境界要素法による平行二平板間の狭いすき間内の
移動メニスカスの解析*古口 日出男^{*1}, 関根 健生^{*2}, 矢田 敏夫^{*3}Analysis of a Moving Meniscus in Narrow Gap between Parallel Plates
by Boundary Element Method

Hideo KOGUCHI, Takeo SEKINE and Toshio YADA

When we fill the narrow gap between two parallel plates with a viscous fluid, the meniscus of the free surface forms a concave shape due to capillary action. Air enters the gap with the movement of the viscous fluid when the gap between the two plates is increased at a certain speed. In this paper, the appearance of a moving meniscus is simulated by the boundary element method for two situations: two-dimensional flow and axisymmetric flow. First, the solutions obtained as fundamental solutions satisfying the Stokes approximation equation were quantitatively compared with experimental results with respect to the tip of the moving meniscus. Second, a new fundamental solution for the axisymmetric boundary element method was used for the direct evaluation of a singular integral. Numerical results showed a good agreement with experimental ones.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Meniscus, Viscous Fluid, Secondary Flow, Axisymmetric Flow, Remaining Liquid

1. 緒 言

平行な2枚の板の狭いすき間に自由表面を有する粘性流体を満たし、側面から自由表面を観察すると、毛管現象によりメニスカスと呼ばれる凹面が見られる(図1参照)。その2枚の板を平行に保って引き離していくと、空気が液体を上下に分離するようにしてすき間の中央から入り込んでいく。この時に、板の引き離し速度、板のすき間、流体の粘度がある臨界値を超えると、移動メニスカスを形成している自由表面が図2のように乱れ始め、板面に樹枝状のパターンが形成される。この乱れの現象はメニスカス不安定⁽¹⁾⁽²⁾と呼ばれ、ジャーナル軸受内の油膜破断⁽³⁾⁻⁽⁵⁾や高分子材料、非晶質材料⁽⁶⁾の引張破断などの移動する自由界面先端でも起こると考えられている。著者らは前報⁽¹⁾でメニスカス不安定現象を境界要素法によりシミュレートし、実験結果とよい一致を示した。しかし、キャピラリ

図1 メニスカス界面

図2 自由表面が乱れる様子(実験)

* 原稿受付 平成5年3月24日。

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学工学部 (〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。^{*2} 准員, 川崎製鉄(株)千葉製鉄所 (〒260 千葉市中央区川崎町1)。^{*3} 正員, 長岡技術科学大学。

数が大きいと両者は一致しなくなった。ここで、キャピラリ数とは表面張力に対する粘性力の比である。これは前報では自由表面の乱れの曲率と残留液膜の厚さおよび圧力の関係を考慮していなかったためと考えられる。また、前報では残留液膜を近似的な境界条件で求めていた。そこで、本報では液膜全体を境界要素分割し、残留液膜およびメニスカス先端での圧力をキャピラリ数の関数として求める。解析対象は、乱れの先端の曲率半径を有する平行二円板間の流れおよびその曲率半径を無限大と想定した平行二平板間の流れである。本論文の境界要素法解析では二次元解析でStokes近似の基本解、軸対称解析で特異積分の評価を直接行えるように定式化した基本解をそれぞれ用いる。ただし本解析では、自由表面に乱れは生じないものとする。

2. 解析モデルと境界条件

2.1 残留液膜厚さの定義 2枚の板の狭いすき間に粘性流体を挟んで板を引き離すと、板面には図3のように残留液膜が形成される。この残留液膜は、本研究と関連のあるHele-Shawセルの研究の場合には求められているが、本研究のように板のすき間が変化する場合は求められていない。本研究では、前報⁽¹⁾と同様に残留液膜の大きさを式(1)で定義する(図4参照)。

$$m_0 = \frac{h-w}{h} \quad (1)$$

ここで、 w は板の端部と移動メニスカス界面先端の中間位置の空気の高さ、 h はすき間である。

2.2 解析モデル 図5と図6に本研究の解析モデルの模式図を示す。両者の自由表面には乱れはないものとする。図5は、長さ $2B_0$ で、幅(y 軸)方向に無限に長いと仮定した平行二平板間の二次元流れのモデル、図6は半径 R_0 の平行二円板間の軸対称流れのモデルである。

それぞれの問題で基本解や境界積分方程式の違いはあるが、これらの解析モデルは図7のように一つの図で示すことができる。この図は、平行な2枚の板の狭いすき間に粘性流体が挟まれた状態を側面から見たものである。ここで、 h は板のすき間、 V_s は板の引き離し速度で、 B_0 は二次元解析における板の長さ、 R_0 は軸対称解析における円板の半径である。

解析には境界要素法を用いるが、解析領域のすき間に対する長さまたは半径の寸法比が数十倍にもなるため、領域分割解法を用いて解析精度の低下を避けた。本研究では、初期状態において各領域のすき間に対する長さの比が1:5となるように分割し、メニスカス界面のある領域も含めて全体を6つに分割した。

本問題の境界条件は、メニスカス面では力が既知で

図3 残留液膜

図4 残留液膜の厚さの定義

図5 流れの二次元モデル模式図

図6 流れの軸対称モデル模式図

速度は未知、板面では速度が既知で力は未知である。次式はメニスカス界面の境界条件である。

$$\vec{t} \cdot \sigma \cdot \vec{n} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n} = p_0 - T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

ここで、 σ は応力テンソル、 T は表面張力、 R_1 、 R_2 は界面

図7 解析モデル

の主曲率半径, $\vec{t}$ は界面の接線ベクトル, $\vec{n}$ は界面の法線ベクトル, p_0 は大気圧で0とした. 界面に対する作用力はこれらの式から次式のようになる.

$$\begin{cases} t_i = \frac{T}{\rho_m} n_i & ; \text{二次元流れ問題} \dots\dots\dots(4) \\ t_i = T \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{R} \right) n_i & ; \text{軸対称流れ問題} \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

ここで, ρ_m はメニスカス界面の曲率半径 (平行平板間のすき間方向), n_i は界面の法線ベクトルの i 方向成分, R は軸対称流れ問題における自由表面の曲率半径 (円板半径方向) である.

また, 二次元流れ問題では対称軸の z 軸上の速度として, x 方向には $u_x=0$, z 方向には次式の u_z を与えた.

$$u_z = \frac{V_s z}{2h^3} (3h^2 - 4z^2) \dots\dots\dots(6)$$

以上の境界条件および式(7)の境界条件のもとでメニスカス界面上の各節点の未知量を求める. 得られた各節点の移動速度に微小時間を掛けて, 移動距離を求めることにより新しい座標が得られる. 本解析では式(8)の差分近似を用いて新しい位置を求めた.

$$\begin{cases} \text{メニスカス界面} & ; t_x = \vec{t}_x, t_z = \vec{t}_z \\ \text{板面} & ; u_x = 0, u_z = \frac{1}{2} V_s \dots\dots\dots(7) \\ \text{z軸上(二次元流れ)} & ; u_x = \vec{u}_x, u_z = \vec{u}_z \\ \begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) \\ + \{ \theta(\vec{u} \cdot \vec{n})^{(i)} + (1-\theta)(\vec{u} \cdot \vec{n})^{(i+\Delta t)} \} \vec{n}_x^{(i)} \Delta t \\ z(t+\Delta t) = z(t) \\ + \{ \theta(\vec{u} \cdot \vec{n})^{(i)} + (1-\theta)(\vec{u} \cdot \vec{n})^{(i+\Delta t)} \} \vec{n}_z^{(i)} \Delta t \end{cases} & \dots\dots\dots(8) \end{cases}$$

ここで, θ は0~1の実数 (本研究では $\theta=0.5$), Δt は微小時間である. この Δt は次式から求めた.

$$\lambda = \frac{\Delta t}{L} (\vec{U} \cdot \vec{n})_{\max} \dots\dots\dots(9)$$

L は節点間隔, U は界面上の最大速度, λ は L に対する Δt 間の節点移動距離の比で0~1の値, 本解析では λ を0.6とした. この式により, 1回の時間ステップで最も移動節点でも節点間隔よりは進展しないようにできる.

解析では, メニスカス界面の初期形状として, 初期すき間を直径とする半円を与える. 板が静止している時に界面が応力の平衡条件を満足していない場合にはメニスカスはわずかに移動する. このことを界面がほとんど移動しなくなるまで行った後の界面を初期形状として解析を行った. また, 板を引き離し始めてメニ

スカス界面が進展していくに従い, 境界は徐々に長くなる. この時に計算精度が低下しないように形状を内挿するためには, 界面が進展しても常に節点間隔をほぼ等間隔に保つ必要がある. そのために, 節点間を滑らかかつ連続に補間することも考慮して, スプライン関数による補間を行い, その後要素再分割を行った.

3. 境界積分方程式及び基本解

3.1 二次元流れ問題の場合 本研究のように幅方向に無限に長い狭いすき間の平行二平板間の粘性流体の流れは (レイノルズ数 $Re < 1$), 基本的に遅い定常粘性流 (Stokes近似) で表わすことができる. 本研究では, 境界要素法の基本解としてStokes近似の二次元流れ場の解を用いた.

本問題に用いた境界積分方程式と基本解は次式で与えられる.

$$C_{ij} u_j(P) = \int_S U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS(Q) - \int_S T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS(Q) \dots\dots\dots(10)$$

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \ln \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_i r_j \right\} \dots\dots\dots(11)$$

$$T_{ij}(P, Q) = -\frac{r_i r_j}{\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots(12)$$

ここで, C_{ij} は境界 S 上のソース点 P における境界の形状により決まる定数, U_{ij} , T_{ij} はそれぞれ速度と表面力の基本解, u_j は速度, t_j は表面力, μ は粘性係数, r は点 P と観測点 Q との距離, r_i は距離の方向微分, δ_{ij} はクロネッカのデルタである.

3.2 軸対称流れ問題の場合 軸対称問題の解析に用いる境界積分方程式を次式に示す.

$$C_{ij}(P) u_j(P) = 2\pi \int_S U_{ij}(P, Q) t_j(Q) r(Q) dS(Q) - 2\pi \int_S T_{ij}(P, Q) u_j(Q) r(Q) dS(Q) \dots\dots\dots(13)$$

ここで, C_{ij} は母線境界 S 上のソース点 P における境界の形状で決まる定数, $r(Q)$ は図8を参照のこと.

軸対称解析に用いる基本解は, 三次元領域の基本解を積分したものと, 特異積分を直接的に評価するために定式化した式を状況に応じて使い分けながら計算を行った. さらに, 基本解はソース点が対称軸上にある場合は解が発散するため, 対称軸上における基本解の極限を求めておく. 以下にそれらの基本解を示す.

3.2.a 積分要素内にソース点が含まれない場合

次に軸対称のStokes近似に対する速度の基本解 u_{ij} を示す.

$$u_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{r p \sqrt{(r+p)^2 + z^2}} \left\{ -2[(r+p)^2 + z^2] + \frac{(r^2 - p^2)^2 + z^2(r^2 + p^2)}{(r-p)^2 + z^2} \right\} E(\kappa) + (r^2 + p^2 + 2z^2) K(\kappa) \dots\dots\dots(14)$$

$$u_r = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\bar{z}}{p\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{r^2 - p^2 + \bar{z}^2}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right\} \quad (15)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\bar{z}}{r\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{r^2 - p^2 - \bar{z}^2}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right\} \quad (16)$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{\bar{z}^2 E(\kappa)}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} + K(\kappa) \right\} \quad (17)$$

ただし、式中の μ は粘性係数、 $U_{ij}=u_{ij}$ 、 $T_{ij}=t_{ij}$ 、 $r=r(Q)$ 、 $p=r(P)$ 、 $\bar{z}=z(Q)-z(P)$ 、 $K(\kappa)$ は第一種完全楕円積分、 $E(\kappa)$ は第二種完全楕円積分である。

表面力の基本解は次式から求められる。

$$t_{ij} = \tau_{ijk} n_k \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_{rr} & t_{rz} \\ t_{rz} & t_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_r n_r + \tau'_{rz} n_z & \tau'_{rz} n_r + \sigma'_z n_z \\ \sigma'_r n_r + \tau'_{rz} n_z & \tau'_{rz} n_r + \sigma'_z n_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 τ'_{ijk} は応力テンソルの一般成分、 σ'_i はその対角成分で $\sigma'_i = t'_{ii}$ で表される。また、表面力の基本解を付録1に示す。

ソース点 P が対称軸上にある場合($r(P)=0$)、上述した基本解は発散してしまう。そこで、楕円積分をTaylor展開した後、 $p \rightarrow 0$ として基本解の極限を求める。第一種及び第二種完全楕円積分のTaylor展開は次式で表される。

$$K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \kappa^4 + \dots + \left[\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \right]^2 \kappa^{2r} + \dots \right\} \quad (19)$$

$$E(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\kappa^4}{3} - \dots - \left[\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \right]^2 \frac{\kappa^{2r}}{2r-1} - \dots \right\} \quad (20)$$

また、引き数 κ は次式で定義される。

$$\kappa^2 = \frac{4rp}{(r+p)^2 + \bar{z}^2} \quad (21)$$

その結果、変位および表面力は以下のように求めることができる。

$$u_r = u_r = 0 \quad (22)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\mu} \frac{r\bar{z}}{(r^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \quad (23)$$

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \frac{r^2 + 2\bar{z}^2}{(r^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \quad (24)$$

$$\sigma'_r = \sigma'_z = 0 \quad (25)$$

$$\tau'_{rz} = \tau'_{rz} = 0 \quad (26)$$

$$\sigma'_r = -\frac{3}{2} \frac{r^2 \bar{z}}{(r^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} \quad (27)$$

$$\tau'_{rz} = \tau'_{rz} = -\frac{3}{2} \frac{r\bar{z}^2}{(r^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} \quad (28)$$

$$\sigma'_z = -\frac{3}{2} \frac{\bar{z}^3}{(r^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} \quad (29)$$

3.2.b ソース点が積分要素内に在る場合 軸対称以外の境界要素法では、ソース点と観測点とが一致した場合に起こる特異積分について、通常剛体変位条件を用いて間接的に評価する。ところが、軸対称問題で

図8 軸対称問題での母線境界とソース点及び観測点

は、軸対称体の対称軸上で r 方向の速度が0（湧き出しが無い場合）であるために剛体変位条件を用いることができない。そこで、本研究では特異積分を直接的に評価する方法を用いて計算する⁷⁾。以下にその際的基本解を示す。なお、式中の R と δ は、ソース点 $\vec{P}(y^i, y^i_2)$ と観測点 $\vec{Q}(x_1, x_2)$ との距離 $\vec{d}(d_1, d_2)$ を表す式(図9参照)。

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \vec{Q} - \vec{P} = \frac{\xi - \xi_i}{2} \{ (\xi + \xi_i - 1) \vec{x}^1 - 2(\xi + \xi_i) \vec{x}^2 + (\xi + \xi_i + 1) \vec{x}^3 \} = \frac{\xi - \xi_i}{2} \vec{R} = \frac{\xi - \xi_i}{2} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\vec{R} = (\xi + \xi_i - 1) \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} - 2(\xi + \xi_i) \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + (\xi + \xi_i + 1) \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

より、

$$r = \left| \frac{\xi - \xi_i}{2} \right| R = |\delta| R, R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \delta = \frac{\xi - \xi_i}{2} \quad (32)$$

である。ここで、 ξ は積分要素内の $(-1 \leq \xi \leq 1)$ の正規座標、 ξ_i はソース点の正規座標で実際には二次要素の場合($\xi_i = -1, 0, 1$)である。

$$u_r = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{rp\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ -2[(r+p)^2 + \bar{z}^2] + \frac{R_1^2(r+p)^2 + R_2^2(r^2 + p^2)}{R^2} \right\} E(\kappa) + (r^2 + p^2 + 2\bar{z}^2) K(\kappa) \quad (33)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{R_2}{p\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{R_1(r+p) + \delta R_2^2}{R^2} E(\kappa) - \delta K(\kappa) \right\} \quad (34)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{R_2}{r\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{R_1(r+p) - \delta R_2^2}{R^2} E(\kappa) + \delta K(\kappa) \right\} \quad (35)$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \frac{R_2^2}{R^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right\} \quad (36)$$

また、付録2, 3に表面力に関する解を示す。

4. 解析結果及び考察

4.1 時間に対するメニスカス界面先端の位置 ここでは、時間に対するメニスカス界面先端の位置について計算結果と実験結果を比較して、本解析結果の妥当性を検討する。

計算条件は、二次元流れ、軸対称流れ共に板の初期すき間 $h_0=1.0\text{mm}$ 、板の引き離し速度 $V_s=1.0\text{mm/min}$ 、表面張力 $T=21.2\text{mN/m}$ 、それぞれ板の長さ $B_0=30.0\text{mm}$ 、円板の半径 $R_0=30.0\text{mm}$ とした。そして、流体の粘度は $\mu=3.12\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、 $105.0\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、前者は二次元流れ、後者は二次元と軸対称流れについて計算を行なった。

図10、図11は時間に対するメニスカス界面先端の位置を各粘度に対して示したものである。縦軸は界面先端の x あるいは r 座標である。また、シリコンオイルを用いた実験結果も一緒に記した。実験の概要は省略する。図11には前報の解析結果もあわせて示した。これらの図より、二次元流れ、軸対称流れ共に解析と実験はほぼ一致していることがわかり、本解析方法の妥当性を確認できる。また、図11より二次元の方が軸対称よりも空気の進入度が大きい様子がわかる。また、本報および前報の解析結果は実験結果に対して最大4%以内で一致した。このことより前報の簡略化した解析モデルはすき間に対する板の長さの比 B_0/h_0 が大きい場合には妥当であったと言える。しかし、メニスカス先端のみの領域（すき間の3倍の長さ）を解析する前報のモデルは、 B_0/h_0 が小さくなってくると適用できない。このことは特に曲率半径の小さい円板間の流れ（曲率半径の小さい乱れに対応）を解析する場合に問題となる。本解析法では問題とはならない。

4.2 時間に対するメニスカス界面の形状

メニスカス界面の時間に対する移動の様子をシミュレートした結果を図12～14に示す。ここで、計算条件は4.1と同じである。これらの図より、板のすき間が時間と共に大きくなるにつれて、ほぼ一様な残留液膜を形成しながらメニスカス界面が進展していく様子がわかる。また、二次元流れについて、粘度によって移動メニスカスの挙動が異なる様子がわかる。これは、図12のように粘度が低い場合には、板面に残留する液膜が薄くなるためにより多くの流体がすき間の中心へ集まって空気の進入を妨げるためと考えられる。逆に図13のように粘度が高い場合には、板に残留する液膜が厚くなるので、空気の進入速度が大きくなると考えられる。これらのことから、板面に形成される残留液膜の厚さの違いが自由表面の移動に影響することがわかる。

4.3 すき間が周期的に変化する場合の界面形状

すき間が周期的に変化する場合の界面形状について4.2と同じ条件に対してシミュレートした。解析ではすき間が初期すき間に対して1.12倍になった時点で速度を反転した。シミュレートの結果を図13に示す。なお、14秒後の時点では、板のすき間は初期すき間以下になっている。界面が押し戻されると、粘度の違いにより大

図9 二次要素内のソース点と観測点

図10 $\mu=3.12\text{Pa}\cdot\text{s}$ の場合の界面先端の経時変化

図11 $\mu=105.0\text{Pa}\cdot\text{s}$ の場合の界面先端の経時変化

(a) 二次元流れ, $\mu=3.12\text{Pa}\cdot\text{s}$

(b) 二次元流れ, $\mu=105.0\text{Pa}\cdot\text{s}$

図12 時間に対する界面の移動の様子

きい違いが見られる。

4.4 Hele-Shawセルとの比較

Hele-Shawセルとは、すき間が狭く一定の平行平板間に作られるセルのことである。Hele-Shawセルの研究では、後述のように残留液膜の厚さと界面の圧力は理論および実験の両面から求められている。しかし、本研究では、すき間の間隔が時間に対して変化する。そこで、本研究の残留液膜や圧力にHele-Shawセルでのそれらの関係を用いる

図13 周期的にすき間が変化する場合の界面形状

ことができるかどうか調べる必要がある。

Parkらは, Hele-Shawセルの研究で残留液膜の厚さ m とメニスカス界面の圧力をキャピラリ数 C_a の関数として次のように導いた^{(8),(9)}。

$$m = m_0(C_a) + m_1(C_a) \frac{h}{2\rho} \quad (C_a \leq 1) \quad (37)$$

$$p - p_a = \frac{2T}{h} \kappa_0(C_a) + \frac{T}{\rho} \kappa_1(C_a) \quad (38)$$

ここで, h は板のすき間, ρ は自由表面の板幅方向の曲率半径, p はメニスカス先端部の圧力, p_a は大気圧, κ は圧力の係数である。

図15, 図16に二次元流れおよびHele-Shawセルに対する残留液膜厚さの比と圧力係数をキャピラリ数に対して示す。二次元流れでは, $\rho \rightarrow \infty$ より上の2式の m_1 と κ_1 を含む項は無視できることから, 比較は m_0 と κ_0 について行う。計算条件は表1のとおりである。

これらの図より, 本解析結果がHele-Shawセルの結果と定性的に一致しているが, 定量的には若干異なっていることがわかる。定性的に一致したのは, 本研究における流れもHele-Shawセル内の流れもStokes流れであり, 本研究では時間に対してすき間が変化しているとはいえ, 板の引き離し速度に対してメニスカスの移動速度が非常に大きいと考える。また両者の差は, 前報⁽¹⁾とほぼ同程度なものであることから, 前報⁽¹⁾の単純化したモデルでも妥当な結果が得られていたことが推察される。前述した, Parkらの式は摂動法により求められたものであり, 自由表面が板のすき間方向および幅方向に凸である場合を扱っており, 実際のメニスカス不安定現象のシミュレーションのようにメニスカスの曲率の符号が大きく変わる場合に上式を用いることは困難である。したがって, 式(37)および式(38)の第2項目に関しては, 検討の余地があると考えられる。そこで, ここでは $\rho \rightarrow \infty$ の結果と比較する意味を含めて, 図15, 図16に示したのと同様な方法で軸対称解析の結果を

図14 時間に対する界面の移動の様子
(軸対称流れ, $\mu=105.0\text{Pa}\cdot\text{s}$)表1 Hele-Shawセルと比較のための計算データ一覧
(板の長さ $B_0=30.0\text{mm}$ で共通)

記号	粘度 $\mu (\text{Pa}\cdot\text{s})$	初期すき間 $h_0 (\text{mm})$	引き離し速度 $V_s (\text{mm/min})$
○	3.12	1.0	1.0
■	3.12	1.0	3.0
◇	10.5	1.0	1.0
▲	21.0	1.0	1.0
□	105.0	2.0	0.5

図15 キャピラリ数に対する, 残留液膜の厚さの
すき間に対する比(二次元流れ)

図16 キャピラリ数に対する圧力の係数(二次元流れ)

整理した結果を図17, 図18にそれぞれ示す。計算条件は, 流体の粘度 $\mu=105.0\text{Pa}\cdot\text{s}$, 板の初期すき間 $h_0=1.0\text{mm}$, 板の引き離し速度 $V_s=1.0\text{mm/min}$, 表面張力 $T=21.2\text{mN/m}$ で, 円板の半径 R_0 は5.0, 10.0, 30.0mmの3種類である。これらの図より, 両者とも二次元流れの結果と近い値を示していることがわかる。また, 特に円

図17 キャピラリ数に対する、残留液膜の厚さのすき間に対する比(軸対称流れ)

図18 キャピラリ数に対する圧力の係数(軸対称流れ)

板半径5.0と10.0mmの結果を比較するとキャピラリ数の関数だけでなく、明らかに R_0 の関数でもあることがわかる。

5. 結 言

本論文では、平行二平板間の狭いすき間に粘性流体を挟んで板を引き離れた時の移動メニスカスを境界要素法によりシミュレートした。解析モデルは無限巾帯板内の二次元流れと、円板内の軸対称流れの2つである。ここで、二次元流れについては、Stokes近似に対する基本解を、また軸対称流れについては三次元Stokes近似の基本解より導いた軸対称基本解および境界要素法の特異積分を直接評価するための基本解を用いてそれぞれ計算した。解析および実験における移動するメニスカス界面の経時変化について比較した。その結果、両者はほぼ一致し、本解析方法の妥当性を確認した。また、すき間に対する板幅(板半径)の比が大きい場

合には前報の⁽¹⁾簡略化したメニスカス先端領域のみの解析モデルの結果と全領域を解析した本結果はよく一致した。しかし、前報のモデルは、 B_0/h_0 が小さくなってくると適用できないという問題がある。また、二次元流れの残留液膜の厚さおよび圧力係数はHele-Shawセルに対するものと定性的に一致した。また、軸対称解析の結果は自由表面の曲率の影響を受けているものの、その値は二次元流れの結果に近いことがわかった。

文 献

- (1) 古口・丸山・矢田, 機論, **58**-547, B(1992), 758.
- (2) Pearson, J. R. A., J. Fluid. Mech., **7** (1960), 481.
- (3) Dalmaz, G., Trans. ASME, J. Lub. Tech., **102** (1980), 466.
- (4) Savage, M. D., J. Fluid. Mech., **80** (1977), 743.
- (5) Savage, M. D., J. Fluid. Mech., **80** (1977), 757.
- (6) 増本, 深道, アモルファス合金 その物性と応用, (1982), 284, アグネ社.
- (7) 田中, 松本, 中村, 境界要素法, (1991), 67, 培風館.
- (8) Park, C. W. and Homsy, G. M., J. Fluid Mech., **139**(1984), 291.
- (9) Reinelt, D. A., J. Fluid. Mech., **183** (1987), 219.

付 録 1

$$\sigma_r' = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{r^2 p \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \left[3(r+p)^2 + \bar{z}^2 \right] + \frac{9\bar{z}^4 - 3(r^2 - p^2)^2 - 6\bar{z}^2(r^2 - p^2)}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} + \frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]^2} [(r+p)^3(p-r)^3 - \bar{z}^6 + \bar{z}^2(r^2 - p^2)(r^2 - p^2 + \bar{z}^2)] \right\} E(\kappa) + \left\{ 3(r^2 - p^2) - 9\bar{z}^2 - \frac{(r+p)^3(p-r)^3 - \bar{z}^6 + \bar{z}^2(r^2 - p^2)(r^2 - p^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right\} K(\kappa) \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付1})$$

$$\tau_{rz}' = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{z}}{rp \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ -\frac{6\bar{z}^2}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} + \frac{4[\bar{z}^4 - (r^2 - p^2)^2](r^2 + p^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]^2} \right\} E(\kappa) + \left\{ 3 - \frac{\bar{z}^4 - (r^2 - p^2)^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right\} K(\kappa) \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付2})$$

$$\sigma_z' = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \left[\frac{3\bar{z}^2}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} + \frac{4\bar{z}^2(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)(p^2 - r^2 - \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]^2} \right] E(\kappa) - \left[\frac{\bar{z}^2(p^2 - r^2 - \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right] K(\kappa) \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付3})$$

$$\sigma_r'' = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{z}}{r^2 \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \left[\frac{6(p^2 - r^2 + \bar{z}^2)}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} - \frac{4(p^2 - r^2 + \bar{z}^2)^2(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]^2} \right] E(\kappa) + \left[-3 + \frac{(p^2 - r^2 + \bar{z}^2)^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right] K(\kappa) \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付4})$$

$$\tau_{rz}'' = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ \left[\frac{3\bar{z}^2}{(r-p)^2 + \bar{z}^2} + \frac{4\bar{z}^2(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)(r^2 - p^2 - \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]^2} \right] E(\kappa) + \left[\frac{\bar{z}^2(p^2 - r^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right] K(\kappa) \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付5})$$

$$\sigma_z^i = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{z}}{\sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \left\langle \left\{ -\frac{4\bar{z}^2(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right\} E(\kappa) + \left\{ \frac{\bar{z}^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2][(r-p)^2 + \bar{z}^2]} \right\} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付6})$$

付 録 2

$$\begin{aligned} \sigma_r^i = & \frac{1}{8\pi r^2 p \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ 3\delta[(r+p)^2 + \bar{z}^2] + \frac{9\delta^3 R_2^4 - 3\delta(r+p)^2 R_1^2 - 6\delta^2(r+p) R_1 R_2^2}{R^2} \right. \right. \\ & + \frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)[-(r+p)^3 R_1^3 - \delta^3 R_2^6 + \delta(r+p) R_1 R_2^2 \{\delta R_2^2 + (r+p) R_1\}]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \Bigg\} E(\kappa) \\ & + \left. \left\{ 3\delta^2(r+p) R_1 - 9\delta^3 R_2^2 - \frac{[-\delta^2(r+p)^3 R_1^3 - \delta^5 R_2^6 + \delta^3(r+p) R_1 R_2^2 \{\delta R_2^2 + (r+p) R_1\}]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} \right\} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付7}) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\tau_r^i}{\tau_z^i} \right) = \frac{1}{4\pi r p \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ -\frac{6\delta^2 R_2^2}{R^2} + \frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)[\delta^2 R_2^4 - (r+p)^2 R_1^2]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \right\} E(\kappa) + \left\{ 3\delta^2 - \frac{\delta^4 R_2^4 - \delta^2(r+p)^2 R_1^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} \right\} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付8})$$

$$\sigma_z^i = \frac{1}{2\pi p \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ \frac{3\delta R_2^2}{R^2} + \frac{4R_2^2(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)[-\delta R_2^2 - (r+p) R_1]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \right\} E(\kappa) - \frac{\delta^3 R_2^2[-\delta R_2^2 - (r+p) R_1]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付9})$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^i = & \frac{1}{4\pi r^2 \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ \frac{6[-\delta(r+p) R_1 + \delta^2 R_2^2]}{R^2} - \frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)[-(r+p) R_1 + \delta R_2^2]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \right\} E(\kappa) \right. \\ & + \left. \left\{ -3\delta^2 + \frac{[-\delta(r+p) R_1 + \delta^2 R_2^2]^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} \right\} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付10}) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\tau_r^i}{\tau_z^i} \right) = -\frac{1}{2\pi r \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ \frac{3\delta R_2^2}{R^2} + \frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2)[(r+p) R_1 - \delta R_2^2] R_2^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \right\} E(\kappa) + \frac{\delta^2 R_2^2[-(r+p) R_1 + \delta R_2^2]}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付11})$$

$$\sigma_z^i = \frac{1}{\pi \sqrt{(r+p)^2 + \bar{z}^2}} \frac{1}{\delta} \left\langle \left\{ -\frac{4(r^2 + p^2 + \bar{z}^2) R_2^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^4} \right\} E(\kappa) + \frac{\delta^2 R_2^2}{[(r+p)^2 + \bar{z}^2] R^2} K(\kappa) \right\rangle \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付12})$$

付 録 3

ノース点が対称軸上に位置した場合の基本解を求めると、式(33)～(36)、式(付7)～式(付12)は以下ようになる。

$$u_n = \frac{1}{4\mu R^2} \frac{\bar{z}^2 R_2^2 - r^2 R_2^2}{(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付13}) \quad u_\sigma = \frac{1}{8\mu R^2} \frac{R_1 R_2 \{r + \delta R_1\}}{r \sqrt{r^2 + \bar{z}^2}} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付15})$$

$$u_n = \frac{R_2}{8\mu R^2} \frac{5r^2 R_1 + 2\bar{z}^2 R_1 - 5\delta r R_1^2 - 2\delta r R_2^2}{(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付14}) \quad u_\sigma = \frac{1}{4\mu R^2} \frac{R_1^2 + 2R_2^2}{\sqrt{r^2 + \bar{z}^2}} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^i = & \frac{1}{16r^2(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{5}{2}} R^4} \left\{ 2\delta^2 r^4 R_1^5 + 30\delta^2 r^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^5 + 3\delta^2 \bar{z}^4 R_1^5 - 4\delta r(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1^4 + 16\delta r \bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^4 - 5\delta^3 r^3 R_1^4 R_2^2 \right. \\ & - 65\delta^3 r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^4 R_2^2 - 16r^2(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1^3 + 23\delta^2 r^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^3 R_2^2 + 5\delta^4 \bar{z}^2 R_1^3 R_2^4 - 12r^4(r^2 + \bar{z}^2) R_1^3 + 5\delta^2 r^4 R_1^3 R_2^2 + 5\delta^5 r R_1^2 R_2^6 \\ & + 41\delta r(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1^2 R_2^2 - 73\delta^3 r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 R_2^4 - 5\delta^3 r^3 R_1^2 R_2^4 + 7\delta r^3(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 R_2^2 - 2\delta^4(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^6 + 6\bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1 R_2^2 \\ & + 2r^2 \bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^2 - 5\delta^4 r^4 R_1 R_2^6 - 2\delta^2 \bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^4 - 2\delta r \bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2) R_2^4 + 24\delta r(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_2^2 - 29\delta^3 r(r^2 + \bar{z}^2) R_2^6 + 5\delta^5 r R_2^8 \Big\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_r^i}{\tau_z^i} \right) = & \frac{R_2}{8r(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{5}{2}} R^4} \left\{ 23\delta^2 r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^4 + 5\delta^2 r^3 R_1^4 - 3\delta(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1^3 - \delta r^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^3 - 13r(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1^2 - 11r^3(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 \right. \\ & + 2r \bar{z}^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 + 14\delta^2 r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 R_2^2 - 5\delta^4 r R_1^2 R_2^4 + 5\delta^2 r^3 R_1^2 R_2^2 + \delta^3(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^4 + 4\delta^2 r(r^2 + \bar{z}^2) R_2^4 - 5\delta^4 r R_2^6 \Big\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^i = & \frac{R_2^2}{4(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{5}{2}} R^4} \left\{ 6\delta^2 r^2 R_1^3 + \delta^2 \bar{z}^2 R_1^3 + 14\delta r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 + 5\delta^3 r R_1^2 R_2^2 - 8(r^2 + \bar{z}^2)^2 R_1 + \delta^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^2 \right. \\ & + 5\delta^2 r^2 R_1 R_2^2 - 12r^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1 + 2\delta r(r^2 + \bar{z}^2) R_2^2 + 5\delta^3 r R_2^4 \Big\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^i = & -\frac{R_2}{8(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}} r^2 R^4} \left\{ 2\delta^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^4 + \delta^2 \bar{z}^2 R_1^4 + 2\delta^3 r R_1^3 R_2^2 + 6\delta r(r^2 + \bar{z}^2) R_1^3 - \delta^4 R_1^2 R_2^4 - \delta^2 r^2 R_1^2 R_2^2 \right. \\ & + 4r^2(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 + 2\delta^3 r R_1 R_2^4 - 2\delta r(r^2 + \bar{z}^2) R_1 R_2^2 - \delta^4 R_2^6 + \delta^2(r^2 + \bar{z}^2) R_2^4 \Big\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付20}) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\tau_r^i}{\tau_z^i} \right) = \frac{R_2^2}{4r(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}} R^4} \left\{ \delta^2 r R_1^3 - \delta^3 R_1^2 R_2^2 - 3\delta(r^2 + \bar{z}^2) R_1^2 + \delta^2 r R_1 R_2^2 - 4r(r^2 + \bar{z}^2) R_1 - \delta^3 R_2^4 + \delta(r^2 + \bar{z}^2) R_2^2 \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付21})$$

$$\sigma_z^i = \frac{R_2^3}{2(r^2 + \bar{z}^2)^{\frac{3}{2}} R^4} \left\{ \delta^2 R^2 - 4(r^2 + \bar{z}^2) \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (\text{付22})$$