高次精度差分法による二次元一様等方性乱流の直接数値計算* (スペクトル法との比較)

宮内 敏雄^{*1}, 平田 徹^{*2}, 店橋 護^{*1}

Direct Numerical Simulation of Two-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence by Higher-Order Finite Difference Scheme (Comparison with the Spectral Method)

Toshio MIYAUCHI, Toru HIRATA and Mamoru TANAHASHI

Computations of 2-dimensional homogeneous isotropic turbulence by the spectral method and the higher-order finite difference scheme (FDS) have been conducted with the grids of 128×128 and 64×64 . The energy spectrum obtained by the FDS is compared with that obtained by the spectral method to investigate the effect of discretization. From these studies, the following conclusions are obtained. (1) As for the discretization of the nonlinear term, with the 128×128 grids, the energy spectrum obtained by the 5th-order upwind FDS coincides with that obtained by the spectral method up to the cutoff wave number, while the 3rd-order upwind FDS shows deflection. (2) With the 64×64 grids, the 5th-order upwind FDS is still valid for DNS, while the 6th-order central FDS requires the use of dealiasing operation or energy-conserving form for the nonlinear term. (3) With the nonlinear term discretized by the 5th-order upwind FDS, the 4th-order FDS is adequate for the diffusion term.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Turbulent Flow, Direct Numerical Simulation, Spectral Method

1. 緒 論

工学上の問題として現れる流れの多くは乱流状態にある。従来、乱流機構の解明は主に実験的手法によって行われてきたが、プローブによる流れ場への影響、測定点の空間分解能、空間内の圧力測定が困難な点などの問題があった。一方、電子計算機の著しい発達により乱流現象を数値的に解析することがある程度可能となり、工業上の設計計算や乱流構造の解明などに広く用いられている。

乱流の数値計算手法は乱流モデルを用いるものと用いないものに大別できる。前者の場合、ナビエ・ストークス方程式に時間平均操作を施し、高次相関を低次の相関量でモデル化する手法が多く用いられているが、モデルの物理的根拠やモデル定数の普遍性などに問題がある。後者のモデルを用いない手法の場合、スケールが十分小さく、粘性が支配的となる領域までを含むように空間分解能を高め、スペクトル法により数値計

算を行うが、現在の計算機の数値と記憶容量に対する制約から、対象は比較的低レイノルズ数の流れに限られている。また、流入、流出境界条件を含む場合、スペクトル法の適用は困難である。従って、その取扱いが可能なスペクトルエレメント法⁽¹⁾または高次精度中心差分法⁽²⁾を用いた直接数値計算が行われている。しかし、さらに実際的な高レイノルズ数流れへの適用を考える場合、数値的に安定な風上型の差分法⁽³⁾、またはLESを用いなければならないが、この分野についての知見は十分得られているとは言い難く、特に、高次精度差分法一般についての研究が必要とされている。

このような背景から、本研究ではまず、スペクトル法による二次元一様等方性乱流の直接数値計算を行いエネルギースペクトル、乱流統計量などを明らかにする。次に、非線形項のみを高次精度差分法に置き換えて計算を行い、非線形項の差分化がエネルギースペクトルに与える影響を明らかにする。特に、中心差分スキームについては差分化のフォームがエネルギースペクトルに及ぼす影響についても比較検討を行う。続いて、非線形項をスペクトル法によって計算し、粘性項のみを修正波数の概念を用いて差分計算した場合の

* 原稿受付 平成5年9月27日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

^{*2} 正員、住友重機械工業(株) (〒254 平塚市夕陽ヶ丘63-30)。

結果から、粘性項差分化のエネルギースペクトルへの影響を明らかにする。最後にこれらの知見から工学的実用計算において最適な非線形項、粘性項差分化手法の組み合わせについて、エネルギースペクトルおよび乱流統計量のスペクトル法による計算結果との比較から検討を行う。差分法によるナビエ・ストークス方程式の数値計算としては、非線形項に3次精度風上差分、粘性項に2次精度中心差分を用いる手法が一般的であるが、差分化誤差がエネルギースペクトルの高波数成分に与える影響は小さいとは言えない。本研究では、差分法によってナビエ・ストークス方程式の直接数値計算を行うためには、さらに高次精度の差分化手法の組み合わせが必要であることを示す。

2. 記 号

- C_1 : 3次精度風上差分法の数値粘性制御係数
 C_2 : 5次精度風上差分法の数値粘性制御係数
 $D(k)$: エンストロフィー散逸スペクトル
 $E(k)$: エネルギースペクトル
 h : 無次元格子間隔
 k : 波数
 l : エンストロフィー散逸スケール
 L : 積分長 ($L=(1/\overline{u_1^2})\int_0^{\infty} R_{11}dx_1$, R_{11} :自己相関)
 L_0 : 代表長さ, 計算領域一辺長
 p : 無次元圧力
 Re : レイノルズ数
 t : 無次元時間
 Δt : 無次元差分時間間隔
 u : 無次元速度ベクトル
 u_i, u_j : 無次元速度の各成分
 x_j : 無次元空間座標
 Δx_j : 無次元差分間隔
 w : 波数
 w'' : 修正波数
 η : エンストロフィー散逸率 ($\eta=\sqrt{|\nabla \times (\nabla \times u)|^2}$)
 λ : テイラー微小尺度
 ν : 動粘性係数
 上付き添字
 J : 格子点位置
 記号
 $\overline{\quad}$: 空間平均

3. 計 算 方 法

3・1 基礎方程式 二次元非定常のナビエ・ストークス方程式と質量保存式を基礎方程式として用いる。これらの方程式を計算領域の一辺長 L_0 及び初期

速度場の自乗平均変動速度 $(u_1)_{rms}$ で無次元化すると次のように表される。

ナビエ・ストークス方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)u - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (1)$$

質量保存式：

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

3・2 計算方法 本研究ではスペクトル法および有限差分法を用いて数値計算を行った。スペクトル法については速度、圧力などの変数をフーリエ級数を用いて展開し、直接数値計算を行った。その際、時間前進には三段階時間分割法を用い、非線形項はAdams-Bashforth法、圧力項はBackward-Euler法、粘性項はCrank-Nicolson法を用いて計算を行った。また、aliasing誤差の除去にはpadding法を用いた。有限差分法については、非線形項および粘性項に対してそれぞれ以下のスキームを用いた。

(1)非線形項差分

3次精度風上差分法⁽⁴⁾；

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j' \frac{-(u_i'^{j+2} - u_i'^{j-2}) + 8(u_i'^{j+1} - u_i'^{j-1})}{12\Delta x_j} + C_1 |u_j'| \frac{(u_i'^{j+2} + u_i'^{j-2}) - 4(u_i'^{j+1} + u_i'^{j-1}) + 6u_i'^j}{4\Delta x_j} \quad (3)$$

5次精度風上差分法⁽⁵⁾；

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j' \frac{(u_i'^{j+3} - u_i'^{j-3}) - 9(u_i'^{j+2} - u_i'^{j-2}) + 45(u_i'^{j+1} - u_i'^{j-1})}{60\Delta x_j} + C_2 |u_j'| \frac{-(u_i'^{j+3} + u_i'^{j-3}) + 6(u_i'^{j+2} + u_i'^{j-2}) - 15(u_i'^{j+1} + u_i'^{j-1}) + 20u_i'^j}{60\Delta x_j} \quad (4)$$

6次精度中心差分法(Convective フォーム)⁽⁶⁾；

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j' \frac{(u_i'^{j+3} - u_i'^{j-3}) - 9(u_i'^{j+2} - u_i'^{j-2}) + 45(u_i'^{j+1} - u_i'^{j-1})}{60\Delta x_j} \quad (5)$$

6次精度中心差分法(Arakawa フォーム)⁽⁷⁾；

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \\ &= \frac{1}{2} u_j' \frac{(u_i'^{j+3} - u_i'^{j-3}) - 9(u_i'^{j+2} - u_i'^{j-2}) + 45(u_i'^{j+1} - u_i'^{j-1})}{60\Delta x_j} \\ &+ \frac{1}{2} \{ (u_i'^{j+3} u_j'^{j-3} - u_i'^{j-3} u_j'^{j+3}) - 9(u_i'^{j+2} u_j'^{j-2} - u_i'^{j-2} u_j'^{j+2}) \\ &+ 45(u_i'^{j+1} u_j'^{j-1} - u_i'^{j-1} u_j'^{j+1}) \} / 60\Delta x_j \end{aligned} \quad (6)$$

(2)粘性項

2次精度中心差分法；

$$\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^J = \frac{u_i'^{j+1} - 2u_i'^j + u_i'^{j-1}}{\Delta x_j^2} \quad (7)$$

4次精度Pade法⁽⁶⁾;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^{j-1} + 10 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^j + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^{j+1} \\ &= 12 \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta x_j^2} \end{aligned} \quad (8)$$

なお粘性項差分化の影響評価は修正波数⁽⁶⁾の概念を用いて、時間進行中の波数空間で行った。実際の計算では、これらの各手法を組み合わせる。表1に使用した手法をまとめて掲げる。

3・3 計算条件 一辺長 L_0 の正方形を計算対象とし、計算は 128×128 および 64×64 の2種類の格子を用いて行った。速度場の境界条件には周期境界を適用した。速度場の初期条件としては、波数空間において所定のエネルギースペクトル分布を満足するように乱数を発生させて与えた。エネルギースペクトル分布には式(9)で表される一様等方性乱流の減衰終期の近似型を用いた。

$$E(k) = Ak^4 \exp(-Bk^2) \quad (9)$$

ここで A 、 B は定数であり、それぞれ、 $A=0.703 \times 10^{-3}$ 、 $B=0.324 \times 10^{-1}$ とした。無次元差分時間間隔 Δt は初期速度場のeddy turnover time ($ETT=L/(u_l)_{rms}$)の1/400、 0.349×10^{-3} とし、レイノルズ数($Re=L_0(u_l)_{rms}/\nu$)を2,000として計算を行った。時間発展については、初期条件の影響を除去するために初期速度場から2ETTまでスペクトル法による計算を行い、その後、各差分法を適用した。次章以降では初期速度場から5ETTまで計算を行った後の結果について比較を行う。

4. 計算結果及び考察

4・1 非線形項の差分化 (高分解能計算)

128×128 の格子の場合について非線形項の差分化がエネルギースペクトルに及ぼす影響について検討を行った結果を以下に示す。図1に5ETTの時刻における、表1の(SS)の手法を用いた場合のエンストロフィー散逸スペクトル $D(k)=(k^4 E(k))^{(8)}$ を示す。本ケースの格子間隔 h はエンストロフィー散逸スケール $l=(\nu^3/\eta)^{1/6}$ の1.3倍である。6種類のスキーム、即ち表1の(SS)、(3₀S)、(3₁S)、(5₀S)、(5₁S)、(6S)の6ケースの計算結果を以下に示す。図2(a)、(b)は(SS)、(3₀S)、(5₀S)、(6S)のエネルギースペクトルの全波数領域および高波数領域における比較を示しているが、(3₀S)を用いた場合、(SS)に比べて、中～高波数の広い領域に亘ってエネルギースペクトルは過小に評価されている。これは4階微分に比例する数値粘性が過剰に働いているためである。一方、(5₀S)を用いた場合、(SS)に比べて、中程度まで

表1 計算手法

	Non-linear term	Diffusion term
SS	Spectral	Spectral
S2	Spectral	2nd-order FDS
S4	Spectral	4th-order FDS
3 ₀ S	3rd-order FDS ($C_1=1.0$)	Spectral
3 ₁ S	3rd-order FDS ($C_1=1/3$)	Spectral
3 ₁ 2	3rd-order FDS ($C_1=1/3$)	2nd-order FDS
5 ₀ S	5th-order FDS ($C_2=1.0$)	Spectral
5 ₁ S	5th-order FDS ($C_2=1/3$)	Spectral
5 ₁ 4	5th-order FDS ($C_2=1/3$)	4th-order FDS
6S	6th-order FDS	Spectral

の広い波数領域に亘ってエネルギースペクトルは良い一致を示している。しかし最高波数部の限られた領域ではやはり6階微分に比例する数値粘性によるエネルギーの低下がみられる。また式(4)において $C_2=0$ として得られる6次精度中心差分(Convectiveフォーム)、即ち表1の(6S)を用いた場合の結果は、6階微分に比例する数値粘性が存在しないため、(SS)の結果と最も良い一致を示している。次に3次精度風上差分について、数値粘性の効果を制御するパラメータ C_1 を1.0から1/3とした場合の結果を図3に示す。 $C_1=1/3$ の場合には $C_1=1.0$ の場合に比べて数値粘性の効果が減少し、中程度の波数領域でのエネルギーの増加がみられるが、(SS)との差異が依然存在している。5次精度風上差分について、数値粘性の効果を制御するパラメータ C_2 を1.0から1/3とした場合の結果を図4に示す。 $C_2=1/3$ の場合には $C_2=1.0$ の場合に比べて数値粘性の効果が減少し、高波数の領域まではほぼ完全に(SS)の結果と一致

図1 エンストロフィー散逸スペクトル
(128×128 , 5ETT)

していることが分かる。以上の議論から、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の1.3倍程度の分解能を有する計算について、以下のことが明らかになった。(1)3次精度風上差分は数値粘性が過大であり直接計算には適さない。(2)5次精度風上差分は、高波数領域までスペクトル法の結果と良い一致を示し、この場合、数値粘性の効果を制御するパラメータ C_2 は、1.0よりも1/3の方が良い。(3)6次精度中心差分はスペクトル法の結果に対して最も良い一致を示す。しかし十分な分解能を有さない計算では、中心差分スキームは安定性の欠如が報告されており⁽⁹⁾、6次精度中心差分が5次精度風上差分に対して必ずしも優れているとは言えない。そこで、次節では 64×64 の粗い格子に対して5次精度風上差分と6次精度中心差分の比較を行う。

4・2 非線形項の差分化 (低分解能計算)

64×64 の格子の場合について非線形項の差分化がエネルギースペクトルに及ぼす影響について検討を行った結果を以下に示す。図5に5ETTの時刻における、表1の(SS)の手法を用いた場合のエンストロフィー散逸

(a)全波数領域

(b)高波数領域

図2 スペクトル法と非線形項高次風上差分によるエネルギースペクトルの比較

スペクトル $D(k)$ を示す。本ケースの格子間隔 h はエンストロフィー散逸スケール l の2.6倍である。3種類のスキーム、即ち表1の(SS), (5₁S), (6S)の3ケースの計算結果を以下に示す。図6(a), (b)はそれぞれエネルギースペクトルの全波数領域および高波数領域の比較を示しているが、(5₁S)の結果は(SS)のそれと良い一致を示している。一方、(6S)についてはカットオフ波数付近のエネルギーが(SS)のそれよりも大きくなっている。このエネルギー過大評価の原因としては、aliasingによる誤差が考えられるため(付録を参照)、図7にaliasing誤差除去前後のエネルギースペクトルの比較を示す。図7から明らかなようにaliasing誤差除去後のスペクトルはカットオフ波数までほぼ完全に(SS)のそれと一致しており、本ケース程度の分解能の場合、aliasing誤差がエネルギースペクトルの結果に大きな影響を与えることが分かる。しかし、実際の差分計算では、波数空間におけるaliasing誤差の除去操作は困難である。そこで運動エネルギー保存型のArakawaフォームを用い、aliasing誤差の除去を施さない場合について計算を行った。図8はConvectiveフォームとArakawaフ

図3 3次風上差分の係数 C_1 のエネルギースペクトルへの影響

図4 5次風上差分の係数 C_2 のエネルギースペクトルへの影響

フォームのエネルギースペクトルの比較を示している。この図から、Arakawaフォームを用いることによりカットオフ波数近傍で(SS)に近い結果が得られることが分かる。以上の議論から、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の2.6倍程度の分解能を有する計算について、以下のことが明らかになった。(1) $C_2=1/3$ とした5次精度風上差分は、カットオフ波数近傍まで

図5 エンストロフィー散逸スペクトル
(64×64, 5ETT)

(a)全波数領域

(b)高波数領域

図6 非線形項5次風上差分, 6次中心差分によるエネルギースペクトルの比較

スペクトル法の結果と良い一致を示し、精度、安定性の両面から推奨される。(2)運動エネルギー非保存型のConvectiveフォームの6次精度中心差分を用いると、aliasing誤差のために、カットオフ波数近傍でのエネルギーがスペクトル法のそれよりも過大になる。(3)この過大評価はaliasing誤差の除去あるいは運動エネルギー保存型のArakawaフォームを用いることによって改善することができる。

4・3 粘性項の差分化 128×128の格子について粘性項の差分化がエネルギースペクトルに及ぼす影響について検討を行った結果を以下に示す。3種類のスキーム、即ち表1の(SS), (S2), (S4)を用いて数値計算を行った。図9はエネルギースペクトルの比較を示しているが、(S2)を用いた場合、高波数領域においてエネルギーが過大に評価されていることが分かる。一方、(S4)の結果はカットオフ波数近傍のわずかな相違を除いて(SS)の結果と良い一致を示している。これらは修正波数の概念から次のように説明される。即ち、図10に示す二階微分についての修正波数の比較から、2次精度中心差分、4次精度Pade法ともスペクトル法

図7 Dealiasingによるエネルギースペクトルの変化
(高波数領域)

図8 非線形項Convective, Arakawaフォームによるエネルギースペクトルの比較 (高波数領域)

に比べて修正波数が高波数側で小さくなっていることが分かる。これらの差異は各差分法の打ち切り誤差によるものであるが、この差異が差分化による粘性項の過小評価をもたらしている。以上の結果から、差分法によって直接数値計算を行う場合、粘性項自身の精度という観点からは4次精度以上の高次差分が有効であるといえる。しかしナビエ・ストークス方程式全体の差分化という観点からは、非線形項の差分化による数値粘性とのバランスが問題となり、必ずしも粘性項の高次差分化が有効であるとは限らない。次にその差分化手法の組み合わせの観点から検討を行う。

4・4 非線形項及び粘性項差分法の組み合わせ

128×128の格子について非線形項および粘性項の差分化がエネルギースペクトルに及ぼす影響について検討を行った結果を以下に示す。3種類のスキーム、即ち表1の(SS), (3₁2), (5₁4)を用いて数値計算を行った。差分手法組み合わせの選択については、(3₁S), (5₁S)の差分計算によるスペクトルの(SS)からのズレが、それぞれ中～高波数および高波数領域に現れていることを

考慮して、それらの波数帯でエネルギーを逆に粘性項差分によってバランスさせられるように選択した。図11(a), (b)はそれぞれエネルギースペクトルの全波数領域および高波数領域における比較を示しているが、(3₁2)の場合、非線形項3次精度風上差分の数値粘性が、粘性項2次中心差分による過小評価分に比しても過大であるため中～高波数の広い領域にわたって(SS)の結果からのズレが観察される。一方、(5₁4)の場合、非線形項5次精度風上差分の数値粘性が高波数領域に限定されているため、カットオフ波数近傍まで(SS)の結果と良い一致を与えていることが分かる。次に乱流統計量の比較を行う。図12および13に自乗平均変動速度 $(u_1)_{rms}$ およびテイラー微小尺度 λ ($= (u_1)_{rms} / (du_1/dx_1)_{rms}$) の2ETTから5ETTまでの変化を(SS), (3₁2)および(5₁4)について示す。これを見ると(5₁4)の結果は(SS)のそれとほぼ完全に一致しているのに対して、(3₁2)の結果は数値粘性のために、差分計算を行った2ETTから5ETTの全体に亘って $(u_1)_{rms}$ は過小に、 λ は過大に評価していることがわかる。以上の結果から、ナビエ・ストークス方程式全体の差分化と

図9 スペクトル法と粘性項差分によるエネルギースペクトルの比較 (高波数領域)

図10 二階微分の修正波数

(a)全波数領域

(b)高波数領域

図11 スペクトル法と非線形項、粘性項高次精度差分によるエネルギースペクトルの比較

図12 自乗平均変動速度の変化の比較
(2ETT~5ETT)

図13 テイラー微小尺度の変化の比較
(2ETT~5ETT)

いう観点からは、非線形項に $C_2=1/3$ とした5次精度風上差分、粘性項に4次精度差分の組み合わせが適切であることが分かる。

5. 結 論

二次元一様等方性乱流を対象として、 128×128 および 64×64 の2種類の格子を用いて、スペクトル法および高次精度差分法による数値計算を行い、エネルギースペクトルの比較検討を行った結果、以下の結論を得た。

(1) 非線形項の差分については、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の1.3倍程度の分解能を有し、カットオフ波数付近でエンストロフィー散逸スペクトルが低下しているような場合の計算においては、

(a) 3次精度風上差分は数値粘性が過大であり直接計算には適さない。

(b) 5次精度風上差分は、高波数領域までスペクトル法の結果と良い一致を示す。この場合、数値粘性の効果を制御するパラメータ C_2 は1.0よりも $1/3$ の方が良い。

(c) 6次精度中心差分はスペクトル法の結果に対して最も良い一致を示す。

(2) 一方、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の2.6倍程度の分解能を有し、カットオフ波数付近でエンストロフィー散逸スペクトルが低下していないような場合の計算においては、

(a) $C_2=1/3$ とした5次精度風上差分は、カットオフ波数領域までスペクトル法の結果と良い一致を示し、精度、安定性の両面から推奨される。

(b) 6次精度中心差分を用いるには、aliasing誤差の除去あるいは運動エネルギー保存型のArakawaフォームの使用が必要になる。

(3) 粘性項の差分については、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の1.3倍程度の分解能を有する計算においては、

(a) 4次精度以上の高次差分が有効である。

(4) また、ナビエ・ストークス方程式全体の差分化については、格子間隔 h がエンストロフィー散逸スケール l の1.3倍程度の分解能を有する計算に対して、

(a) 非線形項に $C_2=1/3$ とした5次精度風上差分、粘性項に4次精度差分の組み合わせが適切である。

文 献

- (1) Karniadakis, G.E. and Triantafyllou, G.S., *J. Fluid Mech.*, **238** (1992), 1.
- (2) Tutty, O.R. and Pedley, T.J., *J. Fluid Mech.*, **247** (1993), 179.
- (3) Rai, M.M., *AIAA Paper*, 87-0543 (1987).
- (4) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA paper*, 84-0340 (1984).
- (5) Rai, M.M. and Moin, P., *AIAA Paper*, 89-0369 (1989).
- (6) Lele, S.K., *Stanford Univ. CTR Manuscript* 107 (1990).
- (7) Tadmor, E., *J. Math. Anal. Appl.*, **103** (1984), 428.
- (8) Kraichnan, R.H. and Fox, D.G., *J. Fluid Mech.*, **66-3** (1974), 417.
- (9) Rai, M.M. and Moin, P., *J. Comp. Phys.* **96** (1991), 15.

付録 高次精度差分とaliasing誤差

aliasing誤差は連続関数を有限個の離散点上でサンプリングした場合に生じる誤差として知られており、乱流の直接数値計算においては、スペクトル法を用いて非線形項を物理空間で計算する場合

に生じる。実験等におけるデータサンプリング時に生じるaliasing誤差と数値計算において生じるaliasing誤差は、原理的には同じであるが、生成要因が多少異なる。前者のaliasing誤差は計測では捕らえられない高周波成分が計測データにaliasing誤差として出現することによる。これに対して、数値計算においては取り扱うデータ（格子点上で定義された速度等の変数）は、格子点によって決まる分解能内で完全に与えられており、aliasing誤差は含まれていない。しかし、非線形項を計算する際に分解能以上の周波数成分が生じるために、それらがaliasing誤差として現われる。この違いはDNSで生じるaliasing誤差を理解する上で非常に重要であり、以下に後者のaliasing誤差と高次精度差分について説明する。

区間 $[0, 2\pi]$ の N 個の離散点上で定義される速度 u を考え、Navier-Stokes方程式の非線形項（ $f=uu/dx$ ）の計算を行う。速度 u のフーリエ係数を $\hat{u}$ とすれば、フーリエ空間における上記の非線形項の厳密な表記は以下ようになる。

$$\hat{f}(k) = \sum_{m+n=k} i n \hat{u}(m) \hat{u}(n) \quad (\text{A})$$

ここで、 i は虚数単位である。擬スペクトル法を用いた場合、この非線形項を同様にフーリエ空間で表現すれば、

$$\hat{f}_{ps}(k) = \sum_{m+n=k} i n \hat{u}(m) \hat{u}(n) + \sum_{k=m+n \pm N} i n \hat{u}(m) \hat{u}(n) \quad (\text{B})$$

となり、右辺の第二項がaliasing誤差を表している。

次に、空間微分 du/dx に差分法を用いる場合を考える。差分法の空間微分はフーリエ空間の修正波数 k' として表現することが可能である。この修正波数を用いる差分法によって異なり、高次精度の差分法ほど厳密な波数に近づく。この修正波数を用いることにより、差分法を用いた場合についても、次のように非線形項をフーリエ空間で表すことができる。

$$\hat{f}_{fd}(k) = \sum_{m+n=k} i n' \hat{u}(m) \hat{u}(n) + \sum_{k=m+n \pm N} i n' \hat{u}(m) \hat{u}(n) \quad (\text{C})$$

式(A)と式(C)から、差分法を用いた場合の非線形項の誤差を次のように評価することができる。

$$\sum_{k=m+n} i(n'-n) \hat{u}(m) \hat{u}(n) + \sum_{k=m+n \pm N} i n' \hat{u}(m) \hat{u}(n) \quad (\text{D})$$

第一項は差分法の空間微分の精度のみに関する誤差であり、純粋な差分誤差である。第二項は非線形計算によって生じるaliasing誤差である。

一般に、差分法を用いて数値計算を行う場合、上述のaliasing誤差はそれほど注目されない。これは低次の差分法を用いた場合、修正波数 k' が厳密な波数 k に

比べて高波数側で非常に小さいためであり、aliasing誤差が計算結果に陽に現われないためである。しかし、高精度の差分法を用いた場合、修正波数が厳密な波数に近づくため、第一項の差分誤差は減少するが、第二項のaliasing誤差は増加する。この結果の一例を以下に示す。

付図1は、DNSデータから抽出した速度データを用いて求めた式(D)の第一項のエネルギーを示している。ここで、DNSデータはスペクトル法を用いて $96 \times 96 \times 96$ の格子点上で計算した一様等方性乱流である。また図中の2FDは二次精度中心差分、4FDは四次精度中心差分、6FDは六次精度中心差分を表している。上述のように第一項は高次精度差分を用いるほど減少するが、第二項は付図2に示すように差分の精度を上げるほど大きくなる。付図2には比較のために、スペクトル法を用いた場合に生じるaliasing誤差（式(B)の右辺第二項）を示してある。これらのことから、高次精度差分を用いて非線形項を計算した場合、aliasing誤差は差分誤差に比べて無視できない大きさとなることがわかる。

付図1 差分誤差（式(D)の第一項のエネルギー）

付図2 aliasing誤差（式(D)の第二項のエネルギー）