自由対流境界層の安定性に及ぼす一様な吸込み吹出し効果*
(一様熱流束の場合)渡 邊 喬^{*1}, 黒 澤 由 貴^{*2}, 星 野 聡^{*3}Effect of Uniform Suction or Injection on Stability
of Free-Convection Boundary Layer
(Case of Uniform Heat Flux)

Takashi WATANABE, Yoshitaka KUROSAWA and Satoshi HOSHINO

The effect of uniform suction or injection on the stability of free-convection boundary layer over a vertical uniform flux plate is theoretically investigated. The characteristics of the free-convection boundary layer flow with uniform suction or injection are calculated. The perturbation equation describing the temporal evolution of the disturbances is solved numerically for the velocity and temperature profiles obtained, and the stability curves are presented for various values of suction/injection parameters. The critical Grashof number G_c increases when the suction parameter increases, while G_c decreases when injection parameter increases. This implies that the free-convection boundary layer with uniform suction becomes stable.

Key Words: Free Convection, Stability, Numerical Analysis, Uniform Heat Flux, Uniform Suction or Injection, Vertical Flat Plate

1. 緒 言

層流自由対流境界層の安定性の問題は Plapp⁽¹⁾ によって行われ, 体積力の項に依存する温度を介して, 運動方程式およびエネルギー式を連立させて解析している。しかし, その解は運動方程式のみを考慮したものである。その後, Nachtsheim⁽²⁾, Knowles-Gebhart⁽³⁾ および Gebhart⁽⁴⁾ らは運動方程式とエネルギー式を連立させて安定問題を解いている。安定問題を数値的に解析する場合, 自由対流境界層の速度および温度に関する諸特性が必要になる。垂直平板に沿う自由対流境界層については, Schmidt-Beckmann⁽⁵⁾ 以来多くの研究がなされ^{(6)~(9)}, 垂直平板からの自由対流に対する質量伝達の影響に関する研究もなされてきている^{(10)~(12)}。

本研究においては, 一様熱流束をもつ垂直平板に沿う自由対流境界層の安定性に及ぼす一様な吸込み吹出しの影響を理論的に解析する。はじめに, 一様な吸込み吹出しの作用する垂直平板に沿う自由対流境界層の

諸特性を, 十分な精度で明らかにした。次に, その結果を用いて, 種々の吸込み吹出し係数における中立安定曲線ならびに臨界グラスホフ数の変化などを明らかにし, 境界層の安定性を考察した。

2. 記 号

 a : 温度伝導率 $C = C_r + iC_i$ C_r : 位相速度 C_i : 増幅度 G : 修正グラスホフ数 [式(32)] Gr_x : 熱流束で定義したグラスホフ数 [式(6)] k : 熱伝導率 Pr : プラントル数 q : 伝熱面の熱流束 s : 吸込み吹出し係数 [式(13)] U_e : 代表速度 [式(32)] v_0 : 吸込み吹出し速度 α : 波数 β : 流体の体膨張係数 δ : 代表長さ [式(32)] $\epsilon(\eta)$: じょう乱温度の振幅関数 [式(27)] $\phi(\eta)$: じょう乱流れの振幅関数 [式(26)]

* 原稿受付 平成5年7月7日。

^{*1} 正員, 岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。^{*2} 学生員, 岩手大学大学院。^{*3} 東京電力柏崎外羽原子力発電所 (〒945-03 柏崎市青山町16-46)。

3. 層流自由対流境界層

図1に示すように、温度 T_∞ の静止流体中の垂直平板に沿う層流自由対流に一様な吸込み吹出しが作用した場合の流れを考える。壁面に沿って x 軸、それに垂直に y 軸をとり、 x 軸および y 軸方向の速度成分をそれぞれ u, v とし、流体温度を T 、体膨張係数 β 、動粘度 ν 、温度伝導率 a および熱伝導率を k とする。平板表面の熱流束 q は一様であり、一様な吸込みおよび吹出し速度 v_0 が作用している。流体は非圧縮性で浮力項の密度 ρ 以外の物性値を一定とすると、境界層内の連続の式、運動方程式およびエネルギー式は次のようである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

また、境界条件は次式となる。

$$y=0: u=0, v=v_0, -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=q$$

$$y \rightarrow \infty: u=0, T=T_\infty \quad (4)$$

いま、流線関数 $\phi(x, y)$ を次のようにおく。

$$\phi(x, y) = 5\nu \left(\frac{Gr_x}{5}\right)^{1/5} f(\eta) \quad (5)$$

ここで、無次元変数 η および熱流束で定義したグラスホフ数 Gr_x を次式で定義する。

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{5}\right)^{1/5}, Gr_x = \frac{g\beta qx^4}{k\nu^2} \quad (6)$$

これより、速度成分 u および v は次式となる。

$$u = 5\nu \left(\frac{Gr_x}{5}\right)^{2/5} \frac{df}{d\eta} \quad (7)$$

$$v = -5\nu \left(\frac{Gr_x}{5}\right)^{1/5} \left(\frac{1}{5} \frac{1}{Gr_x} \frac{dGr_x}{dx} f\right)$$

図1 垂直平板に沿う自由対流と座標系

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

次に、温度 T を次式で表す。

$$\theta(x, \eta) = \frac{T - T_\infty}{xq/k} \left(\frac{Gr_x}{5}\right)^{1/5} \quad (9)$$

式(7)~(9)を式(2)および式(3)に代入すると、次の偏微分方程式(10)、(11)が導かれる。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + 4f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 3\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \theta = 5x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 4f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} = 5x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (11)$$

また、境界層条件(4)は次式となる。

$$\eta=0: \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, \frac{4}{5}f + x \frac{\partial f}{\partial x} = s, \frac{\partial \theta}{\partial \eta}=1$$

$$\eta \rightarrow \infty: \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, \theta=0 \quad (12)$$

ここに、 s は吸込み吹出し係数で次式で定義する。

$$s = -\frac{v_0 x}{5\nu} \left(\frac{5}{Gr_x}\right)^{1/5} \quad (13)$$

v_0 は一様な吸込み吹出し速度で $v_0 < 0 (s > 0)$ で吸い込み、 $v_0 > 0 (s < 0)$ で吹出しを表す。いま、 s を X で表し、 $X = nx^{1/5} (=s)$ とおくと n は定数となり、式(10)および式(11)は次式(14)および式(15)で表すことができる。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (4f + X \frac{\partial f}{\partial X}) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 3\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 - X \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \theta = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (4f + X \frac{\partial f}{\partial X}) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - X \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad (15)$$

また、境界条件(12)は次式となる。

$$\eta=0: \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, 4f + X \frac{\partial f}{\partial X} = 5X, \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -1$$

$$\eta \rightarrow \infty: \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, \theta=0 \quad (16)$$

ここで、 X を間隔 h で分割し、 $X = X_i = ih (i=0, 1, 2, \dots)$ における導関数を Gregory-Newton の後退差分のうち四点公式を用いると式(14)および式(15)は常微分方程式で表され、 $X = ih$ における解は次の積分方程式となる。

$$\frac{df_i}{d\eta} = \int_0^\eta E(\eta) \int_0^\eta \frac{R(\eta)}{E(\eta)} d\eta d\eta - \left\{ \int_0^\infty E(\eta) \int_0^\eta \frac{R(\eta)}{E(\eta)} d\eta d\eta \right\} \frac{G(\eta)}{G(\infty)} \quad (17)$$

$$f_i = ih + \int_0^\eta \frac{df_i}{d\eta} \dots\dots\dots (18)$$

$$\theta_i = \int_0^\eta P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta - Q(\eta) \\ - \int_0^\infty P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta - Q(\infty) \dots\dots\dots (19)$$

ここに,

$$E(\eta) = \exp \left[- \int_0^\eta \left\{ 4f_i - \frac{i}{6} (11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \dots\dots\dots (20)$$

$$R(\eta) = \frac{i}{6} \left(11 \frac{df_i}{d\eta} - 18 \frac{df_{i-1}}{d\eta} + 9 \frac{df_{i-2}}{d\eta} - 2 \frac{df_{i-3}}{d\eta} \right) \frac{df_i}{d\eta} - \theta_i + 3 \left(\frac{df_i}{d\eta} \right)^2 \dots\dots\dots (21)$$

$$G(\eta) = \int_0^\eta E(\eta) d\eta \dots\dots\dots (22)$$

$$P(\eta) = \exp \left[- \int_0^\eta \left\{ 4Pr f_i - \frac{iPr}{6} (11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \dots\dots\dots (23)$$

$$S(\eta) = \frac{iPr}{6} (11\theta_i - 18\theta_{i-1} + 9\theta_{i-2} - 2\theta_{i-3}) \frac{df_i}{d\eta} + Pr\theta_i \frac{df_i}{d\eta} \dots\dots\dots (24)$$

$$Q(\eta) = \int_0^\eta P(\eta) d\eta \dots\dots\dots (25)$$

方程式(17)～(19)を繰返し計算⁽¹²⁾により求め、得られた速度分布 $f' (= df/d\eta)$ および温度分布 θ をプラントル数 $Pr=0.73$ の場合につき、吸込み吹出し係数 s をパラメータにとり図2および図3に示す。

4. 自由対流境界層の安定性

層流自由対流境界層に微小変動が生じた場合の境界層の安定性を考える。自由対流の安定性解析においては、速度と温度のじょう乱を同時に考える必要があり、じょう乱の流れ関数および温度を次のようにおく。

$$\bar{\phi}(x, y, t) = \delta U_e \phi(\eta) e^{i\bar{\alpha}(x - \bar{c}t)} \dots\dots\dots (26)$$

$$\bar{T}(x, y, t) = \frac{q\delta}{k} \epsilon(\eta) e^{i\bar{\alpha}(x - \bar{c}t)} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $\phi(\eta)$ および $\epsilon(\eta)$ は速度および温度じょう乱の振幅を表す。 $\bar{\alpha}$ は波数、 $\bar{C}$ は複素数で $\bar{C} = \bar{C}_r + i\bar{C}_i$ を表し、実部 $\bar{C}_r$ は位相速度、虚部 $\bar{C}_i$ は振幅の増幅率を示す。このとき、変動波の振幅関数 $\phi(\eta)$ および $\epsilon(\eta)$ に関する変動方程式は、次式で表される。

$$(f' - C)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - f'' \phi \\ = \frac{1}{i\alpha G} (\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi + \epsilon') \dots\dots\dots (28)$$

$$(f' - C)\epsilon - \theta' \phi = \frac{1}{i\alpha G Pr} (\epsilon'' - \alpha^2 \epsilon) \dots\dots\dots (29)$$

また、境界条件は次式となる。

$$\eta=0: \phi=0, \phi'=0, \epsilon'=0 \text{ または } \epsilon=0$$

$$\eta \rightarrow \infty: \phi=0, \phi'=0, \epsilon=0 \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $(\prime)$ は η に関する微分を表す。境界条件(30)において $\eta=0$ における $\epsilon'(0)=0$ は熱容量が零の場合で、壁が非常に薄い加熱膜に相当する。後述の図12に示されている Polymeropoulos ら⁽¹⁵⁾の薄い加熱膜の実験によると、基礎流は一様熱流束状態の流れであることは確かめられているが、一様熱流束に対応する境界条件 $\epsilon'(0)=0$ の数値解とは異なるデータが得られた。このことは、基礎流は熱流束一定の場合であるが、熱容量は有限の値をもち、壁面の温度変動を弱めていることを示す。このことより、ここでは境界条件として $\epsilon'(0)=0$ のほかに、熱容量が無限大で等温壁に対応する $\epsilon(0)=0$ についても求める。また、無次元数は次のように定義している。

$$\left. \begin{aligned} f(\eta) &= \phi(x, y)/U_e \delta \\ \theta(\eta) &= (T - T_\infty)/(q\delta/k) \\ \alpha &= \bar{\alpha}\delta, C = \bar{C}/U_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、修正グラスホフ数 G 、代表長さ δ および代表速度 U_e を次式で表す。

$$G = 5(Gr_x/5)^{1/5}, \delta = 5x/G, U_e = \nu G^2/5x \dots\dots\dots (32)$$

図2 層流境界層の速度分布 ($Pr=0.73$)

図3 層流境界層の温度分布 ($Pr=0.73$)

変動方程式(28), (29)を境界条件(30)のもとに解くことは一つの固有値問題である。式(28), (29)はプラントル数 Pr , グラスホフ数 Gr_x , 波数 α および角振動数 $C(=C_r+iC_i)$ の適切な値の組合せに対してのみ解をもつ。式(26), (27)に示すように, その解において $C_i=0$ のときは中立安定状態となり, $C_i<0$ で流れは安定, $C_i>0$ で不安定となる。ここでは, 式(28)および式(29)の解法としてシューティング法を用いる⁽¹³⁾。解法の手順は, 初めに境界層の特性 f', f''' および θ' を式(17)~(19)を用いて算出し, パラメータ Pr, Gr_x, α にある値を入れ, 固有値 C_r および C_i に推定値を与えて式(28), (29)を Adams-Moulton 法を用いて境界層の外側から壁面に向かって積分する。ここで壁面上での境界条件が十分な精度で得られるまで C_r および C_i を変化させて計算を繰返す。

5. 数値計算結果および考察

数値計算例として, プラントル数 $Pr=0.73$ で熱容量が零, すなわち境界条件(30)において $\epsilon'(0)=0$ の場合と, 熱容量が大きい場合, すなわち境界条件(30)において $\epsilon(0)=0$ の場合について修正グラスホフ数 G および吸込み吹出し係数 s を種々変化させて計算を行った。

5.1 熱容量が零の場合 [$\epsilon'(0)=0$ のとき]

図4には, プラントル数 $Pr=0.73$, グラスホフ数 $G=40$ における位相速度 C_r の値を吸込み吹出し係数 s をパラメータにとり, 波数 α との関係で示す。位相速度 C_r は吹出し割合が大きくなると増大し, 吸込割合が大きくなると減少する。また, C_r は波数 α および G が大きくなるにしたがい減少する。図5には, プラントル数 $Pr=0.73$, グラスホフ数 $G=40$ における増幅度 C_i と α の関係を吸込み吹出し係数 s をパラメータにとり示す。吹出し割合が大きくなると増幅度 C_i は増大し, 吸込割合が大きくなると C_i は減少する。同様にして, 吸込み吹出し係数 s およびグラスホフ数 G を種々変化させて増幅度 C_i と波数 α の関係を求め, それより, α と G との関係で示す中立安定曲線を吸込み吹出し係数 s をパラメータにとり図6に示す。安定領域は吸込割合が大きくなるにしたがい広がり, 吹出し割合が大きくなると狭まる。また, 波数 α が大きくなると安定領域は増大し, $\alpha>0.6$ ではすべての位置で安定となる。

5.2 熱容量が大きい場合 [$\epsilon(0)=0$ のとき]

図7および図8には, プラントル数 $Pr=0.73$, 吹出し係数 $s=-0.1$ の場合の固有値, すなわち位相速度 C_r および増幅度 C_i の値を修正グラスホフ数 G をパラメ

図4 固有値 C_r と波数 α の関係 [$\epsilon'(0)=0, G=40$]

図5 固有値 C_i と波数 α の関係 [$\epsilon'(0)=0, G=40$]

図6 中立安定曲線 [$\epsilon'(0)=0$]

図7 固有値 C_r と波数 α の関係 [$\epsilon(0)=0, s=-0.1$]

ータにとり波数 α との関係で示す。また、図 9 および図 10 には $Pr=0.73$, $G=70$ の場合の固有値 C_r および C_i の値を吸込み吹出し係数 s をパラメータにとり表している。位相速度 C_r は吸込割合が大きくなると減少し、吹出し割合が大きくなると増大する。また、 C_r はグラスホフ数 G および波数 α が大きくなるにしたがい減少する。

吹出し割合が大きくなると増幅度 C_i は増大し、吸込割合が大きくなると C_i は減少する。同様に吸込み吹出し係数 s およびグラスホフ数 G を種々変化させたときの固有値 C_i と波数 α の関係を算出し、それよ

図 8 固有値 C_i と波数 α の関係 [$\epsilon(0)=0$, $s=-0.1$]

図 9 固有値 C_r と波数 α の関係 [$\epsilon(0)=0$, $G=70$]

図 10 固有値 C_i と波数 α の関係 [$\epsilon(0)=0$, $G=70$]

り s をパラメータにとり α と G との関係で示す中立安定曲線を求め図 11 に示す。図 11 における点線は G の臨界値 G_c とそのときの波数 α_c を示しており、その数値を表 1 に示す。吸込み吹出しの作用しない場合の臨界値 $G_c=75.5$ に対し、吸込割合が大きくなると安定領域は増大し吸込係数 $s=0.2$ においては臨界値 G_c は 190.6 となる。これとは逆に吹出し割合が大きくなると安定領域は小さくなり、吹出し係数 $s=-0.2$ においては臨界値 G_c は 36.1 となる。

図 12 には、図 6 および図 11 で求めた境界条件 $\epsilon'(0)=0$ および $\epsilon(0)=0$ における中立安定曲線と Polymeropoulos らの非連立解⁽¹⁴⁾ と実験値⁽¹⁵⁾ を同時に示し、中立安定曲線上の各点におけるじょう乱速度およびじょう乱温度の振幅分布を図 13 から図 16 に示

表 1 臨界値 G_c とその波数 α_c

s	G_c	α_c
0.2	190.6	0.210
0.1	116.8	0.208
0.0	75.5	0.200
-0.1	51.2	0.200
-0.2	36.1	0.190
-0.3	26.3	0.190
-0.4	19.8	0.188
-0.5	15.3	0.183

図 11 中立安定曲線 [$\epsilon(0)=0$]

図 12 中立安定曲線

図 13 じょう乱速度の振幅関数 [$\epsilon'(0)=0, s=0$]
(記号 A~D は図 12 の各位置を示す)

図 15 じょう乱速度の振幅関数 [$\epsilon(0)=0, s=0$]
(記号 a~d は図 12 の各位置を示す)

図 14 じょう乱温度の振幅関数 [$\epsilon'(0)=0, s=0$]
(記号 A~D は図 12 の各位置を示す)

図 16 じょう乱温度の振幅関数 [$\epsilon(0)=0, s=0$]
(記号 a~d は図 12 の各位置を示す)

す。図 13~16 の振幅分布は最大値が 1.0 になるように正規化されている。また、図 13~16 中の $\eta_{\max}$ および $\eta_{\inf}$ の記号は、それぞれ基礎流の速度分布の最大値の位置および変曲点の位置を表し、 $\eta_{\max}$ より壁面側を内部層、外側を外部層と呼ぶことにする。

図 12 において、境界条件 $\epsilon(0)=0$ における非連立解は $\alpha > 0.4$ の範囲では連立解に漸近的に近づくが $\alpha < 0.4$ においては異なってくる。したがって、温度じょう乱と速度じょう乱を結合させて解くことは波数 α の小さい範囲においては不安定点に大きな影響を及ぼすことがわかる。一方、 $\epsilon'(0)=0$ の境界条件における解は G の非常に小さい値で不安定になることを示しているが、これは、図 14 に示すように、壁面温度の変動に励起・共振されるためである。

なお、図 12 に示す本計算で得られた中立安定曲線は Knowles ら⁽³⁾ の計算結果に重なっている。

図 13 から図 16 に示すように $\epsilon'(0)=0$ の境界条件の場合は、内部・外部層の温度変動と外部層の速度変動が不安定性に影響を及ぼすことが推測され、 $\epsilon(0)=0$ の境界条件の場合は、外部層の温度および速度変動

と、 $\alpha \cdot G$ の大きい所では内部層の速度変動も不安定性に影響を及ぼすことが考えられる。また、速度じょう乱および温度じょう乱の振幅分布の最大値の位置は温度および速度分布の変曲点付近に現れ、変曲点が流れの不安定性に大きな影響を及ぼすことがわかる。

6. 結 言

垂直平板からの熱流束一様な場合の自由対流に対し、一様な吸込み吹出しが作用する境界層を理論的に解析した。はじめに、一様な吸込み吹出しの作用する自由対流境界層の諸特性を十分な精度で算出した。次に、得られた境界層の諸特性を用いて安定線図を求め、境界層の安定性に及ぼす一様な吸込み吹出しの影響を調べた。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 位相速度 C_r は吹出し割合が大きくなると増大し、吸込割合が大きくなると減少する。また、グラスホフ数および波数が大きくなると C_r は減少する。

(2) 吹出し割合が大きくなると増幅度 C_i は増大し、吸込割合が大きくなると C_i は減少する。また、グラスホフ数が大きくなると C_i は増大する。

(3) 熱容量が大きい場合は、吸込み吹出しを作用させた場合も波数 $\alpha=0.2$ 前後において臨界グラスホフ数 G_c が存在する。臨界グラスホフ数 G_c は吸込割合が増大すると大きくなり、流れの安定領域は増大し、吹出し割合が増大すると G_c は小となり、流れの安定領域は狭くなる。吸込み吹出しの作用しない場合の $G_c=75.5$ に対し、吸込係数 $s=0.2$ の場合は $G_c=190.6$ 、吹出し係数 $s=-0.2$ の場合は $G_c=36.1$ となる。

(4) 熱容量が零の場合は、波数 α が大きくなるにしたがい、グラスホフ数 G は増大し、安定領域は増大する。また、波数 α が 0.6 より大きくなると吸込み吹出しを作用させた場合にも流れはすべての領域で安定となる。吸込み吹出しの変化による流れの安定領域は熱容量が大きい場合と同様、吸込割合が大きくなると増大し、吹出し割合が大きくなると減少する。

(5) 速度および温度分布の変曲点が流れの不安定性に大きな影響を及ぼす。

おわりに、本研究に対し有益な助言をいただいた東北大学 小林陵二教授に感謝の意を表す。また、本研

究に協力された岩手大学技官 金子昌晴君、久保田恒夫君に謝意を表す。

文 献

- (1) Plapp, J. E., *J. Aeronaut. Sci.*, **24**(1957), 318.
- (2) Nachtsheim, P. R., *NASA Tech. Note*, D-2089(1963).
- (3) Knowles, C. P. and Gebhart, B., *J. Fluid Mech.*, **34**(1968), 657.
- (4) Gebhart, B., *Trans. ASME, Ser. C.*, **91**(1969), 293.
- (5) Schmidt, E. and Beckmann, W., *Forsch. Ing. - Wes.*, **1**(1930), 391.
- (6) Yang, K. T., *Trans. ASME, Ser. E*, **82**(1960), 230.
- (7) Sparrow, E. M., Tsou, F. K. and Kurts, E. F., *Phys. Fluids*, **8**(1965), 1559.
- (8) Eichhorn, R., *J. Heat Transf.*, **82C**(1960), 260.
- (9) Sparrow, E. M. and Cess, R. D., *J. Heat Transf.*, **81C**(1961), 387.
- (10) Merkin, J. H., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15**(1972), 989.
- (11) Parikh, P. G., Moffat, R. J., Kays, W. M. and Ber-shader, D., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **17**(1974), 1465.
- (12) 渡邊・川上, 機論, **55-519**, B(1989), 3365.
- (13) 小林, 機論, **46-410**(1980), 1900.
- (14) Polymeropoulos, C. E. and Gebhart, B., *AIAA J.*, **4**(1966), 2066.
- (15) Polymeropoulos, C. E. and Gebhart, B., *J. Fluid Mech.*, **30**(1967), 225.