自然対流を伴う水平円管内の層流定常流*

京 免 進^{*1}, 碓 井 建 夫^{*2}
布 川 道 夫^{*3}, 近 江 宗 一^{*4}Combined Free and Forced Convection
for a Laminar Steady Flow in a Horizontal TubeSusumu KYOMEN, Tateo USUI,
Michio FUKAWA and Munekazu OHMI

It is well known that free convection is caused by the buoyancy forces of a laminar steady flow in a heated pipe. However, this experimental investigation shows that free convection occurs when the temperature differences between air in a room and water in an unheated pipe are large. Under such experimental conditions, cross-sectional distributions of axial velocities are measured for water as a parameter of $ReRa$ of the Rayleigh and Reynolds numbers. Furthermore, numerical analysis is also presented, and the calculated results are qualitatively compared with the above experimental data of axial velocities and experimental ones in the case of air reported by Mori et al.(1964).

Key Words: Combined Free and Forced Convection, Laminar Flow, Numerical Analysis, Pipe Flow, Horizontal Tube

1. 緒 言

水平な円管内の層流定常流において管壁を加熱した場合、管壁と流体との温度差によって浮力が生じて、管内に自然対流が起こる。このような自然対流を伴う流れは、熱交換器をはじめとする伝熱機器などで生じている。この自然対流を伴う場合の層流定常流の実験的研究がいくつか報告されている^{(1)~(6)}。それによれば、管横断面上で流体は壁面に沿って上昇し、管上部から管中心部に向かって下降する二次流れが生じ、管内の管軸方向最大速度は、管中心軸より下部に存在する。このことについて、森・二神⁽²⁾は、空気の場合の可視化実験において確かめている。

この場合の理論的研究(層流)に関して、Morton⁽⁷⁾が摂動法によって解析し、上記のような流れおよび温度の状態を図示したが、この解析手法はレイリー数 Ra が低い場合で、レイノルズ数 Re と Ra との積 $ReRa$ が 3 000 までしか適用できない。その後 Faris-Viskanta⁽⁸⁾ は摂動法により、Siegwarth-Hanratty⁽³⁾,

Hwang-Cheng⁽⁹⁾ および石垣・望月⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ は差分法により、より高い $ReRa$ まで解析を行っており、Siegwarth⁽³⁾ 以外の解については空気の場合⁽¹⁾⁽²⁾ の実験値と比較しているが、後掲の図からわかるように、それらの計算値には差が生じている。

ところで上記の加熱管では、管を加熱することによって自然対流を生じさせている。しかし本報で示すように、層流域では室内温度と管内の流体温度との差によっても自然対流が生じる。このことは、これまで明らかにされていなかったことがらである。この事実から、実際の工業管路においても、外気の温度と管内の温度の差が大きい場合、管路内に自然対流が生じることが予想される。このようなことは工業プラントをはじめとして、数多く存在するものと考えられる。したがって自然対流を伴う流れの研究は、工業的にも重要である。

本研究では、管壁を特に加熱するという操作は行わないで、作動流体として水を用いて層流域における実験を行った。 $ReRa$ をパラメータとして、その値を変えて管横断面上の速度分布の変化を調べた。またこの場合の数値解析も行っており、これらの実験値および上述の空気の場合の実験値⁽¹⁾⁽²⁾ と定性的な比較をして、水と空気の作動流体の違いを明らかにするとともに、他

* 原稿受付 平成 5 年 10 月 12 日。

*¹ 正員, 呉工業高等専門学校 (〒737 呉市阿賀南 2-2-11)。*² 正員, 大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘 2-1)。*³ 正員, ダイキン工業(株) (〒566 摂津市西一津屋 1-1)。*⁴ 正員, 元: 大阪大学工学部。

の計算値とも比較し、種々の検討を行った。

2. 記 号

$c = \partial T / \partial z$	
g : 重力の加速度	
Pr : プラントル数 $= \nu / \alpha$	
p : 圧力	
R : 管半径	
r : 半径方向座標	
Ra : レイリー数 $= \beta g c R^4 / (\nu \alpha)$	
Re : レイノルズ数 $= 2 R w_m / \nu$	
T : 温度	
T_c : 管中心軸上の温度	
T_w : 管壁の温度	
u : 半径方向速度	
v : 円周方向速度	
w : 管軸方向速度	
z : 管軸方向座標	
α : 温度伝導率	
β : 体膨張係数	
θ : 無次元温度 $= (T_w - T) / (c R Pr Re)$	
ν : 動粘度	
ξ : 渦関数 $= \nabla^2 \psi$	
ρ : 密度	
ϕ : 円周方向座標(管頂点を原点)	
ψ : 無次元流れ関数	
添 字	
c : 管中心軸上の値を表す	
m : 管横断面平均した量を表す	
w : 管壁での値を表す	

3. 理 論 解 析

本報では、水平円管路において、浮力によって生じる二次流れを伴う非圧縮性流体の層流定常流を対象とする。円柱座標(r, ϕ, z)をとり、各速度成分を u, v, w とする。ただし ϕ は管軸に垂直な断面の頂点から測った円周方向の角度を示す。ここでは以下のような仮定をおく。

- (1) 速度場、温度場とも十分発達している。
- (2) 粘性消散は無視する。
- (3) 流体の物性値は一定とするが、浮力の項に含まれる密度のみが温度によって変化する。
- (4) 管軸方向の圧力こう配は一定である。
- (5) 管壁周囲の温度は円周方向に一定、管壁の熱流束は軸方向に一定すなわち壁温こう配は軸方向に一定とする。また管内の流体の温度こう配($c = \partial T / \partial z$)も

壁温こう配と同じとする。

以上の仮定のもとでは、連続の式、運動方程式およびエネルギー式は次のように表される。

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ - \beta g (T_w - T) \cos \phi \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{uv}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2} \right) \\ + \beta g (T_w - T) \sin \phi \quad (3) \end{aligned}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \quad (5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

境界条件は、管壁において次のようになる。

$$u = v = w = T_w - T = 0 \quad (6)$$

また仮定(1)、(5)より

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_w}{\partial z} = c \text{ (constant)} \quad (7)$$

さらに仮定(5)より

$$\frac{\partial T_w}{\partial \phi} = 0 \quad (8)$$

となる。

数値計算するにあたっては、式(1)～(5)を無次元化し、式(2)、(3)から圧力項を消去すれば、渦関数 ξ を含む方程式および w に関する運動方程式、エネルギー式が得られるが、これらの式は Hwang ら⁽⁹⁾が示している式と同じようなものである。ここでは ξ を含む式のみを記しておく。

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial \xi}{\partial r'} + \frac{v'}{r'} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ = \nabla'^2 \xi - Re Ra \left(\frac{\partial \theta}{\partial r'} \sin \phi + \frac{1}{r'} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cos \phi \right) \quad (9) \end{aligned}$$

なお無次元量、変換定数および無次元流れ関数 ψ は次のものを使用した。

$$\begin{aligned} r' = r/R, \quad u' = Ru/\nu, \quad v' = Rv/\nu, \quad w' = w/w_c, \\ \partial T / \partial z = c, \quad \theta = (T_w - T) / (c R Pr Re), \quad Pr = \nu / \alpha, \\ Ra = \beta g c R^4 / (\nu \alpha), \quad Re = 2 R w_m / \nu, \\ u' = (1/r') \partial \psi / \partial \phi, \quad v' = -\partial \psi / \partial r' \end{aligned}$$

本報ではこれらの無次元の方程式を差分近似してSOR法により計算した。初期値としてはポアズイユ流

れの場合の速度・温度分布を与えた。緩和係数としては1.5を使用した。が、 ξ に対してのみ1以下の値を与えて計算上の発散を防いだ。収束判定としては、いちばん収束しにくい v で行い、前の計算値との誤差が0.01%以下になるまで繰返し計算した。格子分割数として半径方向と円周方向いずれも20とした。

4. 実験装置および実験方法

実験装置はすでに報告⁽¹²⁾した管路と同じであるので、ここでは図を省略した。測定管路は肉厚5 mm、管内直径79 mm、全長10.7 mの黄銅管である。水は、この水平管路より2.8 mの高さにあるヘッドタンクから整流タンクへ送られ、ベルマウスによりなめらかに流入し、出口のコックによって流量を調節して排出される。速度の測定には、熱フィルムプローブを管路に設置し、熱線風速計からの出力データを記録した。垂直直径上の管軸方向速度分布測定の際には、管頂部からプローブを挿入した。速度分布は入口より3, 4, 5, 6, 7 m離れた各測定断面で測定した。レイリー数 Ra を求めるには管軸方向の温度こう配を知る必要がある。そこで管路入口および出口の平均水温から温度こう配を求めた。

5. 結果および考察

5.1 空気の場合の従来の実験値との比較 水の場合の本実験結果を述べる前に、空気で行った森らの実験値⁽¹⁾⁽²⁾ [$ReRa = (0.89 \sim 3.2) \times 10^5$] を取り上

表 1 空気の場合の実験条件⁽¹⁾⁽²⁾ ($Pr = 0.72$)

Re	Ra	$ReRa$
2700	33.2	0.89×10^5
2200	—	0.89×10^5
2850	56.8	1.62×10^5
—	—	3.2×10^5

図 1 管軸方向速度の垂直直径上分布⁽¹⁾⁽²⁾

げ、本計算値との比較を試みた。その実験条件を表1に示す。なおこれらの実測値は管中心の値で無次元化されており、それと対応する本計算値との比較を試みているため、定性的な比較にとどまっている。

5.1.1 垂直直径上の管軸方向速度と温度の分布

まず $ReRa$ が等しい場合($ReRa = 0.89 \times 10^5$)について、垂直直径上の管軸方向速度 w の分布を図1に、温度分布を図2に示す。森らも述べているように、本報で扱ったような自然対流を伴う流れの速度・温度分布は、同一流体では $ReRa$ で整理されることがわかる。ここで w および温度の分布の最大値は、管中心軸より下部に存在している。

また図1, 2には、本計算値を含め緒言で述べた各種計算値も載せた。いずれの計算値も同一の基礎式から出発しているが、それぞれ差が生じている。 w の分布において、下部付近を除いていずれの計算値もほぼ一致して実験値とよく合っているが、下部付近の分布は本計算値が実験値に最も近い。また温度分布において、特にFarisら⁽⁷⁾による計算値は、他の計算値と異なった分布形状をとっており、管軸より下部では実測値から離れているが、上部では実測値に近づいている。Farisら以外の計算値は、多少の差異はあるが同じような分布形状をとって、管軸より上部では実測値から離れているが、下部ではほぼ対応しており、中でも本計算値が実測値に最も近い。なお以下に述べる実験値との比較では、本計算法以外の計算法^{(8)~(11)}による計算値との比較はなされていない。

$ReRa$ が異なる場合について、 w と温度の分布を図3に示す。実験値と本計算値ともに二つの $ReRa$ に対して差が見られる。 w の分布については、本計算値と実験値とはよい一致を示すが、温度分布に関しては先にも述べたように管軸より上部で両者にずれがある。

図 2 温度の垂直直径上分布⁽¹⁾⁽²⁾

図 3 管軸方向速度と温度の垂直直径上分布⁽²⁾

図 5 二次流れの流線および等温線の計算結果

図 4 管軸方向速度と温度の水平直径上分布⁽¹⁾

ここで計算結果から、 $ReRa$ の値が大きくなると、 w と温度の最大値は下部管壁側に移動する傾向が認められる。

5.1.2 水平直径上の管軸方向速度と温度の分布

水平直径上の w と温度の分布を図 4 に示す。管壁近傍を除いて本計算値と実験値とはかなりよい一致を示している。 w と温度の最大値が管壁側にあり、後述の水の場合(図 9)とは異なった分布をとっている。

以上の実験値との比較から、空気の場合については、本計算値は w の分布に関しては十分な精度で実験値と一致し、温度分布に関しては管軸より上部でずれを示すことを除けばほぼ一致することがわかった。

5.1.3 流線・等温線の計算結果 上述の空気の場合について、二次流れの挙動を検討するために、以下に本計算結果を示す。 $ReRa = 0.89 \times 10^5$ の場合を代表例として示した。管横断面内の二次流れの流線および等温線を図 5 に示す。流線においては、渦の中心が水平直径より少し下で、 $r/R = 0.5$ 付近に位置している。この様子は可視化実験⁽²⁾ においても確かめられている。等温線に関しては、下部付近で密な分布をとっており、この部分では温度変化が大きいことを示している。

5.2 水の場合の本実験結果との比較

5.2.1 管軸方向速度の分布

次に著者らが行っ

表 2 水の場合の実験条件(本実験, $Pr = 8.0$)

Inlet temperature of water (°C)	Outlet temperature of water (°C)	Room temperature (°C)	Re	Ra	$ReRa$
21.6	21.4	20.3	829	-310	-2.6×10^5
11.1	11.6	16.5	473	610	2.9×10^5
10.5	10.8	15.7	936	370	3.5×10^5
10.5	10.7	16.0	1573	250	3.9×10^5
10.5	11.1	17.0	562	760	4.3×10^5
10.3	11.5	19.4	338	1940	6.6×10^5
10.7	11.7	19.7	567	1610	9.1×10^5
11.6	12.5	22.5	782	1560	1.2×10^6

た水の場合の実験結果を示す。ここでも空気の場合と同じように本計算結果と実験結果との比較を行うとともに、空気の場合との違いを述べる。実験条件を表 2 に示す。本実験の $ReRa$ の範囲は $-2.6 \times 10^5 \sim 1.2 \times 10^6$ であり、前述の空気の場合より広い範囲にわたっている。

空気の場合の可視化実験⁽²⁾ で示されているように、加熱管では、管壁の温度が流体温度よりも高いために管壁付近の流体は加熱され、流体内の温度差に基づく密度差によって浮力が生じる。したがって流体は管壁に沿って上昇し、管上部でぶつかって下降する二次流れが生じるために、垂直直径上の管軸方向速度の最大位置は管中心軸よりも下になる。冷却管では逆の現象が起こる。

本実験では特に管壁を加熱あるいは冷却するという操作は行っていないので、上記現象と同じ現象が生じるのは、室内温度と流体温度との温度差によるものであると考えられる。すなわち室内温度が流体温度より高ければ加熱管の場合に相当し、逆ならば冷却管の場

図 6 管軸方向速度の垂直直径上分布

図 8 管軸方向速度の垂直直径上分布

図 7 管軸方向速度の垂直直径上分布

図 9 管軸方向速度の水平直径上分布

合に相当する。このことは、本実験の場合、表 2 に示す温度条件を見ればわかる。

上述の二つの場合に相当する垂直直径上の w の分布を図 6 に例示する。この場合のレイリー数 Ra が負のほうは、室温が流体温度よりも低く管軸方向の温度こう配が負であることを示しており、 Ra が負の場合の報告は見当たらない。まず実測値については、最大速度の位置は、 Ra が正の場合は管中心軸よりも下に、 Ra が負の場合は管中心軸よりも上にくる。なお図 6 の場合は、 $ReRa$ の絶対値がほぼ等しいので、管中心軸に関して、相互に対称に近い分布をとっている。ただし Ra が負の場合の実測速度分布は、 Ra が正の場合の管中心軸より上部の速度に比べて、それに対応する管中心軸より下部の速度が少し大きくなっている。図 6 中の曲線は本計算値を示す。 Ra が正の場合は、計算値と実験値とはよく一致している。しかし Ra が負

の場合は、管中心部から下部にかけては実験値と計算値とはずれている。二つの計算値は管中心軸に関してほぼ対称な分布をとっている。したがって Ra が負の場合の実験値については、管中心軸から下部にわたっての測定値に関して、プローブ挿入の影響が出たものと思われる。なお $ReRa > 0$ において空気の場合(例えば図 1)の分布形状と比較すると、水の場合は上部から最大速度の位置まで上に凸の形を示しているが、空気の場合は管中心軸付近に変曲点をもつ傾向が認められる。

次に $ReRa$ がほぼ等しい場合の垂直直径上の w の分布を図 7 に示す。図 7 から、 Re , Ra が異なってもその積 $ReRa$ が等しい場合には同じ分布形状をとることがわかる。このことは空気の場合と一致している。この場合も実験値と計算値との対応は良好である。

図 8 は $ReRa$ が異なる場合の垂直直径上の管軸方向速度 w の分布である。 $ReRa$ が大きくなると、最大速度の位置は下部管壁側に少し移動する傾向を示して

図 10 温度の垂直直径上分布の計算結果

図 11 二次流れの流線および等温線の計算結果

おり、空気の場合と一致する。計算値との比較においては、 $ReRa = 1.2 \times 10^6$ の場合、最大速度の付近から下部にわたって、実験値と計算値は少しずれているが、 $ReRa = 2.9 \times 10^5$ の場合にはかなりよく一致している。

図 9 には、3 種類の $ReRa$ の場合における水平直径上の w の分布を示す。この場合 $ReRa$ が異なっても、3 種類の測定値は管中心軸に関して対称な分布を取り、同一曲線上にほぼのっていることがわかる。計算値との一致の程度も良好である。しかもこの分布形状は放物線を成しており、空気の場合(図 4)の形状とまったく異なっている。

5・2・2 温度分布の計算結果 次に、代表例として $ReRa = 2.9 \times 10^5$ の場合の計算結果を以下に示す。まず垂直直径上の温度分布を図 10 に示す。 $ReRa$ がほぼ同じ空気の場合(図 3, $ReRa = 3.2 \times 10^5$)と比較すると、形状はほぼ同じであるが、最大値を示す位置は水の場合のほうが下部管壁に近づいており、壁近傍の温度変化が大きい。

5・2・3 流線・等温線の計算結果 図 11 に二次流れの流線および等温線を示す。流線に関して空気の場合(図 5)と比較すると、空気の場合は水平直径に関して対称に近い分布をとっているが、水の場合はかなり

非対称な分布をとるようになる。さらに、空気の場合は渦の中心が水平直径上よりわずかに下に存在するが、水の場合は渦の中心位置が、より下に存在し、しかも管壁に近寄っている。等温線に関しては、空気の場合に比べて、下部付近でより密な分布をとっている。

6. 結 言

自然対流を伴う場合の水平円管内の層流定常流について、数値解析および水の場合の実験を実施し、水の場合および空気の場合の実験値⁽¹⁾⁽²⁾と計算結果を比較して、以下の結論を得た。

(1) まず、強制加熱・冷却を行わない管路内層流においても、室温と流体温度の差により自然対流(二次流れ)が発生していることを、水の場合の実験により見いだした。

(2) 空気の場合の管軸方向速度 w および温度の分布の実験値⁽¹⁾⁽²⁾($ReRa = 0.89 \times 10^5$)と、Hwang ら⁽⁹⁾, Faris ら⁽⁸⁾, 石垣ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾, および本報による 4 種類の計算値とを比較したところ、総合的に見れば本計算値が実験値に最も近い。

(3) 上記以外の $ReRa$ の空気の場合の実験値⁽¹⁾⁽²⁾および水の場合の本実験値に対しても、本計算値はかなりよい一致を示す。

(4) 水の場合、 w の最大値は、 Ra が正の場合は管中心軸より下に、 Ra が負の場合は管中心軸より上にくる。また両者の w の分布は $ReRa$ の絶対値が等しい場合、管中心軸に関して対称な関係にある。

(5) 水平直径上の w の分布は $ReRa$ が異なっても同一曲線上にのる。水の場合は放物線分布となるが、空気の場合は放物線分布とは異なる。

(6) 二次流れの挙動を調べるために、流線・等温線の計算結果を図示した。渦の中心位置は、水の場合のほうが空気の場合よりも下に存在し、しかも管壁に近寄っている。

(7) 以上の結果から、本数値解析法は空気および水の両方の場合に対して適用できることがわかった。

なお本研究に協力された故田中納美君(当時、大学院生)に感謝の意を表する。

文 献

- (1) 森・二神・徳田・中村, 機論, **30**-219(1964), 1378.
- (2) 森・二神, 機論, **32**-233(1966), 88.
- (3) Siegwarth, D. P. and Hanratty, T. J., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **13**(1970), 27.
- (4) Newell, P. H. and Bergles, A. E., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **92**(1970), 83.

- (5) Bergles, A. E. and Simonds, R. R., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **14**(1971), 1989.
 - (6) 服部・小竹, 機論, **43**-373(1977), 3379.
 - (7) Morton, B. R., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **12**-4(1959), 410.
 - (8) Faris, G. N. and Viskanta, R., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **12**(1969), 1295.
 - (9) Hwang, G. J. and Cheng, K. C., *Proc. 4th Int. Heat Transf. Conf.*, **4**(1970), NC 3•5.
 - (10) 石垣・望月, 機講論, No. 900-59(1990-9), 258.
 - (11) 石垣・望月, 航技研特別資料, NAL-SP-14(1990), 181.
 - (12) 近江・碓井・田中・外山, 機論, **41**-349(1975), 2633.
-