構造と流体の連成問題のためのメッシュリゾーニング技法*

滝 佳 弘^{*1}, 鳥 居 弘 志^{*1}

Mesh Rezoning Technique for Fluid-Structure Interaction Problem

Yoshihiro TAKI and Hiroshi TORII

The Space-Time Galerkin method provides a framework for solving fluid-structure interaction problems # (FSI). These formulations allow us to use different fluid meshes for each time-slab. The space-time elements can be oriented in time, thus accommodating spatial deformation. The mesh generator between time slabs and adaptive mesh rezoning techniques within each time-slab play important roles in FSI problems. We have developed an adaptive mesh rezoning technique with the least-square constrained conditions, which prevents the element located close to the moving boundary from breakdown trouble and maintains its well-conditioned shape. The technique is entirely general in that it can be effectively applied to structured and unstructured meshes.

Key Words: Fluid-Structure Interaction, Mesh Rezoning, Least-Square Constraint

1. は じ め に

構造と流体が連成する問題は航空機, リニア新幹線車両, 車, 橋りょう, タンク内の流体の運動, 海洋構造物, 生体力学(血管内の血流 etc)等たくさんある。これらの連成問題の解析に空間・時間ガラーキン法が注目されている。この理論では一つの時間ステップの間で要素の変形が許されるので, 時々刻々と変化する境界形状を正確に update しながら適正なメッシュを維持し計算を進めることができる。

流体・構造連成問題をここでは, (1)流体の剛体運動が流れに影響を与える場合と, (2)構造物の変形が流れに影響を与える場合に分類する。前者の場合には航空機やリニア新幹線車両のように構造物の移動量が比較的大きく周りの流体領域の面積は変わらないが形状を大きく変える。後者の場合, 例えば生体力学の血管中の血液は流れる量と圧力に影響されて, 断面形状が円形からまゆ形まで大きく面積が変動する⁽⁷⁾。これらをモデル化するためには構造物の運動と変形に, 追

従してメッシュの変形, あるいは再メッシュを制御する技術が重要になる。

そこで特定の問題に限定することなく, また構造化・非構造化メッシュにかかわらず一般的に取扱えるような適合形メッシュリゾーニングの方法として, ラプラス方程式を利用した手法について研究する。この手法の問題点として, 境界の移動量が大きい場合, 大きなサイズのメッシュは変形量を吸収できるが, 比較的小さいメッシュはブレイクダウンすることが指摘されている。それに対して Masud-Hughes⁽¹⁾ は小さなメッシュに対して変形量 ∇u^h を小さく制御する拘束条件を最小二乗法を用いて変分形式に導入すると改善されることを示した。しかし, 領域の面積や体積が大きく変化する問題ではよい結果が得られていない。そこで本研究ではひずみと直ひずみを拘束する手法を導入し, 変形量, ひずみ, 直ひずみの3種類の拘束条件についてそれぞれの特徴を調査する。

2. 空間・時間ガラーキン法

FEM での空間・時間ガラーキン法は, 図1に示すように一つの時間スラブの間で空間メッシュの時間軸に関して変化を考慮し, 支配方程式の積分形式を組み立てる。そのため隣り合う時間スラブでは異なる空間メ

* 平成5年7月8日 第35回構造強度に関する講演会において講演, 原稿受付 平成5年9月2日。

*1 正員, 名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

図1 有限要素離散化：空間・時間スラブ

ッシュを使うことが可能になる。このことは構造解析の結果からある時間スラブで流体領域の変化を考慮できるので、前段の解を初期値として、次段の時間スラブの両サイドの解を求めるアルゴリズムが考えられる。

いま微分方程式が $G(V, t)$ と与えられたとき、ここに、 t は時間、 V は未知変数、 W を重み関数とすると、その空間・時間ガラーキン形式は次式のように与えられる。

$$0 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_x W \cdot G(V, t) dx dt + \int_x W(t_n^+) \cdot [V(t_n)] dx \quad (1)$$

ここで、右辺の第1項を空間座標に関して部分積分し、 V 変数と W 重み関数の微分係数の階数を揃える操作をし、境界条件を考慮すると弱形式の一般形が得られる。また右辺第2項は次に定義される量を用いて、

$$V(t_n^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} V(t_n + \epsilon) \quad (2)$$

隣り合う時間スラブの間での連続性を補償するために加えた Jump condition である。

$$[V(t_n)] = V(t_n^+) - V(t_n^-) \quad (3)$$

メッシュのゆがみがある限界を超えるまではリゾーニングで対処し、そしてこの限界を超えたら新しいメッシュにして適正な形状を維持することになる。そうしてメッシュの変更回数を減らせば要素や節点に関するデータ構造を変更しなくてすむし、解の写像に際しての誤差を減らすことができる。

3. リゾーニングの技法

リゾーニングには二つの手法^{(2)~(6)}がある。一つは主要な境界の移動方向に沿ってメッシュの移動を比例分布させる。もう一つは、境界上の節点に与えられた移動量を境界条件として与え、微分方程式を解いて全体

のメッシュを決めるやり方がある。ここでは後者の、より一般的な扱いがしやすいラプラス方程式を用いる手法⁽¹⁾を採用する。

3・1 メッシュリゾーニングのための境界値問題

$\Omega \subset R^{n_{sd}}$ は滑らかな境界 Γ に囲まれた有界な領域とする。ここに、 $n_{sd} \geq 2$ は空間次元数とする。境界 Γ は次のように分解できると仮定する。

$$\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_f \quad (4)$$

$$0 = \Gamma_m \cap \Gamma_f \quad (5)$$

ここに、 Γ_m と Γ_f はそれぞれ移動と固定境界とする。リゾーニングのための境界値問題は次のように述べられる。移動する境界での変位 g が規定されて、領域内のメッシュの変位 $u: \Omega \rightarrow R^{n_{sd}}$ を以下の条件を満たすように決定する。

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_m \quad (7)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_f \quad (8)$$

ここに、 $u = \{u_i\}$, $i = 1, \dots, n_{sd}$ であり、式(6)~(8)はそれぞれ支配方程式、移動境界と固定境界条件である。一次元の場合には

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

より、変位成分は領域内では線形に分布することになる。二次元以上の場合では、このかぎりでない。

3・2 境界値問題の変分形式 $L_2(\Omega)$ は Ω 上で Square-Integrable 関数空間とする。そして、 $H^1(\Omega)$ を $L_2(\Omega)$ の関数の微分係数が Square-Integrable な関数空間であるとする。次に、試行関数 u と重み関数 w の集合 S , V を次式で表す。

$$S = \{u | u \in [H^1(\Omega)]^{n_{sd}}, u = g \text{ on } \Gamma_m \text{ and } u = 0 \text{ on } \Gamma_f\} \quad (9)$$

$$V = \{w | w \in [H^1(\Omega)]^{n_{sd}}, w = 0 \text{ on } \Gamma\} \quad (10)$$

3・1 節の境界値問題に対する変分形式は変位 g が与えられて、次の条件を満たす $u \in S$ を見つけることになる。

$$(\nabla u, \nabla w) = 0, \forall w \in V \quad (11)$$

ここに、 $(\cdot, \cdot)$ は内積であり、 $(\nabla u, \nabla w) = \sum_{i,j=1}^{n_{sd}} (u_{i,j}, w_{i,j})$ とかけ、対称性と双線形性がある。式(11)はまた、次式で定義する $\Pi(u)$ を最小にするような $u \in S$ を見つける最小値問題と等価になる。

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} (\nabla u, \nabla u) \quad (12)$$

$$\Pi(u) \leq \Pi(v), \forall v \in S \quad (13)$$

そして、 $\Pi(u)$ の停留条件を求め、さらに部分積分として Lagrange-Euler 方程式を求めると境界値問題(6)~(8)となることは容易に示せる。

図2 メッシュのブレイクダウン例

4. 変形拘束の付帯条件付変分問題

多くの粘性流の計算では、境界層内部のように小さなスケールの効果が重要なところでは要素も十分小さくする必要がある。構造と流体が連成する問題ではこの境界が移動する。メッシュリゾーニングでは移動に伴って小さな要素は大きな移動と変形を受けることになる。その結果としてメッシュのブレイクダウン(図2)が起こることがある。

これを防ぐために個々の要素のサイズに応じて変形に対する拘束条件を与え適正なメッシュを維持する必要がある。Masud-Hughes は最小二乗法を用いて、次式のように変形量 ∇u^h を制御する拘束条件付きはん関数が分類(1)の問題に効果があることを示した。

$$\tilde{H}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau^e (\nabla u^h, \nabla u^h)_{\Omega^e} \dots \dots \dots (14)$$

ここに、添字 h は要素に関する量を表し、 τ^e は無次元量でペナルティを表す。要素サイズを反映したペナルティの決め方の一つの候補として Masud は次式を提唱している。

$$\tau^e = \frac{1 - \Delta_{\min}/\Delta_{\max}}{\Delta^e/\Delta_{\max}} \dots \dots \dots (15)$$

ここに $\Delta_{\max}$, $\Delta_{\min}$, Δ^e はそれぞれ最大, 最小, 評価対象の要素面積(体積)とする。この条件は小さい要素には強い拘束を課して変形にくくし、一方で大きな要素に変形許容度を与えて境界の変化の主要な部分を吸収させようとするものである。図3に式(15)で示された τ^e の要素サイズに応じた拘束条件の重みをグラフにした。

式(14)の変分形式は u に $u + \delta w$ を代入して、 δ に

図3 ペナルティー係数の大きさの分布

関しての停留条件を求め $\delta \rightarrow 0$ とおくことで得られる。

$$0 = \left[\frac{d}{d\delta} \tilde{H}(u + \delta w) \right]_{\delta=0} = (\nabla u, \nabla w) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau^e (\nabla u^h, \nabla w^h)_{\Omega^e} \dots \dots \dots (16)$$

この拘束条件付き境界値問題に対する変分形式は変位 g が与えられて、次の条件を満たす $u \in S$ を見つけることになる。

$$(\nabla u, \nabla w) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau^e (\nabla u^h, \nabla w^h)_{\Omega^e} = 0, \forall w \in V \dots \dots \dots (17)$$

本研究では面積変化のある場合にも有効な拘束条件を探すために、次の3種類を考慮しその特徴を調べる。

$$(\nabla u^h, \nabla u^h) = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$$(\varepsilon^h, \varepsilon^h) = 0 \quad (\text{Strain}) \dots \dots \dots (19)$$

$$(\varepsilon_v^h, \varepsilon_v^h) = 0 \quad (\text{Volume}) \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 ε と ε_v はそれぞれ、ひずみと直ひずみであり、次式で定義する。

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\varepsilon_v = \text{diag}(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(17)の第2項をそれぞれ $[\varepsilon^h(u), \varepsilon^h(w)]_{oe}$ か、または $[\varepsilon^h(u), \varepsilon^h(w)]_{oe}$ で置き換えれば式(19), (20)の拘束条件に対する変分形式になる。

一般に構造と流体の連成問題を解くときには要素数も数千〜と非常に多くなる。これを効率よく解くためにはプリコンディション付きの Element-By-Element ソルバ⁽⁸⁾のような反復解法を利用することになる。 ∇u^h と ε_v を拘束する場合には各変位成分が独立に取扱え、しかも共通の係数行列をもつので解くべき連立方程式のサイズは一成分だけで、残りの成分は再利用で済むことがわかる。一方、ひずみ ε を拘束する場合は各変位成分の連成項のため、要素単位での解くべき連立方程式のサイズが二次元問題では2倍になり不利となる。

5. 数 値 計 算 例

この章では付帯条件付き適合形リゾーニングの技法を種々の二次元の問題に応用してよい結果を得たので、そのうちの三つの場合について説明する。実用の問題ではリゾーニングを必要とする要素数が数千〜数万と大きくなるので効率的な連立方程式の解法が不可欠になる。ここでの計算にはプリコンディション付き

共役こう配法の Element-By-Element ソルバを用いた。

5.1 面積変化のある正方形 図4に示すように正方形領域の上辺に下向きの変位を与えた。最大変位は一辺の長さの40%を与えた場合では、 ∇u と ε の条件ではメッシュにつぶれた部分が生じている。ところが、直ひずみ ε_v を制御する場合にはブレイクダウンもなく非常によいメッシュが得られている。この場合には70%の最大変位まで適正なメッシュが得られた。

5.2 剛体が運動する長方形領域 長方形領域の中に置かれた弾丸形の物体が、物体長の1/3だけ左方向へ並進移動し、さらに重心の周りに15°回転する剛体運動の(図5)場合を解いた。拘束条件のない場合は物体の近傍で要素形状の反転が起こるが、 ∇u を拘束する方法は非常によい結果を与える。直ひずみ ε_v を制御する場合には物体近傍で要素のゆがみが大きくなり、それに比べて ∇u を拘束する方法はよい結果を与えた。

5.3 まゆ形につぶれる円形断面 圧縮と膨張が同時に起こる場合として円形断面の外周に沿って全体がまゆ形になるように変位を与えた(図6)。縦軸に沿って中央の最大変位は下方に半径の50%、横軸方向に25%与えた。変形の拘束条件を付けていない場合には上側の要素はほとんどつぶれてしまっているが、直ひ

図4 面積変化を受ける正方領域、拘束条件 ∇u , ε , ε_v の比較

図 5 ソリッドモデル長方形領域内を剛体運動する場合の拘束条件 ∇u , ϵ , ϵ_v の比較

図 6 円形断面がつぶれる場合の拘束条件 ∇u , ϵ , ϵ_v の比較 (対称性により 1/4 領域のみ考慮)

ずみ ϵ_v を拘束すると理想的な要素形状を維持したまま変形している。

6. ま と め

ラプラス方程式を使用した適合形リゾーニング技法は領域の面積が単調に拡張するときはいい結果を与えてくれる。しかし、領域の縮小が起こったり剛体の運動に影響されるような場合には適正な要素形状を保持するのは難しい。

要素のサイズに応じて変形に付帯条件を加えると、状況はかなり改善される。3種類の拘束条件について調べ、次の結果がえられた。剛体運動がある場合には Masud と Hughes の ∇u を拘束する方法が効果があり、直ひずみ ϵ_v を制御する方法は面積(体積)変化が大きいときに非常に有効であった。ひずみを拘束する方法は両者について多少の改善が見られるが実用性の観点からは各変位成分間の連成のため要素単位での解くべき連立方程式のサイズが二次元では2倍、三次元では3倍になり難点がある。

今後の研究課題としては、より一般性をもったものに発展させるためには剛体運動と面積(体積)変化が同

時に起こるような場合にも有効な拘束条件を検討する必要がある。また、三角形要素、三次元要素、境界節点数の変動を扱いやすいデータ構造と効率のよい連立方程式の解法、並列計算アルゴリズムの研究を進めればより実用性の高い技法に発展させられる。

文 献

- (1) Masud, A. and Hughes T. J. R., An Adaptive Mesh Rezoning Strategy for Fluid Structure Interaction, *Res. Brief, Div. Appl. Mech.*, Stanford Univ., (1991-1).
- (2) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Zimmerman, T. K. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **29** (1984), 329-348.
- (3) Belytschko, T. and Kennedy, J. M., *Nucl. Eng. Des.*, **49** (1978), 17-38.
- (4) Winslow, A. M., *Lawrence Radiat. Labo. Rep.*, Univ. of California, UCRL 7312 (1963).
- (5) Brackbill, J. U. and Saltzman, J. S., *J. Comput. Phys.*, **46** (1982), 342-368.
- (6) Liou, J. and Tezduyar, T. E., *Univ. of Minnesota Supercomput. Inst. Res. Rep.*, UMSI 90/215 (1990).
- (7) 滝・松崎, 機講論, No. 923-1 (1992-3), 100-102.
- (8) Winget, J. M., Element by-Element Procedures for Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis, Ph. D. Thesis, Stanford Univ., (1983).