ベーンレスディフューザの旋回失速の二次元非粘性解析に基づく研究* (第1報, 線形解析)

辻 本 良 信^{*1}, 吉 田 義 樹^{*1}, 森 康 真^{*2}

Vaneless Diffuser Rotating Stall Based on Two-Dimensional Inviscid Flow Analysis (1st Report, Linear Analysis)

Yoshinobu TSUJIMOTO, Yoshiki YOSHIDA and Yasumasa MORI

Rotating stalls in vaneless diffusers are studied from the viewpoint that they are basically two-dimensional inviscid flow instability under the boundary conditions of vanishing velocity disturbance at the diffuser inlet and of vanishing pressure disturbance at the diffuser outlet. The linear analysis in the present report shows that the critical flow angle and the propagation velocity are functions of only the diffuser radius ratio. It is shown that the present analysis can reproduce most of the general characteristics observed in experiments: critical flow angle, propagation velocity, velocity and pressure disturbance field. It is shown that the vanishing velocity disturbance at the diffuser inlet is caused by the nature of impellers as a "resistance" and an "inertial resistance", with is generally strong enough to suppress the velocity disturbance at the diffuser inlet. This explains the general experimental observations that vaneless diffuser rotating stalls are not largely affected by the impeller.

Key Words: Rotating Stall, Instability, Vaneless Diffuser, Inviscid Flow, Linear Analysis

1. 緒 言

ベーンレスディフューザでは流れ角が周方向に近くなった場合に、通常の翼列に生じる旋回失速と類似の不安定な流れのパターンが生じるが、これについては従来から多くの研究がなされてきた。その発生原因については Jansen⁽¹⁾は種々の仮定を用いた二次元ポテンシャル流れ解析により内向き流れが基本的に不安定であるとしている。実際の旋回失速は外向き流れでも発生することが問題になるが、Senoo ら⁽²⁾は壁面境界層内の流れが内向きになることが発生原因であるとしている。実際、鶴崎ら⁽³⁾によっても示されたようにこのような考えから導かれる限界流れ角の実験との一致は良好であるが、場合によっては壁面に逆流があっても旋回失速に至らない場合も観察され、その発生原因や旋回失速発生下の流れの機構については必ずしも明確でない。

一方、著者らの一人は、二次元線形解析において、羽根車からの流出渦を考慮した場合には外向き流れに

おいてもベーンレスディフューザの旋回失速に類似の現象が見られることを見いだした⁽⁴⁾が、研究の主眼を他の現象においていたのでその精細な検討や実験との比較は行われていない。

本報では、前述の解析法を用いて旋回失速の発生条件や伝ば速度を明確な形で示し、これがディフューザ内外径比とセル数のみの関数になることを明らかにした。また、羽根車の効果についても論じ、発生限界、伝ば速度比、圧力変動、速度変動パターンを実験と比較し妥当性を検討する。Abdelhamid⁽⁵⁾や Moore⁽⁶⁾によってもまったく同一の仮定の下に異なる方法により解析が行われている。結果は当然のことながら本報の結果と同一であるが、本報で述べるような結果の解釈や整理、実験との対比は行われていない。

2. 線 形 解 析⁽⁴⁾

図1に示すような、外半径 r_3 のベーンレスディフューザ内で、内外径 r_1, r_2 , 羽根角 β , 羽根数無限大の羽根車が角速度 Ω で回転する場合を考える。羽根車中心に原点をもつ静止座標系 $z = x + iy = re^{i\theta}$ で考える。流れは非粘性、非圧縮性であり、流れの変動成分は定常成分に比べて微小であるとし線形化して考える。

流れの非定常成分は時間 t に関する虚数単位 j を用

* 平成4年7月23日 第29回ターボ機械講演会において講演、原稿受付 平成5年7月19日。

^{*1} 正員、大阪大学基礎工学部 (〒560 豊中市待兼山町1-1)。

^{*2} 三菱自動車工業(株) (〒211 川崎市中原区大倉町10)。

いて

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r(r) \exp \{j(\omega t - n\theta)\} \\ v_\theta &= \bar{v}_\theta(r) \exp \{j(\omega t - n\theta)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

のように表す。ここで ω は角振動数、 n は旋回失速のセル数である。

2.1 ディフューザ内での流れ ペーンレスディフューザ内 ($r=r_2 \sim r_3$) において、渦度 ζ が (V_r, V_θ) = ($Q/2\pi r, \Gamma/2\pi r$) の定常速度で運ばれるものとし、 $\tilde{\zeta}_2$ を未定定数として渦度 ζ を次のように表す。

$$\begin{aligned} \zeta &= \tilde{\zeta}_2 \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{\pi}{Q}(r^2 - r_2^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - jn \left[\theta - \frac{\Gamma}{Q} \log \left(\frac{r}{r_2} \right) \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ただし、 Q は流量、 $\Gamma \equiv 2\pi r_2 \{ r_2 \Omega - (Q/2\pi r_2) \cot \beta \}$ は羽根車の定常循環である。ペーンレスディフューザ内に分布する渦度によって誘起される速度は式(3)で表せる。

$$\begin{aligned} v_r^* &= \tilde{\zeta}_2 (R_R - jR_I) e^{j(\omega t - n\theta)} \\ v_\theta^* &= \tilde{\zeta}_2 (\Theta_R - j\Theta_I) e^{j(\omega t - n\theta)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $R_R - jR_I = -j(F + G)$, $\Theta_R - j\Theta_I = F - G$

$$\begin{aligned} F(r_0) &= \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_0} \exp \left\{ -j \left[\omega \frac{\pi}{Q} (r^2 - r_2^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n \frac{\Gamma}{Q} \log \left(\frac{r}{r_2} \right) \right] \right\} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} dr \\ G(r_0) &= \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_3} \exp \left\{ -j \left[\omega \frac{\pi}{Q} (r^2 - r_2^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n \frac{\Gamma}{Q} \log \left(\frac{r}{r_2} \right) \right] \right\} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} dr \end{aligned}$$

式(3)の速度に、羽根車出口 ($r=r_2$) で相対速度が羽根車に沿うという境界条件

$$\bar{v}_{\theta 2} = -\bar{v}_{r 2} \cot \beta \quad \dots\dots\dots (4)$$

を満足するように、複素速度が $z^{-(n+1)}$ に比例した非

回転成分 [式(5), $\tilde{\zeta}_2$ のかかった項の第2項] を加え合せる。

有限な半径 r_3 の内部の流れを考えているので、 z^{n-1} に比例する流れ [式(5), $\tilde{A}$ のかかった項の第1項] も可能である。これに羽根車出口の境界条件 [式(4)] を満足するような $z^{-(n+1)}$ の流れ [式(5), $\tilde{A}$ のかかった項の第2項] を付加する。

以上の流れ場を重ね合わせるとディフューザ内の変動速度は最終的に次式のように表される⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &= \tilde{\zeta}_2 \left\{ (R_R - jR_I) - \left(\frac{r_2}{r} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I) r_2 \right\} \\ &\quad + \tilde{A} \left\{ \left(\frac{r}{r_2} \right)^{n-1} - \left(\frac{r_2}{r} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} \right\} \\ \bar{v}_\theta &= \tilde{\zeta}_2 \left\{ (\Theta_R - j\Theta_I) - j \left(\frac{r_2}{r} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I) r_2 \right\} \\ &\quad - j\tilde{A} \left\{ \left(\frac{r}{r_2} \right)^{n-1} + \left(\frac{r_2}{r} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\tilde{\zeta}_2, \tilde{A}$ は未定の複素定数であり、 $\tilde{\zeta}_2$ のかかった項は式(2)の渦度をもつ回転流れ場、 $\tilde{A}$ のかかった項は非回転流れ場であり、いずれも式(4)の境界条件を満足している。これらの未定定数は以下に示す二つの境界条件から定まる。

2.2 ディフューザ出口の境界条件 ディフューザ出口の流れは圧力一定の空間に開放されているものとする。式(5)の速度を線形化した運動方程式に代入し、 $(\partial p / \partial \theta)_{r_3} = 0$ と置くと次式を得る。

$$P_\zeta \tilde{\zeta}_2 + P_A \tilde{A} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} P_\zeta &= \left(j\omega - \frac{jn\Gamma}{2\pi r_3^2} + \frac{Q}{2\pi r_3^2} \right) Z_{\theta 3} + \frac{Q}{2\pi r_3} Z_a \\ P_A &= \left(j\omega - \frac{jn\Gamma}{2\pi r_3^2} + \frac{Q}{2\pi r_3^2} \right) A_{\theta 3} - j \frac{Q}{2\pi r_3} Z_b \\ Z_a &= \exp \left\{ -j \left[\omega \frac{\pi}{Q} (r_3^2 - r_2^2) - n \frac{\Gamma}{Q} \log \left(\frac{r_3}{r_2} \right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{n+1}{r_3} F(r_3) + j(n+1) \frac{r_2^{n+1}}{r_3^{n+2}} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I) r_2 \\ Z_b &= (n-1) \frac{r_3^{n-2}}{r_2^{n-1}} - (n+1) \frac{r_2^{n+1}}{r_3^{n+2}} e^{-2j\beta} \\ \bar{v}_{\theta 3} &= Z_{\theta 3} \tilde{\zeta}_2 + A_{\theta 3} \tilde{A} \quad [\text{式(5)より}] \end{aligned}$$

2.3 羽根車からの流出渦 流れの非定常性および羽根車の全圧上昇の不均一によりディフューザ内の流れは非回転となる。羽根車上流の流れが非回転と仮定し、羽根車に固定した座標系での運動方程式を積分すると、羽根車からの流出渦の強さは次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$\tilde{\zeta}_2 = -\frac{1}{r_2 v_{r 2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (r_2 v_{\theta 2} - r_1 v_{\theta 1}) - M \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_{r 2}}{\partial \theta} \right) \right\}$$

図1 計算モデル

$$-\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta P_t}{\rho} \right) \left\{ \dots \dots \dots \right\} \quad (7)$$

ここで、式(7)右辺の{ }内の第1項はオイラーヘッドの時間変化、第2項は羽根車通路の流体の慣性効果を表し $M = \int_1^2 \frac{r_2}{r \sin \beta} ds$ (M : 慣性長さ)、第3項は羽根車の全圧損失の影響を表す。 $\partial/\partial t^*$ は羽根車に固定した座標系での時間微分を示す。式(7)の非定常成分は式(8)のように表せる。

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{1}{r_2 V_{r2}} H \tilde{v}_{r2} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ただし、

$$H = (\omega - n\Omega) \{ r_2(1 + j \cot \beta) + Mn \} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta P_t}{\rho \tilde{v}_{r2}} \right)$$

また、 $\tilde{v}_{r2} = Z_{r2} \tilde{\xi}_2 + A_{r2} \tilde{A}$ [式(5)より] とおくと、式(8)は式(9)となる。

$$(r_2 V_{r2} - H Z_{r2}) \tilde{\xi}_2 - H A_{r2} \tilde{A} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

3. 旋回失速の発生条件：単純化した場合

羽根車を組合せた場合には境界条件式(6)と式(9)から流れ場が決まるが、ここでは境界条件として $(\partial p / \partial \theta)_{r3} = 0$ と $\tilde{v}_{r2} = \tilde{v}_{\theta 2} = 0$ を満足する場合を考える。その理由については5章で論じる。前者の境界条件を表す式(6)と後者の境界条件

$$\tilde{v}_{r2} = Z_{r2} \tilde{\xi}_2 + A_{r2} \tilde{A} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

より $\tilde{\xi}_2 = \tilde{A} = 0$ 以外の解が存在するための条件として特性方程式

$$P_t A_{r2} - P_A Z_{r2} = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

が得られる。式(11)の左辺は複素数であるので、ディフューザ半径比 r_3/r_2 とセル数 n が与えられると式(11)の左辺の実数および虚数がそれぞれ零となるようなディフューザ内平均流れ角 $\alpha = \tan^{-1}(V_r/V_\theta)$ と角振動数 ω を決めることができる。この流れ角は中立安定の流れ角であるが、 ω を複素数と考えた解析より、この流れ角より小さな流れ角では変動が増大することがわかる。そこでこの流れ角を限界流れ角 $\bar{\alpha}$ と呼ぶ。

なお、式(10)の単純化した場合の基本流れに対しては、式(4)の境界条件は自動的に満足され、得られた流れ場は羽根車と完全に無関係となる。本解析ではこの解を、“ディフューザの旋回失速”と考える。

図2、3に、式(11)より得られる限界流れ角 $\bar{\alpha}$ と伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2} = (r_2 \omega)/(n V_{\theta 2})$ をディフューザの内外径比 r_3/r_2 とセル数 n の関数として示す(羽根角 β には依存しない)。式(11)の根としては $n > 3$ の根のほかに、半径方向の高次モードも存在するが、これらに対する検討は別の機会にゆずり、ここでは半径方向の一次モードの場合のみを示した。

羽根車の旋回失速の線形解析では初生流量はセル数に依存しないのに対して図2ではセル数が多いほど初

図2 限界流れ角 $\bar{\alpha}$ [式(11)]

図3 伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2}$ [式(11)]

図4 限界流れ角 $\bar{\alpha}$ と伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2}$ (実験結果との比較)

生流量(限界流れ角 $\bar{\alpha}$)が大となるのが興味深い。定義や結果の表示が異なるが、本節で扱われた現象は Moore⁽⁶⁾が“Resonance”と呼ぶものと完全に同一である。

4. 実験との比較

図4に、実験で観察された $n=2, 3$ の場合について、ディフューザ内外径比 r_3/r_2 をパラメータとして前章のモデルの限界流れ角 $\bar{\alpha}$ と伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2}$ の関係を実線で示した。図4中には、内外径比 $r_3/r_2=1.6, 2.0, 2.5$ の場合について、流れ角 α を変えたときに実験で観察される伝ば速度比をプロットした。実験は幅比 $b/r_2=0.2$ (b :ディフューザ高さ)のディフューザと羽根角 $\beta=20^\circ$ 、内外径比 $r_1/r_2=0.5$ の二次元遠心羽根車の組合せについてのものである。実験で得られる限界流れ角 $\bar{\alpha}$ とその流れ角における伝ば速度比を理論値と比較すると、(1) r_3/r_2 が大ほど限界流れ角 $\bar{\alpha}$ が大となること、(2) r_3/r_2 が大ほど伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2}$ が小となること、(3)セル数 n が大ほど限界流れ角 $\bar{\alpha}$ が大であることなど、一般的な傾向は一致している。ただし限界流れ角での伝ば速度比 $V_p/V_{\theta 2}$ は本計算モデルではセル数 n が大ほど大であるが、実験からはこの傾向は読取れない。

図5で、セル数2の場合の速度変動、圧力変動のパターンについて実験値と理論値を比較している。両者の比較より、(1)圧力変動と速度変動の位相関係が理論と実験で一致している。(2)速度変動、圧力変動のパターンが理論と実験で類似している。ただし図5の実験では、理論で見られる圧力パターンの特徴、圧力変動が外周に近いほど位相進みとなる傾向は顕著でない。図6に長島ら⁽⁷⁾による実験結果との比較を示す。この実験では前述の位相進みの傾向が明確に現れている。

以上のように本解析結果はペーンレスディフューザの旋回失速の特徴をおおむねよくとらえているものと考えられる。従来、限界流れ角は壁面境界層の逆流とよく対応することが示されているが、発生後の流れのパターンやその機構については十分な説明がなされていない。逆流が旋回失速のトリガになっていることは確かであろうが、旋回失速が発生してしまえばディフューザ内部の流れ場は極めて二次元的なものとなる。そこで旋回失速発生下でここで示したようなきれいな安定したパターンが発生することに関しては、ここで扱ったような二次元、非粘性流としての不安定が重要な役割を果たしていると考えている。ただし実験定数のまったく用いていない本解析の結果と実験との定量的な

図5 速度変動、圧力変動パターン(実験結果との比較)

図 6 圧力変動パターン ($r_3/r_2=3.0$, $n=2$)

一致は必ずしもよくない。実際、従来の研究から特に限界流れ角 $\bar{\alpha}$ はディフューザ幅比 b/r_2 に依存することが知られている⁽⁸⁾⁽³⁾。前述の定量的な不一致はこのような流れの三次元性、粘性の影響等によるものと考えている。

5. 羽根車の影響

4章では頭ごなしに $\bar{v}_{r2} = \bar{v}_{\theta2} = 0$ の条件を用い、単純化した場合の結果を議論した。羽根車の影響を考慮する場合には、式(6)と式(9)に基づいて同様な議論をすればよい。図7に、単純化した場合と、内外径比 $r_1/r_2=0.5$, $\beta=20^\circ, 90^\circ$ の羽根車を考慮した場合の限界流れ角 $\bar{\alpha}$, 伝ば速度比 $V_p/V_{\theta2}$ の計算結果を示す(ただし羽根車の全圧損失 ΔP_t は零とした)。羽根車の影響は小さくセル数 n やディフューザ内外径比 r_3/r_2 に対する一般的な傾向は単純化した場合と変わらない。

図8に、 $n=2$, $r_3/r_2=2.0$ の場合に対する $\bar{v}_r$ の分布を示す。羽根角 $\beta=20^\circ, 90^\circ$ いずれの場合も基本的に単純化した場合とほぼ同じ分布をもつが、 $r=r_2$ での $\bar{v}_r$ は $\beta=20^\circ, 90^\circ$ の場合には小さい有限値をもつ。これは通常の羽根車では式(8)において $H/(r_2 V_{r2})$ が大きな値をもつことに起因している。特に β が小の場合には H の表式においてオイラーヘッドの右下がりこう配 $\cot \beta$ や翼間通路の慣性効果 $M = \int_1^2 r_2/r \sin \beta ds$ が大となることにより H が大となる。すなわち通常の後向き羽根車はその右下がり特性(抵抗)や翼間の流体の慣性(慣性抵抗)により、翼間通過流量の変動($\bar{v}_{r2}$)を抑えようとする性質をもつ。また、 $\beta=20^\circ$ の場合のほうが $r=r_2$ での $\bar{v}_r$ が小さいが、このことは上述の検討結果より説明することができる。このような性質の影響はベーンレスディフューザとの組合せにお

図 7 限界流れ角 $\bar{\alpha}$ と伝ば速度比 $V_p/V_{\theta2}$ (羽根車の影響)

いて図7, 8に示されるように顕著に現れる。そこで3章の“単純化した場合”とは、実は“羽根車の一般的な性質が最も顕著に現れ、そのパラメータの影響が無視できる場合”であることがわかる。

ベーンレスディフューザの旋回失速に対する羽根車の影響が小さいことは実験的にも確かめられている⁽⁹⁾。羽根車の代わりに回転する網を用いた実験も行われている⁽¹⁾⁽⁷⁾が、この場合には金網の抵抗がベーンレスディフューザに対して羽根車と同等の影響をもつため類似の現象が観察できたものと考えられる。

6. 結 論

本報の結果を総合すると、ベーンレスディフューザの旋回失速の発生機構、発生原因を次のように解釈できる。

 図 8 $\tilde{v}_r$ の分布 (羽根車の影響)

3章で述べたように、ペーンレスディフューザ内の流れはディフューザ入口で $\tilde{v}_{r2}=0$, $\tilde{v}_{\theta2}=0$, ディフューザ出口 ($\partial p / \partial \theta$) $_{r3}=0$ の境界条件を満足する二次元非粘性渦あり流れとしての不安定をもつ。このような不安定の発生条件や変動のモードは実験的に観察されるものに近い。限界流れ角 $\bar{\alpha}$ や伝ば速度 $V_p/V_{\theta2}$ はディフューザ内外径比 r_3/r_2 , セル数 n のみで決まり、これらを図2, 3に明示した。実際の羽根車との組合せにおいては厳密には $\tilde{v}_{r2}=0$ とはならないが、羽根車のもつ抵抗や慣性抵抗の効果により、 $\tilde{v}_{r2}$ は小さく抑えられ、通常の羽根車の場合には前記理想化した場合の発生条件の近くで、これに近いモードの不安定が発生する。このような不安定が、ペーンレスディフューザの旋回失速の主体をなすものと考えられる。

本解析結果はペーンレスディフューザの旋回失速の性質を全般的によく表すものであるが、発生条件や伝ば速度は定量的には実験と多少異なる。これは、従来その発生原因として着目されていたディフューザ壁面

境界層 (流れの三次元性、粘性の影響) やディフューザ出口の境界条件の実際との違い、流れの非線形性等によるものと考えられる。これらについては次報で扱う。

最後に、研究遂行上貴重な討論をいただいた福山大学工学部 霧崎展助教授に感謝申し上げる。また本報の実験データは、卒業研究として盛合威夫君によって取得されたものである。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) Jansen, W., *Trans. ASME, J. Basic, Eng.*, 86-4 (1964), 750.
- (2) Senoo, Y. and Kinoshita, Y., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 99 (1977), 98.
- (3) 霧崎・ほか2名, 機論, 52-480, B (1986), 2930.
- (4) 辻本・ほか2名, 機論, 52-483, B (1986), 3747.
- (5) Abdelhamid, A. N., *ASME Paper*, 80-GT-184 (1980).
- (6) Moore, F. K., *Trans. ASME, J. Turbo.*, 111 (1989), 442.
- (7) 長島・伊藤, 航字学誌, 37-425 (1989), 267.
- (8) Senoo, Y. and Kinoshita, Y., *ASME Paper.*, 78-GT-19 (1978).
- (9) 霧崎・市原, 機論, 54-503, B (1988), 1661.