弱い衝撃波のマッハ反射*

足立 孝^{*1}, 鈴木立之^{*2}, 小林 晋^{*1}

Mach Reflection of a Weak Shock Wave

Takashi ADACHI, Tateyuki SUZUKI and Susumu KOBAYASHI

The present paper reports the experimental and theoretical results for oblique reflection of weak shock waves. We introduce a modified three-shock theory to explain the well-known von Neumann paradox for weak Mach reflection. The theory proposed here considers the effect of slipstream divergence immediate behind a triple point. By giving the angle of slipstream divergence parametrically, we obtain some characteristics, such as the angle of reflection, around the triple point. We compare the numerical results thus obtained with experimental results. For weak Mach reflection, the modified three-shock theory gives physically realistic solutions, even when the von Neumann's classical three-shock theory has no solution. All the experimental data exist in the domain given by the present theory.

Key Words: Shock Wave, Mach Reflection, von Neumann Paradox, Three-shock Theory, Modified Theory, Compressible Flow, Fluid Dynamics

1. ま え が き

例えば衝撃波管などの装置によって発生した平面衝撃波が傾斜面に入射した場合、一般に反射という現象が現れる。その場合、衝撃波の反射形態は大別して二つに分類される。一つは正常反射と呼ばれるもので、この場合には入射衝撃波(以下では入射波と略することもある)が斜面に当たっている点(これを反射点と称する)からただちに反射衝撃波(反射波と略することもある)が発生する。もう一つの反射形態はマッハ反射と呼ばれるもので、入射波と反射波の交点が斜面上から浮き上がった位置に存在し、その点と斜面上を結ぶ新たな衝撃波が発生するものである。正常反射にはみられないこの新たな衝撃波をマッハステムと呼び、入射波、反射波、マッハステムの三つの衝撃波の交点を三重と呼んでいる。入射波および反射波を通過した流れは、滑り面と呼ばれる速度および温度に関する不連続面を挟んで、マッハステムを通過した流れと隔てられている。反射形態が正常反射となるかマッハ反射と

なるかは、媒質の熱力学的特性値(例えば比熱比)が与えられた場合、入射衝撃波マッハ数と斜面傾斜角によって定まる⁽¹⁾⁽²⁾。マッハ反射はさらに細かく分類することもできるが⁽²⁾、いずれも高いマッハ数で非定常性が顕著な場合に観察されるもので、本論文の範囲外なので立ち入らないことにする。文献によっては弱い衝撃波のマッハ反射をフォン・ノイマン反射と呼ぶこともある⁽³⁾。

正常反射の場合には、関与する衝撃波が入射波と反射波の二つである。一方、衝撃波波面前後の物理量(圧力、密度、温度、速度)の関係はランキン=ユゴニオの関係式で与えられる。したがって、反射点近傍で反射波の幾何形状を平面波で近似すれば、入射波前方の物理量と反射波後方の物理量の関係は、反射点に固定した座標系において斜め衝撃波に対するランキン=ユゴニオの関係式を繰り返して適用することにより求めることができる。このとき、反射波後方における速度の方向は斜面に沿っている必要がある。これがノイマンの二衝撃波理論と呼ばれるものである⁽¹⁾⁽²⁾。

同様に、マッハ反射の場合には、入射波・反射波・マッハステムの三つの衝撃波が関与している。入射波前方の物理量と反射波後方の物理量の関係は、三重点に固定した座標系においてランキン=ユゴニオの関係式

* 原稿受付 平成5年11月19日。

^{*1} 正員、埼玉工業大学工学部 (〒369-02 埼玉県大里郡岡部町大字普濟寺 1690)。^{*2} 正員、富山県立大学工学部 (〒939-03 富山県射水郡小杉町黒河 5180)。

を適用して求められる。マッハステム前方の状態は入射波前方の状態と同じだから、マッハステム後方の物理量も同様にして求められる。反射波後方の流れとマッハステム後方の流れは、滑り面で隔てられているが、滑り面の両側の圧力と速度の方向は一致していなければならない(速さは一致する必要はない)。これがノイマンの三衝撃波理論である⁽¹⁾⁽²⁾。

ノイマンの理論はマッハ数が約 1.5 以上の強い衝撃波に対しては実験結果と非常によく一致した。しかし、マッハ数が約 1.5 より小さい入射衝撃波や、媒質が希薄気体の場合、斜面に粗さがある場合の実験結果はノイマンの理論との不一致が見いだされた。このような理論と実験結果の不一致はノイマン・パラドクスと呼ばれ⁽²⁾、これまでも多数の研究者によって研究が行われているが、未だその根本的原因については明確な結論が得られていないというのが真相である。

ノイマン・パラドクスの原因は、ノイマンが解析に用いた仮定が成り立たなくなったことに起因すると考えられている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。先に述べたように、ノイマンの理論は衝撃波が無限の空間に存在するとして境界の存在を無視している。したがって、斜面に粗さがあるなど境界の影響が顕著な場合に理論と実験が一致しないのはむしろ当然と考えられる。また、ノイマンは反射点や三重点に固定した座標系で考えたため、流れ場がいわゆる準定常でない場合にも成り立たないだろう。衝撃波面や滑り面を数学的な不連続面として取り扱っているため、希薄気体のように分子の平均自由行程が大きく、その結果として衝撃波の厚さが無視できなくなる場合にも、成り立たなくなることが十分に考えられる。

これ以外に、ノイマンの仮定した条件の中で滑り面に関する境界条件の妥当性も従来から議論の的となっている^{(4)~(7)}。Skews⁽⁶⁾は初期に境界条件の妥当性について検討したが、例えば入射波・反射波の関係について実験結果との比較が必ずしも明確ではない。最近では、Olim-Dewey⁽⁷⁾が反射波後方の圧力と三重点軌跡角と斜面傾斜角の和の間に実験結果から得られた線形関係を仮定して解析を行っているが、その物理的意味がはっきりしないという憾みがある。

本研究では、弱い衝撃波の斜め反射について衝撃波管を用いた実験を行い、三衝撃波理論の境界条件を修正してノイマン・パラドクスを説明する仮説を検証することを目的としている。

2. 実験

実験に使用した衝撃波管は、被駆動部が 65×30

図 1 傾斜面上における衝撃波のマッハ反射

mm のく形断面のもので、観測部の両面には 62×94 mm の石英ガラスがはめ込まれている⁽⁸⁾。作動気体は空気、入射衝撃波前方の条件は大気圧・室温である。

波面形態の可視化にはシュリーレン光学系を採用し、閃光時間 180 ns のキセノン光源(菅原研究所, NPL-5)を使用した。入射角・反射角の測定はネガフィルムを直接、実物投影機(ニコン, V-12)で拡大して測定し、さらに位置による角度の収差を考慮して補正を行った。入射角・反射角の定義を図 1 に示す。 $\gamma_i, \gamma_r, \chi, \theta_w$ はそれぞれ入射角, 反射角, 三重点軌跡角, 斜面傾斜角で, I, R, M, S, T は入射波, 反射波, マッハステム, 滑り面, 三重点を示す。三重点軌跡角は流れ場を準定常と仮定して定義している。入射衝撃波マッハ数を M_s とすると、三重点に固定した座標系では入射波前方からマッハ数 $M_1 = M_s / \sin \gamma_i$ の流れが入射波に対して γ_i の角度で流入することになる。

3. 修正三衝撃波理論

3・1 三衝撃波理論 三重点に固定した座標系からながめた三重点周りの流れ場を図 2 に示す。図では三重点近傍を考えて、各種衝撃波は平面で近似している。(1)~(4)はそれぞれ、入射波およびマッハステム前方の領域、入射波と反射波で挟まれた領域、反射波後方の領域、マッハステム後方の領域を示している。一点鎖線は三重点の軌跡で、入射角・反射角の基準となる。マッハ数 M_1 で入射波を通過した流れは角度 θ_i だけ方向を曲げられ、マッハ数 M_2 で反射波に流入し、流れの方向は θ_r だけ曲げられる。一方、マッハステムを通過した流れは角度 θ_m だけ方向を曲げられる。衝撃波を通過する際の流れの偏角の符号は反時計回りを正、時計回りを負と定める。したがって、滑り面 S の三重点の軌跡となす角は $\theta_i + \theta_r$ となる。圧力、マ

(a) 滑り面の広がりを見ない場合

(b) 滑り面の広がりを見込んだ場合

図2 三重点近傍の流れ場

マッハ数を p および M で表し、領域(1)～(4)における値は添字によって示すことにする。例えば、 p_1 は領域(1)における圧力である。図2に斜め衝撃波関係式を適用すれば、以下の式を得る。

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\chi M_1^2 \sin^2 \gamma_i - (\chi - 1)}{\chi + 1} \quad (1)$$

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{2\chi M_2^2 \sin^2 (\gamma_r - \theta_i) - (\chi - 1)}{\chi + 1} \quad (2)$$

図3 圧力-偏角衝撃波極線 ($M_s=1.41$)

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{2\chi M_1^2 \sin^2 \gamma_m - (\chi - 1)}{\chi + 1} \quad (3)$$

$$M_2^2 = \frac{(\chi - 1) M_1^2 \sin^2 \gamma_i + 2}{\sin^2 (\gamma_i + \theta_i) \{2\chi M_1^2 \sin^2 \gamma_i - (\chi - 1)\}} \quad (4)$$

$$\tan \theta_i = \frac{2 \cot \gamma_i (M_1^2 \sin^2 \gamma_i - 1)}{M_1^2 (\chi + \cos 2\gamma_i) + 2} \quad (5)$$

$$\tan \theta_r = \frac{2 \cot (\gamma_r - \theta_i) \{M_2^2 \sin^2 (\gamma_r - \theta_i) - 1\}}{M_2^2 \{\chi + \cos 2(\gamma_r - \theta_i)\} + 2} \quad (6)$$

$$\tan \theta_m = \frac{2 \cot \gamma_m (M_1^2 \sin^2 \gamma_m - 1)}{M_1^2 (\chi + \cos 2\gamma_m) + 2} \quad (7)$$

ここで、 γ_m はマッハステムの入射角、 χ は媒質の比熱比である。

古典的な三衝撃波理論では、滑り面の両側における圧力と流れの向きが等しいとしている。すなわち、

$$p_4 = p_3 \quad (8)$$

$$\theta_i + \theta_r = \theta_m \quad (9)$$

以上の9個の方程式は11個の変数 p_2/p_1 , p_3/p_2 , p_4/p_1 , M_1 , M_2 , θ_i , θ_r , θ_m , γ_i , γ_r , γ_m を含んでいる。入射衝撃波マッハ数 M_s と入射角 γ_i が与えられれば、 $M_1 = M_s / \sin \gamma_i$ の関係から M_1 が定まり、方程式系(1)～(9)からその他の未知数が原理的に決まることになる。

横軸に偏角、縦軸に領域(1)の圧力で無次元化した圧力をとった衝撃波極線を $\chi=1.4$, $M_s=1.41$ について描いてみる(図3)。図で I は衝撃波前方の状態が(1)である時の、衝撃波後方の状態としてとりえる全ての状態を描いたものである [図で座標(0, 1)が状態(1)に対応]。実験では $\gamma_i=58.3^\circ$ に対してマッハ反射が確認された。この値に対して曲線 I 上の状態(2)から出発する衝撃波極線 R を描く。反射波後方の状態(3)における圧力とマッハステム後方の状態(4)における圧力は三衝撃波理論によれば一致するはずだが

表 1 三重点近傍の諸量の実験値と計算値の比較
($M_s=1.41$, $\theta_w=22.5^\circ$)

properties	measurement	calc. A ($\delta \neq 0, \varepsilon = 0$)	calc. B ($\delta = 0, \varepsilon \neq 0$)
γ_i [deg]	58.2 ± 0.2	58.2 ± 0.2	58.2 ± 0.2
γ_r [deg]	77.3 ± 0.2	77.3 ± 0.2	77.3 ± 0.2
γ_m [deg]	66.8 ± 0.5	66.0 ± 0.3	71.6 ± 0.1
$\theta_i + \theta_r$ [deg]	15.2 ± 0.3	15.1	15.1
δ [deg]	—	-0.97	0
ε / p_3	—	0	0.083 ± 0.05

ら, I と R は交わるはずであるが, 現実には交点を持たない。すなわちノイマン・パラドクスが観測されたことになる。

3・2 修正三衝撃波理論 前述のノイマン・パラドクスを説明するために, 三衝撃波理論に修正を加える。ノイマンの理論では二つの式(8), (9)が滑り面における条件として課せられていた。ここではその条件を緩和して, 次のような条件で置き換えることにする。

$$p_4 = p_3 + \varepsilon \quad \text{.....(10)}$$

$$\theta_i + \theta_r = \theta_m + \delta \quad \text{.....(11)}$$

すなわち, 滑り面の両側で圧力差 ε があり, 流れの広

(a) $M_s=1.10$

(c) $M_s=1.30$

(b) $M_s=1.20$

(d) $M_s=1.41$

図 4 入射角と反射角の関係

がり δ を考える。前述の偏角の符号の定義から $\delta < 0$ が滑り面の広がりに対応している。滑り面の両側で圧力差が存在するとした場合、滑り面が薄ければ圧力の不連続面、すなわち衝撃波になるが、面を過ぎる流れがない以上、これは物理的に不可能と考えざるをえない。したがって、前提として三重点が有限の大きさを持ち、滑り面が厚みをもって、その層内で圧力こう配があると考えるのが妥当であろう。

修正三衝撃波理論で導入された二つのパラメータがどの程度の影響を与えるか、それぞれ独立に変えて調べることにする。 M_s, γ_i, γ_r は実験で測定された値を与え、式(1)～(7)および(10), (11)を解くが、計算Aでは $\varepsilon=0$ として δ の値を求め、計算Bでは $\delta=0$ として ε を求める。結果は表1に示してある。実験結果と比較する値は、実験から容易に測定可能な γ_m と $\theta_i + \theta_r$ とした。

この結果から、滑り面の広がりのみを考慮した場合には測定値と計算はかなりよく一致しているが、圧力差のみを考慮した場合には測定値(特に γ_m)と著しい不一致を生じた。また、そのときの圧力差もかなり大きな値で非現実的である。このことから、実際には圧力差よりも滑り面の広がりの方が支配的な影響を及ぼしていることが分かる。第4章では $M_s=1.10 \sim 1.41$ について、 $\delta \neq 0, \varepsilon=0$ とした場合の修正三衝撃波理論と実験結果を比較する。

4. 結果と考察

図4は実験結果と修正三衝撃波理論で滑り面に広がり角 δ をパラメータ的に与えて得られた結果を比較したものである。破線 RR は二衝撃波理論、 MR は三

衝撃波理論を示し、一点鎖線 MR (trivial) は三衝撃波理論で反射波が非常に弱い場合の極限(音波)として得られる曲線で、自明解と呼ばれているものである⁽⁹⁾。○はマッハ反射、●は正常反射の実験データである。入射角が増加するとともに、実験結果は古典的な三衝撃波理論から隔たり、自明解に近づく。古典理論と実験データの懸隔はマッハ数が小さいほど著しい。古典理論ではマッハ反射が起こり得ない入射角においても、滑り面の広がりを考慮した修正三衝撃波理論ではマッハ反射が可能である。実験データは古典的な三衝撃波理論、二衝撃波理論、自明解の三つの曲線に囲まれた領域内に存在していることが特徴的である。入射角が大きいほど自明解に近づき、例えば $M_s=1.20, \gamma_i=64.3^\circ, \gamma_r=86.2^\circ$ の場合、 $\delta=-0.013^\circ, \gamma_m=64.7^\circ, p_3/p_2=1.0019$ となり、反射波が極めて弱いことが確認される。マッハ数が大きいほど δ をパラメータとして与えて得られた曲線は古典理論に近づいていく傾向が見られる。このことは、比較的高いマッハ数において実験結果が古典理論とよく一致するように見えても、滑り面にわずかな広がりがある可能性を示している[図4(d)で $43^\circ < \gamma_i < 46^\circ$ のデータ]。

図5は $M_s=1.41, \theta_w=37.5^\circ$ の場合の三重点近傍のシュリーレン写真である。写真の二次元性はよく成り立っている。実物投影機を用いた精密測定によって、滑り面の上下で約 $3.8 \pm 0.5^\circ$ の広がりが観測されたが、Skews⁽⁶⁾ が述べている上限(1.2°)よりかなり大きい。これは $\gamma_i=49.5^\circ, \gamma_r=62.6^\circ$ のデータとして図4(d)に示されているが、対応する計算値は $\delta=-4.16^\circ$ で、修正三衝撃波理論の妥当性を示している。圧力に

図5 弱い衝撃波のマッハ反射のシュリーレン写真 ($M_s=1.41, \theta_w=37.5^\circ$)

図6 入射波とマッハステムに関する入射角の関係 ($M_s=1.41$)

については、伝ばしている衝撃波に伴う滑り面の両側の圧力を測定することは困難で、ここでは測定していない。

図6は修正三衝撃波理論と実験について、入射衝撃波とマッハシステムに関する入射角の関係で比較したものである。▲は計算A, ●は計算B, □は実験値である。計算は Ms , γ_i , γ_r の実験値に基づいて行った。表1の例で示されているとおり、僅かな滑り面の広がりだけを仮定した場合には修正三衝撃波理論は実験結果とよく一致した。一方、圧力差だけを仮定した場合には実験結果の一致は良好ではなく、しかも計算された圧力差はかなり大きな値となり、現実的なものと考えられない。

本論文で述べた修正三衝撃波理論は古典的な三衝撃波理論と異なり、緩和された境界条件をパラメータ的に与える必要がある。このことは、本来は与えられた境界条件のもとで場全体を解かなければならない問題を、局所的な保存法則を用いて、不連続面で区切られた場のそれぞれが一樣であると仮定して求めたことの当然の結果である。今後は滑り面の広がり物理的原因を理論的・実験的に調べたり、数値計算によって場全体を解いて、広がり角を求める必要がある。

5. 結 論

滑り面に関する境界条件を緩和した修正三衝撃波理論について数値的に調べ、実験と比較した結果、次のような結論が得られた。

(1) 滑り面の広がりを考慮することによって、従

来の古典的な三衝撃波理論では不可能だった実験結果が説明できた。

(2) 滑り面の両側での圧力差の効果は、広がり比べると著しく小さく、ほとんど無視できることが分かった。従って、滑り面の広がりにはノイマン・パロックスの有力な原因の一つと考えられる。

(3) 実験で得られた写真から滑り面の広がりが確認できた。

文 献

- (1) 生井・松尾, 衝撃波の力学, (1983), 126, コロナ社.
- (2) Den-Dor, G., *Shock Wave Reflection Phenomena*, (1992), 11, Springer-Verlag.
- (3) Colella, P. and Henderson, L.F., The von Neumann Paradox for the Diffraction of Weak Shock Waves, *J. Fluid Mech.*, **213**(1990), 71.
- (4) Sakurai, A., On the Problem of Weak Mach Reflection, *J. Phys. Soc. Japan*, **19**(1964), 1440.
- (5) Sakurai, A., Henderson, L.F., Takayama, K., Walenta, Z. and Colella, P., On the von Neumann Paradox of Weak Mach Reflection, *Fluid Dyn. Res.*, **4**(1989), 333.
- (6) Skews, B.W., The Flow in the Vicinity of a Three-shock Intersection, *CASI Trans.*, **4-2**(1971), 99.
- (7) Olim, M. and Dewey, J.M., A Revised Three-Shock Solution for the Mach Reflection of Weak Shocks ($1.1 < M_i < 1.5$), *Shock Waves*, **2**(1992), 167.
- (8) Adachi, T., Kobayashi, S. and Suzuki, T., An Experimental Analysis of Oblique Shock Reflection over a Two-dimensional Multi-guttered Wedge, *Fluid Dyn. Res.*, **9**(1992), 119.
- (9) Kobayashi, S., Adachi, T. and Suzuki, T., Oblique shock reflection over porous media with large porosity, *Theoret. Appl. Mech.*, **42**(1993), 239.