三次元立方体内自然対流の指数関数形 Petrov-Galerkin 有限要素解析*

角田 和彦^{*1}, 川原 祐子^{*2}, 登坂 宣好^{*1}

Petrov-Galerkin Finite Element Approach Using Exponential Test Functions for Three-Dimensional Natural Convection in Cubic Enclosure

Kazuhiko KAKUDA, Yuko KAWAHARA and Nobuyoshi TOSAKA

Recently, we presented a finite element scheme based on the Petrov-Galerkin weak formulation using exponential test functions, for solving the unsteady two-dimensional natural convection up to high Rayleigh numbers. The incompressible Navier-Stokes equations and energy equation are discretized by a semi-explicit scheme in which velocity and temperature are treated explicitly and pressure is treated implicitly with respect to the time variable. As the time-marching scheme, the fractional step method is also adopted in the work. The resulting numerical solutions demonstrate that the method is capable of solving the set of equations accurately and in a stable manner up to high Rayleigh numbers. The purpose of this paper is to extend the Petrov-Galerkin finite element method using exponential test functions, to three-dimensional natural convection problems. The validity of the present method is shown for unsteady flows in a cubic enclosure through comparison with other existing numerical solutions.

Key Words: Petrov-Galerkin Weak Formulation, Finite Element Method, Exponential Test Functions, Fractional Step Method, Three-Dimensional Natural Convection, Cubic Cavity, Unsteady Flow

1. 緒 言

自然界で観察される流れには非常に興味深い現象が数多くあり、そのほとんどが三次元の非定常現象である。その三次元非定常流れ現象のメカニズムを解明することは重要な課題の一つである。近年のコンピュータの性能向上により、熱流体を含むより複雑で現実的な流れの現象が数値的に解析されるようになってきた。その中でも、キャビティ内の自然対流現象は熱流体問題に関するベンチマーク問題としてよく知られており⁽¹⁾、これまで主として二次元仮定に基づく解析が多数行われてきた^{(1)~(11)}。しかし、三次元自然対流の解析は現実的な流れを再現するのにもかかわらず、その報告例は二次元解析に比べて極めて少ない。

Mallinson-de Vahl Davis⁽¹²⁾ は三次元キャビティ内自然対流の差分解析を通し、種々のパラメータ (Rayleigh 数 $10^4 \leq Ra < 10^6$, Prandtl 数 $0.1 \leq Pr \leq 100$, キャビティのアスペクト比) に関する流れの三次元効果およびその構造を明らかにした。また、彼らは二次元仮定の妥当性についても検討した。Hal-

denwang-Labrosse⁽¹³⁾ はスペクトル法により高 Rayleigh 数での二次元および三次元キャビティ内自然対流の定常解析を行い、 $10^6 \sim 10^{7.5}$ の Rayleigh 数域では二次元および三次元の数値結果は一致するとの報告をしている。また、三次元立方体内自然対流の乱流解析に対し、2 方程式 ($k \sim \epsilon$) モデルによる差分解析は Ozoe ら⁽¹⁴⁾ によって提示された。le Peutrec-Lauriat⁽¹⁵⁾ は立方体内自然対流の非定常問題を差分スキームにより解析し、特に、垂直壁に熱損失がある場合の流れへの影響を詳細に検討した。しかし、上記の文献のほとんどは定常状態のみを対象とした場合であり、流れおよび温度場の過渡状態は明確にされていない。立方体キャビティ内自然対流の過渡的特性を明らかにするため、棚橋と灘口⁽¹⁶⁾ は GSMAC 有限要素法によって三次元非定常自然対流の数値解析を行った。また、棚橋ら⁽¹⁷⁾ は Rayleigh 数 710 と 7100 の場合に関する温度や速度の発達過程を詳細に調べ、三次元特有の渦構造をコンピュータグラフィックスを通して明らかにした。その GSMAC 有限要素法は水平二重円筒内の自然対流の解析⁽¹⁸⁾ にも適用され、良好な結果が得られている。

最近、著者らは二次元および三次元の高 Reynolds 数非圧縮粘性流問題に有効な有限要素法の開発を目指

* 原稿受付 平成5年7月19日。

^{*1} 正員, 日本大学生産工学部 (〒275 習志野市泉町 1-2-1)。

^{*2} 太陽工業(株) (〒573 枚方市招提田近 3-20)。

し、指数関数形 Petrov-Galerkin 法に基づく有限要素スキームを提案した⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。このスキームのおもな特長は指数関数形の重み関数に局所座標系を用いたスクーリングを施すことにより風上化を計り、数値的安定性を確保していることにある。この指数関数形 Petrov-Galerkin 有限要素スキームは二次元非定常自然対流の問題に適用され、 10^{10} までの Rayleigh 数に関する正方形キャビティ内の過渡的挙動を安定にとらえることができた⁽²¹⁾⁽²²⁾。

本論文では、上述の手法を三次元非定常自然対流の問題に拡張する。具体的な数値計算例として、立方体キャビティ内自然対流の Rayleigh 数 $Ra=10^6$ までの流れに対し、定常状態に至るまでの過渡的挙動を示すことにより三次元非定常問題への本手法の有効性および適用性を明らかにする。また、 $Ra=10^6$ に対し二次元⁽²¹⁾ および三次元解析結果の比較を通して、二次元解析の仮定の妥当性も検討する。

以下の定式化にあたり、記号 $(\cdot)$ と $(\cdot)$ は空間および時間変数に関する偏微分を表し、また、指標についてはアインシュタインの総和規約を採るものとした。

2. 基礎微分方程式

三次元自然対流の解析対象領域を Ω 、その境界を Γ とする。定式化にあたりデカルト座標系を用い、作用する外力は重力のみとし、その方向は $(-x_3)$ 方向としている。基礎微分方程式は Boussinesq 近似を用いた非定常 Navier-Stokes 方程式、連続の方程式およびエネルギー方程式を用い、それらの無次元化された方程式を以下に示す。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -p_{,i} - \frac{1}{Gr}(\theta e_i - u_{i,jj}) \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} + u_i \theta_{,i} = \frac{1}{Ra} \theta_{,ii} \quad (3)$$

ただし、 u_i は速度ベクトル成分、 p は圧力、 θ は温度、 $Ra(=Gr \cdot Pr)$ は Rayleigh 数、 Gr は Grashof 数、 Pr は Prandtl 数である。また、代表流速、長さ、温度差をそれぞれ $U_T = \beta \Delta T g L_T^2 / \nu$ 、 L_T 、 ΔT とし⁽¹⁶⁾、 $e_1 = 0$ 、 $e_2 = 0$ 、 $e_3 = -1$ としている。ここで、 β は体膨張係数、 g は重力の加速度の大きさ、 ν は動粘性率を表す。

式(1)～(3)の時間に関して準陽的スキームを適用し、さらに、修正速度ベクトル $\bar{u}_i$ を用いて fractional step 分解を導入すれば以下の半離散化表現を得る。

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j} = -\frac{1}{Gr}(\theta^n e_i - u_{i,jj}^n) \quad (4)$$

$$\phi_{,ii} = -\bar{u}_{i,i} \quad (5)$$

$$u_i^{n+1} - \bar{u}_i = \phi_{,i} \quad (6)$$

$$p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \phi \quad (7)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + u_i^{n+1} \theta_{,i} = \frac{1}{Ra} \theta_{,ii}^n \quad (8)$$

ただし、 Δt は時間間隔、 n は時間ステップ数、 ϕ は修正速度ポテンシャルを表す。

3. 指数関数形 Petrov-Galerkin 有限要素解析

本論では、高 Rayleigh 数流れに関する数値解の安定化を計るために式(4)と式(8)に指数関数形 Petrov-Galerkin 法^{(19)～(22)}を適用し、また、 ϕ に関する Poisson 方程式(5)には Galerkin 有限要素法を用いる。

3.1 弱形式表現 式(4)の重みつき積分表現は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j} + \frac{1}{Gr}(\theta^n e_i - u_{i,jj}^n) \right\} M_a d\Omega = 0 \quad (9)$$

上式において Ω_i は領域 Ω の部分領域、 M_a は Petrov-Galerkin 形の重み関数であり次式で与えられる。

$$M_a = N_a + \tilde{N}_a \quad (10)$$

ただし、 N_a は未知関数を近似する際に用いる三次元の試験関数⁽¹⁶⁾、 $\tilde{N}_a$ は補正された関数を表す。

ここで、式(9)に発散定理を適用すれば次の弱形式表現を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j} \right\} M_a d\Omega \\ + \int_{\Omega_i} \frac{1}{Gr} \theta^n e_i M_a d\Omega - \int_{\Omega_i} \frac{1}{Gr} u_{i,jj}^n \tilde{N}_a d\Omega \\ + \int_{\Omega_i} \frac{1}{Gr} u_{i,j}^n N_{a,j} d\Omega = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{Gr} u_{i,j}^n n_j N_a d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 n_j は単位法線ベクトル成分を表す。また、 M_a として図1の局所座標系を用いることにより次の具体的な表現が得られる。

図1 六面体双一次要素の局所座標系

$$\left. \begin{aligned} M_a(\mathbf{x}) &= \sum_{r,i} N_a(\mathbf{x}) e^{-a_i(N_r x_i' - x_i^n)} \\ a_i &= \frac{\alpha_i}{|L_i|} \operatorname{sgn}(v_i^n) \quad (i=1\sim 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 v_i^n は Ω_i 内で平均化された速度ベクトル、 $\operatorname{sgn}(\)$ は符号関数を表す。また、 α_i はスケールリングパラメータである。

式(4)の弱定式化に従い、式(8)の弱形式表現は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} + u_i^{n+1} \theta_i^n \right\} M_a^* d\Omega \\ & - \int_{\Omega_i} \frac{1}{Ra} \theta_{,ii} \tilde{N}_a^* d\Omega + \int_{\Omega_i} \frac{1}{Ra} \theta_{,i} N_{a,i} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{Ra} \theta_{,i} n_i N_a d\Gamma \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、 M_a^* は式(12)において v_i^n の代わりに v_i^{n+1} とし、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の代わりにそれぞれ $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ に置き換えた関数である。

一方、式(5)に Galerkin 法を適用することにより次の弱形式表現を得る。

$$\int_{\Omega_i} \phi_{,i} N_{a,i} d\Omega - \int_{\Omega_i} \bar{u}_{i,i} N_a d\Omega = \int_{\Gamma_i} \phi_{,i} n_i N_a d\Gamma \dots\dots\dots (14)$$

3.2 有限要素方程式 未知関数の補間関数として、速度ベクトル、温度および修正速度ポテンシャルには一次要素による補間を、圧力については要素内一定の補間を用いる。

この仮定より、式(11)の左辺第3項と式(13)の左辺第2項の積分は消去され、それぞれ以下の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} M_{a\beta} \frac{\{\bar{u}_i\}_\beta - \{u_i^n\}_\beta}{\Delta t} + K_{a\beta}(u_i^n) \{u_i^n\}_\beta \\ + \tilde{M}_{a\beta} e_i \theta_\beta^n = F_{ia} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$M_{a\beta}^* \frac{\theta_\beta^{n+1} - \theta_\beta^n}{\Delta t} + K_{a\beta}^*(u_i^{n+1}) \theta_\beta^n = F_a \dots\dots\dots (16)$$

ただし、各係数行列の計算は文献(19)で示されたのと同様に行うことができる。一方、式(14)に関する有限要素方程式は次式で与えられる。

$$H_{a\beta} \phi_\beta - G_{a\beta i} \{\bar{u}_i\}_\beta = f_a \dots\dots\dots (17)$$

ただし、各係数行列 $H_{a\beta}$ と $G_{a\beta i}$ の計算には Gauss の1点積分公式が採用される。

4. 数値計算例

三次元自然対流問題に関する本計算スキームの妥当性を検討するために、 $Ra=710, 7100, 10^5$ および 10^6 の立方体キャビティ内自然対流の解析例を示す。この問題の形状と境界条件を図2に示す。特に、 $x_1=0, 1$ に関する x_2x_3 断面には温度に関する境界条件を与え、

表1 計算に使用したパラメータ

Ra	elements	minimum length	Δt	$\alpha_i (i=1\sim 6)$
710	$10 \times 10 \times 10$	0.038490	0.2	0.02
7100	$10 \times 10 \times 10$	0.038490	2.0	0.02
10^5	$20 \times 20 \times 20$	0.017327	5.0	0.2
10^6	$20 \times 20 \times 20$	0.011912	20.0	0.2

図2 問題の形状と境界条件

残りの四面は断熱条件としている。また、速度に関する条件はすべての境界で $\mathbf{u}=0$ としている。

計算を実行するにあたり用いたパラメータを表1に示す。キャビティ内の流体は空気 ($Pr=0.71$) とし、初期条件は $x_1=0$ での境界(高温壁側)を除いてすべて $\mathbf{u}=0, \theta=1$ としている。また、式(17)に対する全体系の方程式を解く際に SCG(Scaled Conjugate Gradient) 法を用い、収束判定は二次元解析の結果を考慮し⁽²¹⁾、相対残差二乗ノルムに対し 10^{-3} で行った。

図3および図4には、それぞれ $Ra=710$ および 7100 に関する立方体キャビティ内の中央断面での速度ベクトルと等温線を示す。これらの結果はほぼ定常状態に達している。図3, 4中で、 x_2x_3 と x_1x_2 面での速度ベクトルは x_1x_3 面での速度ベクトルの大きさを基準にすると2倍に拡大して表示している。また、等温線の間隔は0.1である。

$Ra=710$ での速度ベクトル場を見ると、渦の中心はキャビティの中心に位置し、 x_1x_3 面 ($x_2=0.5$) での速度ベクトルの挙動は二次元解析の場合⁽²⁾ とほぼ同様である。また、 x_2x_3 面 ($x_1=0.5$) 上には四つの渦が現れ、 x_1x_2 面 ($x_3=0.5$) での流体は中心部分に向かって流れていることがわかる。これらの現象は三次元流れ特有の挙動である。また、 x_1x_3 面 ($x_2=0.5$) での等温線も二次元解析の場合⁽²⁾ とよく一致しており、 x_1x_2 面 ($x_3=0.5$) での等温線はほぼ等間隔の平行線となっている。以上の結果は、すでに棚橋と灘口⁽¹⁷⁾ が考察している。

$Ra=7100$ の場合も $Ra=710$ の場合と同様に渦中

 図 3 $Ra=710$ での速度ベクトルと等温線 ($t=400$)

 図 4 $Ra=7100$ での速度ベクトルと等温線 ($t=6000$)

心はキャビティ内中心にあり、 x_1x_3 面での流れ場は中心付近で円形の対流挙動をしている。また、その面での等温線は二次元解析結果⁽²⁾と一致している。 x_2x_3 および x_1x_2 面での速度ベクトルは $Ra=710$ の場合とほぼ同様の挙動を示しているが、それらの面での等温線には違いが明確に現れている。また、文献(17)で示されている $Ra=7100$ での流れ場は、キャビティ中心に対して対称性が見られないが、本計算結果ではその中心に関して対称的な流れ場となっている。

図 5 および図 6 に、それぞれ $Ra=710$ および 7100

 図 5 x_1x_3 面内中央線での速度分布 ($Ra=710$)

 図 6 x_1x_3 面内中央線での速度分布 ($a=7100$)

に関する x_1x_3 面 ($x_2=0.5$) 内の中央線での速度分布を示す。これらの図より、本計算結果は中央線の中心点に対し点対称的な分布を示している。また、 $Ra=710$ の場合よりも $Ra=7100$ のほうが速度境界層は多少薄くなっていることがわかる。なお、図 5, 6 中の速度成分 u および w には、それぞれ $u=Rau_1$ および $w=Rau_3$ という関係がある。

図 7 は $Ra=10^5$ に対し三つの中央断面 (x_2x_3 面, x_1x_3 面, x_1x_2 面) での速度ベクトルおよび等温線が定常状態に至るまでの発達過程を示す。また、 $Ra=10^6$ に関する非定常解析結果は図 8 に示される。図 7, 8 中で、 x_2x_3 面と x_1x_2 面での速度ベクトルは x_1x_3 面でのベクトルの $Ra=10^5$ の場合 5 倍、 $Ra=10^6$ で 8 倍に拡大して表示してある。また、等温線の間隔は 0.1 である。

まず、 $Ra=10^5$ での速度ベクトルおよび等温線の挙動について特徴的なことを記述する。 $t=2.5 \times 10^3$ での x_2x_3 面の上半分の主流は下降し、下半分では $x_2=0.5$ の x_3 軸に対し互いに回転している流れが見られる。 x_1x_2 面での主流は x_1 軸の正方向と逆向きに流れ、 $x_1=0.0$ の壁面の影響によりその流れは二つの隅に巻き込まれている。これらの断面で流れの対称性が見られるため、等温線も x_2x_3 面では $x_2=0.5$ の x_3 軸、 x_1x_2 面では $x_2=0.5$ の x_1 軸に対して対称性があることがわかる。また、 x_1x_3 面での主渦は二つに分裂し始め、上壁面での温度の発達過程が顕著に見られる。 $t=5.0 \times 10^3$ での x_1x_2 面上の流れ場は $t=2.5 \times 10^3$ の場合と似ているが、 x_1x_3 面での流れはさらに発達している。

図 7 速度ベクトルと等温線の発達過程 ($Ra=10^5$)図 8 速度ベクトルと等温線の発達過程 ($Ra=10^6$)

また、 x_2x_3 面での下半分の流れは上昇傾向にある。この Rayleigh 数では $t=25.0 \times 10^3$ で定常状態とみなすことができる。この時刻での x_2x_3 面上の上半分および下半分の流体は $x_3=0.5$ の軸に向かって流れ込んでいく様子がわかる。 x_1x_3 面では二つの渦が明確に存在し、流れ場および等温線の挙動は二次元解析結果⁽²⁾とよく類似している。また、 x_1x_2 面での流れは四隅に吸い込まれていく様子が見られる。これらの断面での流れ場および等温線には対称性が見られる。

次に、 $Ra=10^6$ の場合の非定常挙動について検討する。 $t=0.8 \times 10^4$ での x_2x_3 面上部には二つの渦が明確に観察される。その他の断面上の挙動は $Ra=10^5$ での $t=2.5 \times 10^3$ の場合と同様である。 x_2x_3 面上に存在していた二つの渦は $t=2.0 \times 10^4$ で消滅し、この断面での流れは全体的に下降傾向にある。 x_1x_3 面での流れおよび等温線の発達は顕著であり、このため x_1x_2 面での流れは $t=0.8 \times 10^4$ の場合と異なる挙動が見られる。定常状態とみなされる $t=20.0 \times 10^4$ での x_2x_3 面の流れ場は複雑な挙動を示しているが、等温線は $Ra=10^5$

の定常状態の場合と類似している。 x_1x_3 面には二つの渦が観察されるが、それらの渦は $Ra=10^5$ の場合よりも隅に位置している。また、 x_1x_2 面での四隅にはそれぞれ渦が存在している。これらの断面での流れ場および等温線に関しても対称性が見られる。

図 9 および図 10 には、それぞれ $Ra=10^5$ および 10^6 に関する x_1x_3 面 ($x_2=0.5$) 内の中央線での速度分布を示す。これらの Rayleigh 数域での w 分布は、ほぼ中央線上にのる傾向がある。このような傾向は二次

表 3 $Ra=10^6$ での数値結果の比較

	u_{max} x_3	w_{max} x_1	Nu_{av}	Nu_{max}	Nu_{min}
Present	71.70 0.8492	215.9 0.04740	8.833	18.90	0.8786
Haldenwang & Labrosse		234.3	8.61		
le Peutrec & Lauriat			8.68		

表 2 異なる Ra 数での数値結果

Ra	u_{max} x_3	w_{max} x_1	Nu_{av}	Nu_{max}	Nu_{min}
710	2.742 0.8184	2.755 0.1816	1.042	1.295	0.7933
7100	15.82 0.8184	15.57 0.09591	1.843	3.315	0.5460
10^5	38.96 0.8655	65.36 0.06434	4.398	8.196	0.6742

図 9 x_1x_3 面内中央線での速度分布 ($Ra=10^5$) 図 10 x_1x_3 面内中央線での速度分布 ($Ra=10^6$) 図 11 高温および低温壁での平均 Nu 数の時刻歴 図 12 Ra 数と Nu_{av} との関係

表 4 二次元および三次元数値結果の比較 ($Ra=10^6$)

$Ra = 10^6$	u_{max} x_3	w_{max} x_1	Nu_{av}	Nu_{max}	Nu_{min}
2D flow	66.68	219.9	8.857	17.13	0.845
	0.8528	0.0347			
3D flow	71.70	215.9	8.833	18.90	0.879
	0.8492	0.0474

2D flow

3D flow

(a) 速度ベクトル

2D flow

3D flow

(b) 等温線

図 13 $Ra=10^6$ での二次元および三次元流れの比較

元解析結果⁽⁸⁾にも見られる。また、速度境界層に関しては $Ra=10^6$ のほうが $Ra=10^5$ の場合よりも薄いことがわかる。

表 2 は, $Ra=710, 7100$ および 10^5 に関する本数値結果を示す。これらの結果は、ほぼ定常状態とみなされた時点でのものである。 u_{max} と w_{max} は、それぞれ x_1x_3 面上の中心を通る x_3 軸上および x_1 軸上の最大値である。 Nu_{av} は高温壁側での平均 Nusselt (Nu) 数を表し、 Nu_{max} および Nu_{min} はその壁での局所 Nu 数の最大値および最小値である。また、 $Ra=10^6$ の本数値結果と他解法の結果⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾ は表 3 に示される。 Nu_{av} の本結果は他の解よりも多少高めである。図 11 は、それぞれの Rayleigh 数に対し、高温壁および低温壁側の平均 Nu 数の時刻歴を示す。どの場合に関しても時間の経過とともに、両壁での平均 Nu 数は一致する傾向がある。特に、 $Ra=10^5$ の場合、計算の初期時刻において高温壁側の Nu 数がオーバシュートする傾向がある。また $Ra=10^6$ では両壁の Nu 数にそのような傾向が見られる。図 12 に、Rayleigh 数と高温壁での平

均 Nu 数 (Nu_{av}) との関係を示す。本解析結果は、二次元解析⁽¹⁰⁾ の場合と異なり、Rayleigh 数のべき乗に必ずしも比例しているとはいえない。

次に、 $Ra=10^6$ の場合に対し、二次元流れ⁽²¹⁾ と三次元流れの定常状態での比較検討を行う。この場合の速度ベクトルおよび等温線は図 13 に示される。速度ベクトルおよび等温線に関し、両方の解析結果の一致が見られる。また、最大流速や Nu 数の比較は表 4 に示される。両数値結果とも一致している。

5. 結 言

指数関数形 Petrov-Galerkin 有限要素法の三次元熱流体問題への適用性を図ることを目的として、立方体キャビティ内自然対流の非定常解析を示してきた。その定式化の際に、二次元解析の場合と同様に時間進行スキームとして FS 法、Poisson 方程式の解法として SCG 法を採用した。

数値計算例として $Ra=710, 7100, 10^5$ および 10^6 の流れを詳細に解析し、これらの解析結果を通して次のことを明らかにした。

(1) それぞれの Rayleigh 数に対し定常状態とみなせるまで計算を行った。その結果として、本解析法では精度よく安定した解が得られ、既存の数値解との比較を通し本近似スキームの有効性が確かめられた。

(2) Rayleigh 数の増加に伴い速度境界層および温度境界層は薄くなっていくことが確認できた。

(3) この Rayleigh 数域に関する平均 Nu 数の結果は、二次元解析の場合と異なり Ra 数のべき乗に比例していないことがわかった。

(4) 本計算による x_1x_3 面での流れ場および等温線は、二次元解析結果との一致が見られたが、その他の断面において三次元特有の縦渦が現れるなど非常に興味深い現象をとらえることができた。

文 献

- (1) de Vahl Davis, G. and Jones, I. P., Natural Convection in a Square Cavity: A Comparison Exercise, *Int. J. Numer. Meths. Fluids*, 3(1983), 227.
- (2) de Vahl Davis, G., Natural Convection in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 3(1983), 249.
- (3) Markatos, N. C. and Pericleous, K. A., Laminar and Turblent Natural Convection in an Enclosed Cavity, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 27-5(1984), 755.
- (4) le Quere, P. and de Roquefort, T. A., Computation of Natural Convection in Two-Dimensional Cavities with Chebyshev Polynomials, *J. Comput. Phys.*, 57(1985), 210.
- (5) 斎藤・広瀬, スクエアキャビティ内自然対流熱伝達問題のベンチマーク解について, 第 22 回日本伝熱シンポジウム

- 講演論文集, (1985), 437.
- (6) Chenoweth, D. R. and Paolucci, S., Natural Convection in an Enclosed Vertical Air Layer with Large Horizontal Temperature Difference, *J. Fluid Mech.*, **169**(1986), 173.
- (7) 畑中・川原, 流速修正法による熱対流有限要素解析, 第2回計算力学シンポジウム報文集, (1988), 81.
- (8) 岡永・棚橋, GSMAC有限要素法による高 Rayleigh 数正方形 Cavity 内自然対流の非定常解析, 機論, **56**-530, B (1990), 96.
- (9) Lin, T. F., Huang, C. C. and Chang, T. S., Transient Binary Mixture Natural Convection in Square Enclosures, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **33**-2(1990), 287.
- (10) 水上, 有限要素法による正方キャビティ内の高 Ra 数自然対流解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **16**(1992), 433.
- (11) 板倉・藤間・田端, 上流・下流点選択型有限要素法による自然対流の数値計算, 第6回計算力学シンポジウム報文集, (1992), 121.
- (12) Mallinson, G. D. and de Vahl Davis, G., Three-Dimensional Natural Convection in a Box: a Numerical Study, *J. Fluid Mech.*, **83**(1977), 1.
- (13) Haldenwang, P. and Labrosse, G., 2-D and 3-D Spectral Chebyshev Solutions for Free Convection at High Rayleigh Number, *Proc. 6th Int. Symp. Finite Elements Methods Flow Problems*, (1986), 261.
- (14) Ozoe, H., ほか4名, Numerical Calculation of Three-Dimensional Turbulent Natural Convection in a Cubical Enclosure Using a Two-Equation Model for Turbulence, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **108**(1986), 806.
- (15) le Peutrec, Y. and Lauriat, G., Effects of the Heat Transfer at the Side Walls on Natural Convection in Cavities, *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **112**(1990), 370.
- (16) 棚橋・灘口, GSMAC有限要素法による立方体内の3次元非定常自然対流の数値解析(第1報), ターボ機械, **15**-6(1987), 9.
- (17) 棚橋・灘口, GSMAC有限要素法による立方体内の3次元非定常自然対流の数値解析(第2報), ターボ機械, **15**-7(1987), 11.
- (18) 加藤・棚橋, 流速と Bernoulli 関数の同時緩和法を用いた三次元非圧縮粘性流れの有限要素解析(第2報, 水平同軸二重円筒内自然対流), 機論, **58**-551, B(1992), 2100.
- (19) 角田・登坂, 非定常非圧縮粘性流れ問題の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法, 日本建築学会構造系報告論文集, **439**(1992), 189.
- (20) Kakuda, K. and Tosaka, N., Finite Element Approach for High Reynolds Number Flows, *Theoret. Appl. Mech.*, **41**(1992), 223.
- (21) 角田・川原・登坂, 正方形キャビティ内自然対流の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素解析, 機論, **59**-564, B (1993), 123.
- (22) Kakuda, K., Kawahara, Y. and Tosaka, N., Petrov-Galerkin Finite Element Analysis Using Exponential Functions for Natural Convection at High Rayleigh Numbers, *Theoret. Appl. Mech.*, **42**(1993), 253.