac{3a^2}{Re_k r_{kj}^2} [1 - \exp[-Re_k r_{kj} (1 - \cos \theta_{kj}) / 4a]] \\ v_{\theta kj} &= \frac{a^3}{4r_{kj}^3} \sin \theta_{kj} + \frac{3a}{4r_{kj}} \sin \theta_{kj} \\ &\quad \times \exp[-Re_k r_{kj} (1 - \cos \theta_{kj}) / 4a] \end{aligned} \dots \dots \dots (13)$$

(3) オゼーン一次解

$$\begin{aligned} v_{rkj} &= \left(1 + \frac{3}{16} Re_k \right) \left[-\frac{a^3}{r_{kj}^3} \cos \theta_{kj} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3a^4 Re_k}{32r_{kj}^4} (2 \cos^2 \theta_{kj} - \sin^2 \theta_{kj}) + \frac{3a^2}{Re_k r_{kj}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{3a^2}{Re_k r_{kj}^2} - \frac{3a}{4r_{kj}} (1 + \cos \theta_{kj}) \right\} \right] \end{aligned}$$

図 3 2 球の作る速度場の直角座標表示

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3a^3}{2r_{kj}^3} \left(1 + \frac{Re_k r_{kj}}{4a} \right) \cos \theta_{kj} \\
 & - \frac{3a^2 Re_k}{16r_{kj}^2} \left(1 + \frac{Re_k r_{kj}}{4a} \right) \sin^2 \theta_{kj} \Big\} \\
 & \times \exp \{ -Re_k r_{kj} (1 - \cos \theta_{kj}) / 4a \} \Big] \\
 v_{\theta kj} = & - \left(1 + \frac{3}{16} Re_k \right) \sin \theta_{kj} \left[\frac{a^3}{2r_{kj}^3} \right. \\
 & + \frac{3a^4 Re_k}{16r_{kj}^4} \cos \theta_{kj} + \left\{ -\frac{3a}{4r_{kj}} - \frac{3a^3}{4r_{kj}^3} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3a^2 Re_k}{16r_{kj}^2} \left(1 + \frac{Re_k r_{kj}}{4a} \right) (1 - \cos \theta_{kj}) \right\} \right. \\
 & \left. \times \exp \{ -Re_k r_{kj} (1 - \cos \theta_{kj}) / 4a \} \right] \\
 & \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

である。

2・3 オゼン速度場重ね合わせ法 以上の手順で決定された球 j の相対速度 v_j を式(3)に代入すると球 j の流体抵抗を見積もることができるので、例えば静止流体中を低レイノルズ数で運動する球群のそれぞれの球の運動方程式は式(1)の形で完結する。これらの運動方程式は一般に解析的に解くことは困難であるが、球群の中の任意に選んだ球 j の位置 r_j 、速度 U_j の初期条件を与えると Runge-Kutta-Gill 法で容易に数値解を求めることができるので、球群の低 Re 数での運動を解析するためのこの手法を以下オゼン速度場重ね合わせ法と呼ぶことにする。

3. 準定常近似の場合の解法

図1で粘性流体中の球群が相互に数直径以上離れているときの低 Re 数での自由落下運動を考える場合には一般に球の加速度は非常に小さく、球群の運動は準定常状態にあると考えてよいであろう。例えば、直列配置2球の低 Re 数での自由落下運動では式(1)の運

図4 静止流体中を進行する球の作る速度場

動方程式の中の慣性項の大きさは重力項の大きさの約 5×10^{-4} 倍であり⁽¹⁰⁾、慣性項は無視できる。このようなとき、式(1)は簡単に

$$X_j + D_j = 0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。あるいは式(2)、(3)を代入して

$$k \frac{\pi d_j^3}{6} (\rho_{sj} - \rho_f) g = -3\pi \mu d_j v_j \left(1 + \frac{3}{16} Re_j \right) \dots\dots\dots (16)$$

となる。以下、このように運動方程式中の慣性項を無視して重力項と流体抵抗項が釣り合っていると仮定する近似を準定常近似と呼ぶことにする。準定常近似では問題の扱いが極めて簡単になるので、球群問題の中で最も簡単な直列配置2球の自由落下運動を検討しておく。

3・1 単独球の終速度 静止流体中を単独球 t (以下添字 t で単独球を表す) が自由落下しているとき、準定常近似では

$$X_t + D_t = 0 \dots\dots\dots (17)$$

あるいは

$$k \frac{\pi d_t^3}{6} (\rho_{st} - \rho_f) g = -3\pi \mu d_t v_t \left(1 + \frac{3}{16} Re_t \right) \dots\dots\dots (18)$$

で記述される。このとき、図1の座標系では

$$v_t = -k v_t \dots\dots\dots (19)$$

で記述される。 v_t は一般に終速度と呼ばれている。式(18)の右辺の Re_t を零とおいた場合がストークス抵抗を表し、そのとき終速度 v_{ts} は

$$v_{ts} = d_t^2 (\rho_{ts} - \rho_f) g / 18\mu \dots\dots\dots (20)$$

で記述される。以下、 v_{ts} をストークス終速度と呼ぶことにする。単独球の流体抵抗がオゼン抵抗で記述される場合の終速度 v_{to} は式(18)より

$$v_{to} = [-24\mu + 2\{144\mu^2 + 6d_t^3 \rho_f (\rho_s - \rho_f) g\}^{1/2}] / 9\rho_f d \dots\dots\dots (21)$$

で記述される。以下、 v_{to} をオゼン終速度と呼ぶことにする。

3・2 等しい球群の運動の基礎式と解法 簡単のため、密度、大きさのそれぞれが単独球 t の密度、大きさに等しい場合の等しい球群が静止流体中を自由落下しているときの球 j の運動を考えよう。このとき、 $\rho_{sj} = \rho_{st}$ 、 $d_j = d_t$ であるから、いずれの球に作用する重力も $X_j = X_t$ となり、したがって流体抵抗も $D_j = D_t$ となる。このことは準定常近似で考える場合にはストークス近似、オゼン近似のいかなを問わず成り立つことに注意する。 $d_j = d_t$ のとき、式(16)、(18)より $v_t = v_j$ となるから、式(4)に代入して

$$v_t (= v_j) = U_j - v'_j \dots\dots\dots (22)$$

となる。したがって

$$U_j = v_i + v'_j = v_i + \sum U'_{ji} \quad (23)$$

で球 j の速度が与えられることになる。式(23)が準定常近似の場合のオゼン速度場重ね合わせ法による球群の運動の基礎式となり、 $dr_j/dt = U_j$ を解けば球 j の位置 r_j が求められる。なお、式(23)はストークス近似の場合に Hocking⁽¹⁵⁾ が球群の運動の解析に用いた基礎式にほかならない。

4. 等しい直列配置 2 球の自由落下運動

4.1 運動方程式の解法 図5に示す座標系で $x=0$ の鉛直線に沿って自由落下する等しい直列配置 2 球 a, b の運動を考える。2 球の直径を $d_a = d_b = 2a$, 2 球の中心間距離を l とし、2 球の速度をそれぞれ

$$U_a = -kU_a, U_b = -kU_b \quad (24)$$

としよう。運動方程式は式(1)で添字 j の代わりに a, b において記述され、式(4)の相対速度 v_j が見積もれば運動方程式の数値解が求められることになる。相対速度 v_j の見積もり方としてこれまでに提案されている方法は(1)ストークス反映法⁽⁶⁾, (2)オゼン反映法⁽¹⁶⁾と(3)準定常近似のストークス速度場重ね合わせ法⁽¹⁵⁾である。なお、オゼン反映法で $Re=0$ とおいた場合がストークス反映法であることに注意する。本論文で提案している方法は2章に記述した(4)オゼン速度場重ね合わせ法と3章に記述した(5)準定常近似のオゼン速度場重ね合わせ法である。これらの方法のうち、方法(1), (2), (4)では式(1)を直接解くことが困難であるので、数値解を求めることにする。方法(3), (5)では簡単に解析解を求めることができるので、以下に整理しておく。

4.2 準定常近似の場合の解 準定常近似では式(19), (24)を式(23)に代入して

$$U_a = v_i + U'_{ba}, U_b = v_i + U'_{ab} \quad (25)$$

となる。

4.2.1 ストークス速度場重ね合わせ法の解 いま、ストークス終速度 v_{ts} で自由落下している球 a が球 b の中心の位置に作る速度を U'_{ab} , v_{ts} で落下している球 b が球 a の中心の位置に作る速度を U'_{ba} とすると、式(12)~(14)を用いる場合には式(11)で $r=l$, $\theta=0, \pi$ とおくことにより

$$U'_{ab} = -v_{ts} \times [v_{rab}]_{\theta=0} \quad (26)$$

$$U'_{ba} = v_{ts} \times [v_{rba}]_{\theta=\pi} \quad (27)$$

で記述される。式(12)を代入すると両者は等しくなり

$$\begin{aligned} U'_{ab} &= U'_{ba} \\ &= \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) v_{ts} \quad (28) \end{aligned}$$

で与えられることになる。式(25)の v_i にストークス終速度を用いると 2 球の速度 U_a, U_b は

$$U_a = U_b = \left(1 + \frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) v_{ts} \quad (29)$$

で記述される。2 球 a, b の位置を図5に示すように $z_a = -kz_a, z_b = -kz_b$ とすると、 $U_a = dz_a/dt, U_b = dz_b/dt$ であるから式(29)より

$$\frac{dz_a}{dt} = \left[1 + \frac{3a}{2(z_a - z_b)} - \frac{a^3}{2(z_a - z_b)^3} \right] v_{ts} \quad (30)$$

となる。なお、 $dz_b/dt = dz_a/dt$ である。 $z_a - z_b = l$ とおくと式(30)より $dl/dt = 0$ であるから、2 球の中心間距離 l は一定となる。 $t=0$ で $z_a = z_{a0}, z_b = z_{b0}$ とすると解は

$$\begin{aligned} z_a &= z_{a0} + v_{ts} \left(1 + \frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) t \\ z_b &= z_{b0} + v_{ts} \left(1 + \frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) t \end{aligned} \quad (31)$$

となる。結局、ストークス近似では等しい直列配置 2 球は単独球の終速度の $[1 + 3a/2l - a^3/(2l^3)]$ 倍の終速度で自由落下し、2 球の中心間距離は初めの距離と同じで一定に保たれることを予測することになる。このとき、2 球の流体抵抗は単独球のストークス抵抗で無次元化して

$$\begin{aligned} \frac{D_a}{D_{ts}} &= \frac{3\pi\mu d v_{ts}}{3\pi\mu d U_a} = \frac{D_b}{D_{ts}} \\ &\equiv 1 + \frac{3a}{2l} + \frac{a^3}{2l^3} \quad (32) \end{aligned}$$

で記述され、ストークス近似の場合の Stimson-Jeffery の厳密解⁽¹⁷⁾ による抵抗への近似である Happel-Brenner の抵抗則⁽⁶⁾ に一致する。

4.2.2 オゼン速度場重ね合わせ法の解 初め

図5 直列配置 2 球の説明図

に簡単のため、式(13)で記述されるオゼン基礎解を用いることにする。静止流体中を図4の z 軸上を負の方向に進行する単独球の進行方向上流側と下流側の $r = l$ の位置に作られるオゼン速度 U'_{ab} , U'_{ba} はそれぞれ式(11), (13)で $\theta=0$ または $\theta=\pi$ とおくことにより

$$\begin{aligned} U'_{ab} &= -v_{t0} \times [v_{rjk}]_{\theta=0} \\ &= v_{t0} \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'_{ba} &= v_{t0} \times [v_{rjk}]_{\theta=\pi} \\ &= v_{t0} \left[-\frac{a^3}{2l^3} + \frac{3a^2}{Re l^2} \{1 - \exp(-Re_{t0}l/2a)\} \right] \\ &\doteq v_{t0} \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} - \frac{3}{8} Re_{t0} \right) \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

で記述される。ここでは公式 $e^x = 1 + x/(1!) + x^2/(2!) + x^3/(3!) + \dots\dots$ を用いて、 Re の高次の項を省略している。式(25)の v_t にオゼン終速度 v_{t0} を用いると

$$\begin{aligned} U_a &= v_{t0} + U'_{ba} \\ &\doteq v_{t0} \left(1 + \frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} - \frac{3}{8} Re_{t0} \right) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_b &= v_{t0} + U'_{ab} \\ &= v_{t0} \left(1 + \frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。4・2・1項の場合と同様に $z_a - z_b = l$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{3}{8} Re_{t0} = -\frac{3dv_{t0}}{8\nu} \\ l &= z_a - z_b - \frac{3}{8} Re_{t0}t \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。 $t=0$ で $z_a = z_{a0}$, $z_b = z_{b0}$, $l = l_0 = z_{a0} - z_{b0}$ とすると2球の位置 z_a , z_b はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_a &= z_{a0} + v_{t0} \left(1 - \frac{3}{8} Re_{t0} \right) t + \frac{4}{Re_{t0}} \\ &\quad \times \log \frac{l_0}{l_0 - 3v_{t0}Re_{t0}/8} + \frac{2}{3Re_{t0}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{l_0^2} - \frac{1}{(l_0 - 3v_{t0}Re_{t0}/8)^2} \right] \\ z_b &= z_{b0} + v_{t0}t + \frac{4}{Re_{t0}} \log \frac{l_0}{l_0 - 3v_{t0}Re_{t0}/8} \\ &\quad + \frac{2}{3Re_{t0}} \left[\frac{1}{l_0^2} - \frac{1}{(l_0 - 3v_{t0}Re_{t0}/8)^2} \right] \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

で与えられる。

オゼン近似の場合にはストークス近似の場合と異なって式(35), (36)より $U_b \geq U_a$ となり、後続球が先行球に接近していく実際の自由落下運動を記述していることがわかる。なお、 $Re \rightarrow 0$ では式(35), (36)が式(29)に一致していることはいうまでもない。

このとき、2球の流体抵抗は

$$\frac{D_a}{D_{ts}} = \frac{3\pi\mu dv_{t0}(1+3Re/16)}{3\pi\mu dU_a}$$

$$\doteq \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \left(1 - \frac{3a}{2l} + \frac{a^3}{2l^3} + \frac{3}{8} Re \right) \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_b}{D_{ts}} &= \frac{3\pi\mu dv_{t0}(1+3Re/16)}{3\pi\mu dU_b} \\ &= \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \left(1 - \frac{3a}{2l} + \frac{a^3}{2l^3} \right) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

で記述される。

式(14)で記述されるオゼン一次解を用いる場合には同様にして

$$\begin{aligned} U_a &\doteq v_{t0} \left[1 + \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3a^2}{8l^2} Re - \frac{3}{8} Re \right) \right] \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_b &\doteq v_{t0} \left[1 + \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} + \frac{3a^2}{8l^2} Re \right) \right] \\ &\dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_a}{D_{ts}} &\doteq \left(1 + \frac{3Re}{16} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{3Re}{16} \right) \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3a^2}{8l^2} Re - \frac{3}{8} Re \right) \right] \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_b}{D_{ts}} &\doteq \left(1 + \frac{3Re}{16} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{3Re}{16} \right) \left(\frac{3a}{2l} - \frac{a^3}{2l^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3a^2}{8l^2} Re \right) \right] \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

で記述される。式(41), (42)よりオゼン基礎解の場合と同様の手順で2球の位置 z_a , z_b を容易に決定できる(紙面の都合で詳細は省略)。式(41)~(44)が $Re \rightarrow 0$ でそれぞれ式(35), (36)と式(39), (40)に漸近していくことはいうまでもない。

4・3 実験装置と方法 直列配置2球の静止流体中での自由落下運動の実験装置と方法については既報^{(7)~(13)}に詳述してあるので、ここでは簡単に記述しておく。実験装置の概要を図6に示す。市販の精製グリセリンを満たした試験槽は1.0×1.0 mの正方形断面をしており深さ1.5 mである。試験槽は鋼鉄板製であるが、壁面3方向に透明アクリル樹脂製の観測用窓を設けてある。試験球は直径6.0~9.5 mmのテフロン球(4℃の水に対する比重2.418)である。2球の運動に及ぼす容器壁存在の影響を考慮して試験球の大きさは容器の1/100以下としてある。落球装置は図6(b)に示すように球直径の約1.2倍の直径の円管とした。円管内のグリセリン中に適当な間隔で2球を設置しておき、円管上部に接続した注射器のシリンダで加圧して2球を落下させることにした。円管内を進行する球は球直径の約10倍の助走距離で球中心が円管軸に一致するようになるので本落球装置では円管長さ/球直径を12以上とした。

実験に際しては実験装置全体を暗室状態にし、任意

図 6 実験装置

の初期配置で落下させた2球を適当な時間周期で発光させたストロボ光源とカメラを用いて連続撮影することにより各時刻での自由落下する2球を撮影した。撮影したフィルムをスライド映写機で方眼紙に拡大撮影し、時間経過に対する2球の位置を読み取り速度、加速度と球抵抗を求めた。

4・4 結果と考察 以上の実験方法で求めた静止流体(本実験ではグリセリン)中での直列配置2球の低

(a) 写真例

(b) 計算値との比較

図 7 直列配置2球の自由落下運動

Re 数での自由落下運動の代表的な写真例を図 7(a) に示す。図 7(a) で横軸は落球以降の経過時間を、縦軸は落下距離/球直径を示している。この場合、2球はいずれもテフロン製で球密度 $\rho_a = \rho_b = 2196.9 \text{ kg/m}^3$ 、球直径 $d_a = d_b = 7.883 \text{ mm}$ である。なお、グリセリンの密度と動粘度は実験中それぞれ $\rho_f = 1257.5 \text{ kg/m}^3$ と $\nu_f = 8.3286 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ であった。図 7(a) より読取った自由落下している2球の位置を時間を横軸にして図 7(b) に示す。図 7(b) 中の実験値を示す○印の直径は球直径と一致させてある。図 7(b) 中には方法(1)～(5)で計算した位置も示してある。ストークス近似での解はストークス反映法⁽⁶⁾と準定常近似のストークス場重ね合わせ法⁽¹⁵⁾による解であるが、両者の計算結果の差は最大でも0.01%程度で良好に一致しているのでストークス近似での解として図 7(b) 中に点線で示してある。オゼーン近似での解はオゼーン反映法⁽¹⁶⁾による解、本論文で誘導したオゼーン速度場重ね合わせ法による解と準定常近似のオゼーン速度

場重ね合わせ法による解であるが、これら三者の計算結果の差は最大で1.7%程度で良好に一致しているのが図7(b)に実線で示してある。なお、オゼーン近似での三者の解の計算結果は実線の幅内に納まっている。ストークス近似での解はいずれも実験結果と異なり等しい直列配置2球の等間隔等速自由落下運動を予測しているのに対してオゼーン近似での解はいずれも後続球が先行球に接近して自由落下する実際の運動を良好に記述している。

5. 結 論

流体力学的相互作用を考慮した低レイノルズ数域での球群の運動の解析を目的として、静止流体中を進行する単独球の作るオゼーン速度場を重ね合わせて球群中のそれぞれの球の運動方程式を解く方法をオゼーン速度場重ね合わせ法として提案した。さらに、球群の自由落下運動を記述する簡便な方法として準定常近似のオゼーン重ね合わせ法を提案した。これらの方法による解は密度が等しく直径も等しい直列配置2球の自由落下運動の実際を良好に記述することを確認した。

文 献

- (1) Adrian, R. J., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **23**(1991), 261.
- (2) Batchelor, G. K., *Theoretical and Applied Mechanics*, (1976), 33, North-Holland.
- (3) Kim, S. and Karrila, S. J., *Microhydrodynamics*, (1991), 1, Butterworth-Heinemann.
- (4) Hewitt, G. F., Delhay, J. M. and Zuber, N., *Multiphase Science and Technology*, **4**(1989), 583, Hemisphere Publishing Co..
- (5) Kumagai, T., *Abstracts 18th ICTAM*, 88, Paper No. 315 (1992), 1~15.
- (6) Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, (1983), 235, Martinus Nijhoff Publishers.
- (7) 熊谷・藤原, 機論, **49**-439, B(1983), 628.
- (8) 熊谷・小林, 機論, **51**-461, B(1985), 74.
- (9) 熊谷, 機論, **52**-474, B(1986), 541.
- (10) 村岡・熊谷, 機論, **54**-500, B(1988), 776.
- (11) Kumagai, T. and Muraoka, M., *JSME Int. J., Ser. II*, **32**-3(1989), 309.
- (12) 熊谷・村岡・武田, 機論, **54**-508, B(1988), 3401.
- (13) 中・熊谷・村岡・武田, 機論, No. 900-59, B(1990), 417.
- (14) Jayaweera, K. O. L. F., Mason, B. J. and Slack, G. W., *J. Fluid Mech.*, **20**-1(1964), 121.
- (15) Hocking, L. M., *J. Fluid Mech.*, **20**-1(1964), 129.
- (16) 熊谷, 機論, **59**-563, B(1993), 2173.
- (17) Stimson, M. and Jeffery, G. B., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **111**(1926), 110.