飽和多孔質体内での自然対流の三次元数値解析*
(対流パターンの安定性)増田 善雄*¹, 木村 繁男*¹, 林 一夫*²Three-Dimensional Numerical Analysis of Natural Convection
in a Saturated Porous Matrix
(Stability of Convection Patterns)

Yoshio MASUDA, Shigeo KIMURA and Kazuo HAYASHI

Three-dimensional natural convection heat transfer in a saturated porous cube heated from below is analyzed by a finite-element method. The Rayleigh numbers between 50 and 140 are considered. When the Darcy-modified Rayleigh number is high, the convection pattern can take various modes in the cube for a given value of the Rayleigh number. It is found that the convection modes of (1, 0, 1) and (1, 1, 1) are the only stable ones below $Ra=100$. Moreover, the (1, 0, 2) mode also becomes stable when Ra is greater than 100. The other modes, however, are unstable at $50 \leq Ra \leq 100$ in spite of the fact that the corresponding Rayleigh numbers exceed critical values according to the linear stability theory. The Nusselt numbers for respective stable modes are also calculated.

Key Words: Natural Convection, Heat Transfer, Porous Media, Convection Pattern, Numerical Solution, Finite Element

1. 緒 言

多孔質体内での流動や伝熱の研究は現在さまざまな角度から研究がなされている⁽¹⁾。その応用分野として代表的なものに地熱貯留層内の熱解析が挙げられる。地熱貯留層内のき裂を有する岩体を多孔質体とみなしき裂内を流れる熱水の流動やそれに伴う熱の移動を理解することは、地熱の可採量を増大するために欠かせない技術である。この場合貯留層内に自然対流が存在していれば、熱移動は促進され地熱可採量の増大につながる。また天然地熱貯留層の形成と地表面での熱流束異常との関係⁽²⁾や、地下帯水層による蓄熱およびその利用⁽³⁾を考えるうえにおいても多孔質体内の自然対流を理解することは欠かせない。

多孔質体内での自然対流熱伝達についての基礎的な問題として閉空間内での下方加熱の場合による問題が挙げられる。この場合レイリー数がある一定の値以上になると取り得る対流パターンが複数存在することに

なり、そのときの対流パターンの変化の様子や、そのパターンの安定性等の問題はたいへん興味のあるところである⁽³⁾⁽⁴⁾。Platzman⁽⁵⁾は取り得る対流パターンが二つ以上あるときにはヌッセルト数の大きいほうのパターンが安定して存在すると主張した。これに対してStrausら⁽⁴⁾はガラーキン法による数値解析により初期値の選択によってヌッセルト数のより小さいパターンを導くことが可能、つまり初期値への依存度が大きいことを示した。またKimura⁽⁶⁾は疑似スペクトル法により二次元ロール形対流の安定性を調べた際、同じレイリー数に対して異なる初期値により複数の対流モードが安定して存在可能であることを示した。

著者らは地熱貯留層内の熱移動の解析を目的とした数値解析プログラムを開発し、それを二次元での自然対流の解析に応用することによりいくつかの知見を得た⁽⁷⁾。本研究ではそのプログラムを三次元に拡張し立方体内での多孔質体内の自然対流を解析し、対流パターンの安定性等について検討した。

おもな記号

d : 代表長さ m
 h : 重力の加速度 ($=9.8 \text{ m/s}^2$)
 h : 比エンタルピー J/kg

* 平成4年9月30日 第70期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成5年6月28日。

*¹ 正員、東北工業技術研究所 (〒983 仙台市宮城野区苦竹4-2-1)。

*² 正員、東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

H : 熱伝達率 $= -\lambda(dT/dx)/\Delta T$ $W/(m^2 \cdot K)$

k : 透水性 m^2

Nu : 平均ヌッセルト数 $= Hd/\lambda$

p : 圧力 Pa

T : 無次元温度

T' : 温度 K

t : 時間 s

ΔT : 温度差 $= T'_h - T'_c$

Ra : レイリー数 $= g\beta\Delta Tdk/\alpha\nu$

u : 流速 m/s

α : 飽和多孔質体の温度拡散率 $= \lambda_w/\rho_w c_w \times \phi + \lambda_r/\rho_r c_r \times (1-\phi)$ m^2/s

β : 体膨張率 K^{-1}

λ : 流体および多孔質体の熱伝導率 $W/(m \cdot K)$

μ : 粘性係数 $Pa \cdot s$

ν : 動粘度 m^2/s

ρ : 密度 kg/m^3

τ : 無次元時間 $= ta/d^2$

ϕ : 間げき率

添 字

c : 低温壁

h : 高温壁

r : 多孔質体

w : 流体

2. 基礎式および計算方法

未知数を圧力 p と比エンタルピー h とし、有次元のまま取扱った。多孔質体内の流動なので Darcy 則が成立するものとする。多孔質体は等方かつ一様で流体によって飽和されているものとし、そして流体は非圧縮性で Boussinesq 近似が成り立つとすると、連続式および運動方程式はそれぞれ次のように表すことができる。

$$\left(\frac{k}{\mu}\right)\nabla^2 p - \left(\frac{k}{\mu}g\frac{\partial \rho^*}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial t} - \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial h}\right)\nabla^2 h - \left(\frac{k}{\mu}\rho\right)\nabla h \cdot \nabla p + \left(\frac{k}{\mu}\rho\right)\rho^*g\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで E は内部エネルギーであり、 $(\partial E/\partial p)$ はこの場合無視できるほど小さい。また h の関数として扱われる密度は ρ^* としている。実際の地熱貯留層内の計算を行う際にはき裂などの複雑な形状への適応も考える必要があるため、解析手法としては有限要素法を用いた。なおこの方法は地熱貯留層解析に使われる一般的な方法である⁽⁸⁾。誤差が 0.1% 以下になるまで繰返し計算をし、時間微分に関しては完全陰解法を用いた。境界条件は上下面は一定温度で上面は T_c 下面は T_h ($T_h > T_c$) 側面はすべて断熱面とする。なお今回の解析では立方体つまり $x:y:z=1:1:1$ の場合についてのみ行った。用いた物理モデルと座標系を図 1 に示す。

3. 基礎理論

まず線形安定性理論による解析を行う。立方体内の対流パターンを表すのには、既往の論文⁽⁴⁾に従って x, y, z 軸での対流パターンのフーリエ係数のインデックスを用いて表すことにする。意図するモードの対流を発生させるため無次元温度の初期値を次のように与える。

$$T = 1 - z + a \sin n\pi z \cos j\pi x \cos m\pi y \quad (a \text{ は定数}) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで a はさまざまに変えて計算した結果、 $a=0.5$ のときに最もよく、ねらった対流パターンに収束したため a はこの値に固定した。意図する対流が発生した

図 1 物理モデルと座標系

表 1 各対流モードにおける臨界レイリー数

Convection mode	Critical Rayleigh number
(1, 0, 1)	39.478
(1, 0, 2)	61.685
(1, 0, 3)	109.662
(1, 1, 1)	44.413
(1, 1, 2)	71.061
(1, 1, 3)	119.422
(1, 2, 2)	99.930
(1, 2, 3)	148.803

場合、対流のモードは ' (n, j, m) 形' というように表される(さまざまなモードの対流は図 2, 3 等を参照)。これら各モードの臨界レイリー数は次のように表される。

$$Ra = \frac{\pi^2(n^2 + j^2 + m^2)^2}{(j^2 + m^2)^2} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)から $n=1$ と固定した各対流モードでの臨界レイリー数は表 1 のように表すことができる。これらの臨界レイリー数を越えたところではそのパターンの対流が発生する可能性がある。

このためレイリー数が 50 から 140 までの場合について各対流モードが安定的に存在するか、そしてそのときの熱伝達特性はどうなっているかということにつ

いて計算を行った。

4. 計算結果

計算を行ったところ、レイリー数が 100 より小さい場合には(1, 0, 1)形の対流と(1, 1, 1)形の対流のみが安定して存在し、それ以外の(1, 0, 2)形や(1, 1, 2)形などは臨界レイリー数を越えていたとしても安定して存在しなかった。つまり初期値として式(3)のような温度場を与えても他のモードへ変化してしまう。レイリー数が 100 以上になると(1, 0, 2)形についても安定して存在することが確認された。レイリー数が 100 の場合の、安定して存在する(1, 0, 1)、(1, 1, 1)、(1, 0, 2)の 3 種類の温度分布の状態を図 2 に示す。このこと

(a) (1, 0, 1)形

(b) (1, 1, 1)形

(c) (1, 0, 2)形

図 2 $Ra=100$ における安定して存在する各対流モードでの温度分布

(a) $r=0.13158[-]$

(b) $r=0.81107[-]$

(c) $r=2.0277[-]$

図 3 $Ra=70$ における(1, 0, 2)形から(1, 0, 1)形への温度分布の時間変化

から Kimura⁽⁶⁾ が疑似スペクトル法による数値解析から結論づけたように、初期値の設定によって複数の対流パターンが安定的に得られることが明らかになった。なお図 2 から (1, 0, 1) 形と (1, 0, 2) 形は二次元的な対流であるが、(1, 1, 1) 形は三次元的な対流であることがわかる。

これらの 3 種類以外のモードはレイリー数が 140 までの範囲ですべて不安定であり、時間がたつにつれ他のモードへ遷移してしまう。この遷移の様子をいくつか示す。図 3 はレイリー数が 70 の場合に (1, 0, 2) 形の温度場を初期値として計算したときに不安定な (1, 0, 2) 形から安定な (1, 0, 1) 形へと移行変わる様子である。この場合、 $\tau=0.131\ 58$ では (1, 0, 2) 形を保ってい

るが、 $\tau=0.811\ 07$ ではこのかたちが大きくくずれ、最終的には (1, 0, 1) 形に収束する、という様子がわかる。図 4 はレイリー数が 100 の場合に初期値として (1, 1, 2) 形を用いた場合に、安定な (1, 0, 1) 形へと移行変わっていく様子を示している。この場合 $\tau=0.131\ 58$

(a) $\tau=0.131\ 58[-]$

(b) $\tau=0.540\ 71[-]$

(c) $\tau=1.351\ 8[-]$

図 4 $Ra=100$ における (1, 1, 2) 形から (1, 0, 1) 形への温度分布の時間変化

(a) $\tau=0.040\ 55[-]$

(b) $\tau=0.054\ 07[-]$

(c) $\tau=0.067\ 59[-]$

(d) $\tau=0.135\ 18[-]$

図 5 $Ra=120$ における (1, 1, 2) 形から (1, 0, 1) 形への温度分布の時間変化

図 6 安定して存在する対流パターンにおけるレイリー数とヌッセルト数の関係

において生じている図 4 中の左面の上昇流が、時間がたつにつれて弱まってしまい ($\tau=0.54071$), 最終的には (1, 0, 1) 形に収束する。この場合図 4 中の右面の対流はさほど大きく崩れることはない。しかしレイリー数が 120 (図 5) のときには、同じように (1, 1, 2) 形から (1, 0, 1) 形へと移り変わっていく場合でもその遷移の状態は大きく異なっている。 $\tau=0.04055$ では (1, 1, 2) 形であった対流パターンが $\tau=0.05407$ では左右両面とも崩れだし、 $\tau=0.06759$ では (1, 0, 1) 形に近づいてくる。そして $\tau=0.13518$ では完全に (1, 0, 1) 形に収束する。上昇流が起こっている面(ここでは左面)での対流パターンが崩れて最終的に二次元的な対流パターンになる様子は興味深い。

なお今回の計算で安定して存在した対流のモードでのレイリー数とヌッセルト数の関係を図 6 に示す。図 6 からレイリー数が 100 以下の場合には (1, 0, 1) 形のほうが (1, 1, 1) 形の場合よりヌッセルト数が大きくなっているが、レイリー数がより大きくなると (1, 1, 1) 形の場合のほうが大きくなる。Platzman⁽⁵⁾ はこのよ

うな場合ヌッセルト数の大きい系のほうがより安定であると主張した。するとこの場合レイリー数が 100 よりやや大きいところで (1, 0, 1) 形よりも (1, 1, 1) 形のほうが安定であるといえる。今回の計算においても、レイリー数が 100 以下の場合には (1, 1, 2) 形のような不安定な対流パターンはすべて (1, 0, 1) 形へと変わり、(1, 1, 1) 形には収束しなかった。しかしレイリー数が 130 以上の場合には (1, 1, 1) 形に収束する場合もみられた。このことから対流の安定性にはヌッセルト数も関係していることが明らかになった。

5. 結 言

立方体内の飽和多孔質対内自然対流の三次元数値解析を行った。その結果、レイリー数が 100 より小さい場合には (1, 0, 1) 形と (1, 1, 1) 形の対流パターンが安定であり、100 以上になると (1, 0, 2) 形も安定になることが確認できた。それ以外の対流パターンは臨界レイリー数を超えていても不安定な存在であることがわかった。またこのときの熱伝達特性についても明らかにした。このことから Platzman の主張のようにヌッセルト数のより大きいパターンのほうが安定であるが、Straus や Kimura の数値計算結果と同様に複数の対流パターンが存在可能なとき対流パターンは初期値に依存する部分が大きいことが明らかになった。

文 献

- (1) 増岡, 伝熱研究, **28**-108 (1989), 147.
- (2) Kimura, S., ほか 1 名, *J. Phys. Earth*, **36** (1988), 185.
- (3) 木村, 地下水学会誌, **33** (1992), 215.
- (4) Straus, J. M., ほか 1 名, *J. Fluid Mech.*, **103** (1981), 23.
- (5) Platzman, G. W., *J. Fluid Mech.*, **23** (1965), 481.
- (6) Kimura, S., *Numerical Methods in Thermal Problems*, **VI** (1989), 462, Pineridge Press.
- (7) 増田・ほか 2 名, 機論, **57**-544, B (1991), 4203.
- (8) 林・ほか 1 名, 日本地熱学会誌, **11** (1989), 43.