有限要素法による平面壁上の複数突起列
まわりの流れの数値解析*瀬尾 省三^{*1}, 岡本 史紀^{*2}, 鈴木 大地^{*3}Numerical Analysis of Flow over Rows of Two-Dimensional Ribs
on Plane Wall Using FEM

Shozo SEO, Shiki OKAMOTO and Daichi SUZUKI

This paper describes numerical analysis for the flow behavior in the groove related to the turbulence of the flow over rows of two-dimensional ribs on the ground plane for various values of S/D using a finite-element method. In this analysis, the two-dimensional Navier-Stokes equation was formulated on stream function ψ and vorticity ω by the Galerkin method. The value of stream function at each time was calculated using a sub-implicit scheme. As a result, it was found that the results of the numerical analysis were close to those of the flow visualization using a water channel, and that this analysis was adequate to investigate the flow over rows of two-dimensional ribs on the ground plane. It was also confirmed that stable vortices were existent in the grooves for $S/D \leq 5$ and the vortices were unstable behind the ribs for $S/D \geq 7$.

Key Words: Finite-Element Method, Numerical Analysis, Streamline, Square Ribs, Elliptic Ribs, Pitch Ratio, Vortex, Reattachment Point, Flow Visualization

1. 緒 言

壁面上の突起列まわりの流れは伝熱工学の分野においても利用され、壁面上の突起列により早期に乱流を実現する手法は伝熱促進技術の一つとして多く研究されている。突起付き伝熱面の従来の研究の多くは突起列まわりの流れの構造の流体力学的研究を十分に行わないで、熱伝達係数と圧力損失の関係をマクロ的に調べることに限られている⁽¹⁾⁽²⁾。しかしわずかではあるが、流れの構造を調べたものもあり⁽³⁾⁽⁴⁾、これらは突起間隔比に限られた場合で、突起間隔比の変化に対して系統的に調べたものは見あたらない。著者らは平面壁上の二次元突起列について突起間隔の変化による突起列まわりの流れを実験的に詳細に調べた。その結果、正方形突起列では突起列まわりの流れの乱れ強さは突起列を突起間隔比 $S/D=9$ でならべるとき最大となる⁽⁵⁾。さらに突起形状、突起間隔比を変えて比較を行うと伝熱促進体としては正方形突起より半円状突起の方が適しており、半円状突起を $S/D=7$ の間隔

比でならべると、熱伝達係数は最大になることを明らかにした⁽⁶⁾。また、突起列まわりの流れは二次元突起間の谷部内の流れの様子、特に渦の挙動と密接に関係することが明らかになった。

本研究では、突起列を越す流れに影響を及ぼす突起間谷部内の流れの挙動と突起間隔比の関係について解析を行う。流れの解析手法には差分法によるものと有限要素法によるものに大別されるが、差分法は計算速度や記憶容量の節約の面では使いやすい反面、分割要素の大きさの均一化のため複雑な形状への適応性の面に難があり、曲面をモデル化するのに多数の分割が必要となり、記憶容量の面でも問題が生じてくる。それに対し、有限要素法では分割要素の大きさは自由でありモデル化しやすい。したがって、種々の突起間隔比(S/D)に対する平面壁上の正方形断面および半円断面をもつ二次元突起列まわりの流れの解析は有限要素法を用いて行い、その計算結果を回流水槽による実験結果と比較検討した。

記 号

 D : 二次元突起の高さ Re : レイノルズ数 $= U_0 D / \nu$ S : 突起の中心間距離

* 原稿受付 平成5年7月22日。

^{*1} 正員, 東芝モノフラスクス(株) (●289-02 千葉県香取郡神崎町武田20-8)。^{*2} 正員, 芝浦工業大学 (●108 東京都港区芝浦3-9-14)。^{*3} 学生員, 芝浦工業大学大学院。

t : 時間
 U_0 : 入口流速
 V_s : 境界 Γ_2 に沿う流速
 Γ : 境界 ($=\Gamma_1+\Gamma_3$ あるいは $=\Gamma_2+\Gamma_4$)
 Γ_1, Γ_3 : 基本境界条件が設定されている境界
 Γ_2, Γ_4 : 自然境界条件が設定されている境界
 ψ, ψ_0 : 流関数, 境界 Γ_1 における流関数値
 $\omega, \omega_0, \omega_n$: 渦度, 境界 Γ_3 における渦度, および境界 Γ_4 における渦度の法線方向微分

2. 有限要素法流れ解析

2.1 二次元非圧縮性粘性流れの方程式 非圧縮性粘性流れ解析を行うときの支配方程式は, Navier-Stokes の式で与えられる. 解析するモデルは二次元突起列であるため, 二次元粘性流れの Navier-Stokes の式を使用する.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 U \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 V \quad (2)$$

ここに U, V は x, y 軸方向の流速成分, P は圧力, ρ は密度であり, ν は動粘性係数である. これらの 2 式から圧力項を消去すると渦度方程式が得られる.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3)$$

ここに

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4)$$

流関数の定義式

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

から式(3)は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (6)$$

となる. 式(4)と流関数の定義から

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (7)$$

を得る. これら式(6), (7)より ψ と ω の解が求まる.

2.2 数値解法 流関数 ψ と渦度 ω の離散化に Galerkin 法を適用して得られる要素方程式をすべての要素について重ね合わせれば領域全体の離散化方程式が作成できる.

$$[D]\psi - [M]\omega - \Gamma_2 = 0 \quad (8)$$

$$[M]\omega + [A]\psi + \nu[D]\omega - \Gamma_4 = 0 \quad (9)$$

$[D], [M], [A]$ は要素方程式の係数マトリックスを全要素について重ね合わせた全体マトリックスである. Γ_2, Γ_4 は自然境界条件を与えるためのベクトル量であ

る.

n 段階めの時刻 t_n における流関数と渦度を (ψ^n, ω^n) で表し, $n+1$ 段階めの時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における流関数と渦度を $(\psi^{n+1}, \omega^{n+1})$ で表す.

時間に関する渦度の微分を近似して

$$\dot{\omega} \approx \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} \quad (10)$$

この式を用いて式(8), (9)を 1 段階陰的スキームに置き換える.

$$[D]\psi^{n+1} - [M]\omega^{n+1} = \Gamma_2^{n+1} \quad (11)$$

$$[M] \frac{\omega^{n+1}}{\Delta t} + \{\nu[D] + [A(\psi^{n+1})]\} \omega^{n+1} = [M] \frac{\omega^n}{\Delta t} + \Gamma_4^{n+1} \quad (12)$$

これを陰的スキームの性格を残しながら左辺の係数行列が対称であるようにすることを考える.

式(11)の $[M]\omega^{n+1}$ を $[M]\omega^n$ に置き換え, 式(12)の非対称行列を含む移流項 $[A(\psi^{n+1})]\omega^{n+1}$ を $[A(\psi^n)]\omega^n$ に置き換えて移項した「準陰的スキーム」を作成する.

$$[D]\psi^{n+1} = [M]\omega^n + \Gamma_2^{n+1} \quad (13)$$

$$[M] \frac{\omega^{n+1}}{\Delta t} + \nu[D]\omega^{n+1} = [M] \frac{\omega^n}{\Delta t} - [A(\psi^{n+1})]\omega^n + \Gamma_4^{n+1} \quad (14)$$

上式は完全な陰的スキームに比べて計算時間の節約ができた, 時間ステップ Δt が陽的スキームに比べて大きくできるが, 今回の解析においては陽的スキームの安定条件であるクーラン条件を満たすことを目安とした. 式(13), (14)の連立方程式をバンドマトリックス法によって解き, ψ^n, ω^n の解を時間を追って求めた.

2.3 解析モデルおよび有限要素分割 本研究で計算対象とした正方形突起列モデルは $S/D=3, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ であり, 解析モデルの要素分割図を図 1 に示す. 要素は流れの変化が激しいと思われる突起周辺を細かく, 変化が比較的緩やかな流路上方は粗に分割した. 総要素数は $S/D=3$ の 2240 個から $S/D=17$ の

図 1 有限要素分割図

3 584 個とした。

計算は $Re=500, 1\,000, 2\,000$ の 3 種類について行った。

2・4 境界条件 流関数 ψ と渦度 ω に関する境界条件は流関数 ψ に関して境界 $\Gamma(\Gamma_1+\Gamma_2)$ 上で

$$\left. \begin{aligned} \psi_B &= \psi_0 & (x, y \in \Gamma_1) \\ \partial\psi/\partial n|_B &= -V_s & (x, y \in \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

渦度 ω に関して境界 $\Gamma(\Gamma_3+\Gamma_4)$ 上で

$$\left. \begin{aligned} \omega_B &= \omega_0 & (x, y \in \Gamma_3) \\ \partial\omega/\partial n|_B &= \omega_n & (x, y \in \Gamma_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで添字 B は境界上に与えられている量, および n

図 2 突起間隔比による流線の変化 ($Re=1\,000$)

は境界に対する法線という意味をそれぞれ表す。入口には U_0 の一様速度分布が存在すると仮定し、それより計算される上部境界における流関数値を上部境界値 ϕ_0 とし、入口および上部境界における渦度は $\omega_0=0$ とした。壁面条件として流関数値は $\phi_0=0$ 、渦度 ω_0 は渦度法、すなわち

$$\omega_0 = -\frac{3}{l^2} (\phi_N - \phi_B) - \frac{\omega_N}{2} \dots\dots\dots (17)$$

ϕ_B : 壁面における流関数

ϕ_N : 壁面に隣接する節点における流関数

ω_N : 壁面に隣接する節点における渦度

l : 壁面と隣接節点との距離

により処理した。また、出口条件としては流れは拘束されることなく流出するものとし、すなわち $V_s=0$, $\omega_n=0$ とした。

3. 解析結果

図2に $Re=1000$, $S/D=3, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ の場合における正方形突起列まわりの流れの突起間隔比による変化を流線を用いて示した。 $S/D=3$ の場合では時間が経過しても谷部内に移動しない安定渦が生成されていることがわかる。また $S/D=5$ の場合になると時間の経過につれて、多少の形の変化はあるが、ほぼ谷部内に静止しているとみなせる安定渦の存在が明らかに見られる。さらに S/D の値を増し、 $S/D \geq 7$ の場合では谷部内に存在する渦は時間とともに下流方向に移動する。このように $S/D \leq 5$ と $S/D \geq 7$ の場合では谷部内における渦の挙動が明らかに異なることが示されている。また谷部内における渦の大きさに注目すると、 $S/D \geq 7$ では下流方向に移動する渦が存在し、 $S/D=9$ 付近で渦の大きさは最大になり、さらに S/D の値を増し $S/D=13, 17$ になるとその大きさは減少するこ

図3 突起間隔比による流線の変化 ($Re=500$)

とが明らかである。また、レイノルズ数を変えた $Re=500, 2000$ の場合でも図 3, 4 に示すように $S/D=7$ ($Re=500$), $S/D=9$ ($Re=2000$) 付近で谷部内の渦の大きさは明らかに最大となる。次に半だ円状突起列まわりの流れについて調べる。図 5 に $Re=500$, $S/D=5, 7, 9, 11, 13, 17$ の場合における長軸が短軸の長さの 2 倍の長さをもつ半だ円状突起列まわりの流れの突起間隔比による変化を流線を用いて示した。 $S/D=5$ の場合では時間が経過しても谷部内に移動しない安定渦が生成されていることがわかる。 $S/D \geq 7$ の場合では谷部内に存在する不安定な渦は時間とともに下流方向に移動する。このように半だ円状突起の場合も正方形突起の場合と同様に $S/D \leq 5$ と $S/D \geq 7$ の場合では谷部内における渦の挙動が明らかに異なることが示されている。また谷部内における渦の大きさに注目してみると、 $S/D=7$ 付近で渦の大きさは最大になり、 S/D の値を増し $S/D=13, 17$ になるとその大きさは減少することがわかる。

4. 実験結果との比較検討

平面壁上の連続した正方形二次元突起列の谷部内での流れの様子を調べるために、回流水槽を用いて流れの可視化実験を行った。図 6 は $Re=500$, (a) $S/D=2$, (b) $S/D=5$, (c) $S/D=9$, (d) $S/D=11$ の場合の上流側突起後方に生ずる渦の様子を示す。図 6(a) の $S/D=2$ の場合は谷部内に小さい安定渦が生じており、図 6(b) の $S/D=5$ の場合では谷部内の底面に再付着しない大きな安定渦が谷部全体を占めている。さらに図 6(c) の $S/D=9$ の場合では、上流側突起後方に渦が生じ、その渦の長さは約 $4D$ であり、再付着流れは下流に流れていく様子が示されている。図 6(d) の $S/D=11$ の場合では $S/D=9$ のときに比べて渦の大きさは減少することが明らかである。これらの水槽実験の結果は図 3 の $Re=500$ の場合の $t=4, 6$ の場合の数値計算結果に近い。したがって前述の解析方法が平面壁上の連続した正方形二次元突起列まわりの流

図 4 突起間隔比による流線の変化 ($Re=2000$)

次に平面壁上の連続した半だ円状二次元突起列の谷部内部の流れの様子を調べるために図 7 に $Re=500$, (a) $S/D=5$, (b) $S/D=7$, (c) $S/D=9$, (d) $S/D=11$ の場合の上流側突起後方に生ずる渦の様子を示す。図 7(a)の $S/D=5$ の場合は谷部内に小さい安定渦が

(a) $S/D=2$ (b) $S/D=5$ (c) $S/D=9$ (d) $S/D=11$

図 6 上流側正方形突起後方に生ずる渦の可視化

生じており、図 7(b)の $S/D=7$ の場合では上流側突起後方に大きな不安定な渦を生じ、下流に流出する様子が示されている。また図 7(c), (d)の $S/D=9, 11$ の場合には、流出する大きな不安定な渦の大きさは $S/D=7$ の場合より多少減少しており、その渦は下流側突起前方で消滅することがうかがえる。これらの結果は正方形突起の場合と同様、図 5 の計算結果に近いことが明らかである。

以上のことより次の結果が得られる。突起列を越す流れを支配する重要な因子である谷部内の流れの挙動は $S/D \leq 5$ では谷部全体を占める安定渦が生成され、 $S/D \geq 7$ になると、谷部内の渦は下流に流出する不安定な渦であると思われる。また、層流の場合の数値計算の結果によると正方形突起の場合 $Re=500$ では $S/D=7$, $Re=1000, 2000$ では $S/D=9$, 半だ円状突

(a) $S/D=5$ (b) $S/D=7$ (c) $S/D=9$ (d) $S/D=11$

図 7 上流側半だ円状突起後方に生ずる渦の可視化

起の場合、 $Re=500$ で $S/D=7$ のときに、上流側突起後方に生ずる谷部内の渦の大きさが最大となり、 S/D の値をさらに増すと渦の大きさは段々減少する。

5. 結 論

本研究によって得られた結果を要約すれば次のとおりである。

(1) 数値計算の結果は回流水槽を用いた可視化実験の結果に近いことがわかった。したがって本解析方法は平面壁上の正方形二次元突起列まわりの流れを検討するうえで妥当なものであることが確認された。

(2) 正方形二次元突起列まわりの流れは $S/D \leq 5$ の場合では谷部内に安定渦が存在し、 $S/D \geq 7$ になると上流側突起後方では下流に流出する不安定な渦になるという数値計算は実験結果によって裏付けられ

た。

(3) 数値計算の結果によれば, 上流側突起後方に生ずる谷部内の渦の大きさは正形状突起の場合 $Re=500$ では $S/D=7$, $Re=1\,000$, $2\,000$ では $S/D=9$, また半だ円状突起では $Re=500$ で $S/D=7$ のとき最大となり, S/D の値をさらに増すと減少することが明らかになった。

文 献

- (1) Nunner, W., *VDI-Forschungsh.*, **455**(1956), 1.
- (2) Webb, R. L., Eckert, E. R. G. and Goldstein, R. J., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **14**(1971), 601.
- (3) 森・土方・石黒, 機論, **51**-461, B(1985), 160.
- (4) Ichimiya, K., Yokoyama, M. and Shimomura, R., *Proc. ASME/JSME Thermal Eng. Joint Conf.*, **1**(1983), 359.
- (5) 岡本・中楚・河合, 機論, **57**-541, B(1991), 2918.
- (6) 岡本・瀬尾・森下・佐藤, 機論, **59**-563, B(1993), 2238.