垂直管内静止液中単一大気泡の数値解析*

富山 明男^{*1}, 宋 明良^{*2}, 坂口 忠司^{*1}Numerical Simulation of a Taylor Bubble in a Stagnant Liquid
inside a Vertical Pipe

Akio TOMIYAMA, Akira SOU and Tadashi SAKAGUCHI

The feasibility of a detailed numerical simulation of a Taylor bubble in a stagnant liquid filling in a vertical pipe was examined in the present study. The simulation was carried out using the volume of fluid method. Since there have been few quantitative experiments on Taylor bubble shape, physical experiments under a wide range of the Eötvös number (Eu) and Morton number (M) were also conducted using sucrose solution and air at room temperature and atmospheric pressure. It was confirmed by the experiments that the bluntness of the nose of the bubble, the flatness of the tail, and the liquid film thickness around the bubble are strongly affected by the two dimensionless numbers, Eu and M . Calculated terminal rising velocities and bubble shapes agreed fairly well with the measured ones, which indicates that the effects of drag force, buoyancy and surface tension force on the bubble were well predicted in the simulation.

Key Words: Multiphase Flow, Computational Fluid Dynamics, Taylor Bubble, Bubble Shape, Terminal Rising Velocity, Fluid Properties

1. 緒 言

現状の気液二相流の数値解析は、ドリフトフラックスモデルや二流体モデル⁽¹⁾⁽²⁾に代表されるように、何らかの意味で平均化された基礎方程式系を用いて行われている。一方、近年の計算機の能力と計算手法の急速な発展に伴い、気液二相流のより詳細な多次元解析の可能性が高まりつつある。特に、粒子追跡法⁽³⁾⁽⁴⁾や界面追跡法⁽⁵⁾⁽⁶⁾はその有力な候補といえる。このうち後者は、気液各相に対する瞬時局所的な基礎方程式を界面における境界条件⁽¹⁾を考慮して解くことにより、気液界面の時間的・空間的变化を求める手法である。以下、本研究では平均化を用いない瞬時局所的な基礎方程式に基づく解析手法を気液二相流の詳細解析手法と呼ぶことにする。

著者らは、界面追跡法の一つであるVOF (Volume of Fluid) 法⁽⁵⁾⁽¹¹⁾を用いて、気泡を含む流れの詳細解析の可能性を検討してきた^{(7)~(10)}。その結果、(1)無限静止液中における単一大気泡の終端速度と形状、(2)揺動運動や蛇行運動を呈する気泡の挙動、(3)一様せん

断流中における単一大気泡の横方向運動特性、(4)直列二気泡の干渉現象に関して、妥当な数値解が得られることを確認した。したがって、管内気泡流の詳細解析が十分実現可能であることを示すことができた。

しかしながら、上記の研究^{(7)~(10)}は流路断面積と比べてかなり小さな直径の気泡を対象として行ってきたため、気液二相スラグ流の詳細解析の可能性は確認できていない。スラグ流は、テイラー気泡⁽¹²⁾と呼ばれる砲弾形の大気泡の存在によって特徴付けられる。垂直管内静止液中の単一大気泡の形状や終端速度は、管直径や両相を構成する流体の物性によって大きく変化するため、静止液中単一大気泡の解析は詳細解析手法の妥当性を検証するためのよい例題であるといえる。また、本問題を精度よく解析できなければ、気液二相スラグ流の詳細解析は実現不可能といえる。

そこで本研究では、垂直管内静止液中における単一大気泡の詳細解析を試みた。解析の妥当性を検討するには大気泡の形状と終端速度に関する実験データベースが不可欠であるが、気泡形状に関する系統的データベースはみうけられない。そこで、層流条件における種々の単一大気泡の形状と終端速度の測定も実施した。

* 原稿受付 平成5年11月19日。

*¹ 正員, 神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。*² 正員, 神戸大学大学院。

2. 大気泡の形状に関する従来の研究

1910年代以降、終端速度や形状等の大気泡の流動特性に関して、数多くの実験的および理論的研究が行われている^{(13)~(26)}。初期の理論的研究はポテンシャル流れ理論に基づいていたため、大気泡に及ぼす表面張力や粘性の影響は考慮されていなかった^{(15)~(17)}。その後、種々の流体と円管による実験が行われ、粘性力、表面張力、浮力、慣性力等の大きさにより、大気泡の特性が大きく変化することが明らかにされた。White-Beardmore⁽²¹⁾は、各種の力が大気泡の終端速度に及ぼす影響を3種の無次元数で整理し、数多くの実験結果を図1の形にまとめた。図1中の Eo はエトベス数、 M はモルトン数、 Fr はフルード数を意味し、おのおの次式で定義される。

$$Eo = \frac{g(\rho_L - \rho_G)D^2}{\sigma} \dots\dots\dots (1)$$

$$M = \frac{g\mu_L^4(\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2\sigma^3} \dots\dots\dots (2)$$

$$Fr = \frac{V_B}{\sqrt{\frac{gD(\rho_L - \rho_G)}{\rho_L}}} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 g は重力加速度、 ρ は密度、 D は管内径、 σ は表面張力、 μ は粘性係数、 V_B は大気泡の終端速度を、添字の G と L はおのおの気相と液相を表す。 Eo は浮力と表面張力の比を、 M は二相を構成する流体の物性を表す。 Fr は大気泡の無次元終端速度であり、浮力と慣性力の比を意味する。本相関図は、 Fr が Eo と M によって一意に定まることを意味しており、現時点で最も信頼できる垂直管内静止液中単一大気泡の終端速度に関する整理結果である。

Bretherton⁽¹⁸⁾は大気泡の先端形状に及ぼす表面張力の影響を理論解析し、 $Eo \geq 3.73$ の場合には図2(a)のように滑らかな先端形状となり、 $Eo \leq 3.73$ の場合には図2(b)のように先端部にくびれをもつ形状となることを示した。彼の理論解析において、 $Eo = 3.73$ は大気泡が上昇運動を行う最小値に対応する。一方、Goldsmith-Mason⁽²⁰⁾は、液相の粘度が高い場合には、大気泡の先端および後端形状は回転だ円体形状となり、先端形状は縦長だ円、後端形状は横長だ円[図2(c)]となることを指摘した。また、図2(c)に示すように、液相の粘度が高い場合には、表面張力の増加に伴い気泡両端の回転だ円体の扁平率がともに増加することを観察している。さらに、液相の粘度が高い場合には、図2(d)に示すように気泡後端部にくびれ(ウェーブディスタージョンと名付けている)が生じると報告している。Brown⁽²²⁾、Özgülら⁽²³⁾、深野ら⁽²⁴⁾も

図1 White らの単一大気泡の終端速度に関する相関図
[文献(21)より引用、記号は本実験の条件を表す]

図2 気泡形状に関する既知の情報
[(a), (b) Bretherton⁽¹⁸⁾の理論解析結果, (c), (d) Goldsmith ら⁽²⁰⁾の観察結果]

大気泡の形状に及ぼす粘度の影響を実験的に調べている。彼らは、大気泡周囲の液膜厚さが液相粘性の増加とともに大きくなると報告している。Nickens-Yannitell⁽²⁵⁾は表面張力の影響を理論的に調べ、表面張力の増加により気泡先端形状がより丸みをおびるという結果を得ている。

以上に整理したように、大気泡形状に及ぼす粘性と表面張力の影響に関して多くの研究がなされてきたが、二つの支配的な無次元数 Eo と M が大気泡形状に及ぼす影響を系統的に調べた報告はない。さらに、実験と計算結果を比較するための大気泡形状の実験データは欠如している。そこで本研究では、大気泡形状に及ぼす Eo と M の影響に関する実験データを取得

した後に、計算結果と実験結果の定量的比較検討を行う。

3. 大気泡の形状に関する実験

3・1 実験方法 実験にはサッカロース水溶液と常温常圧の空気を用いた。また、イオン交換樹脂による精製水を溶媒とした。長さ 2 000 mm のアクリル製垂直円管にサッカロース水溶液を満たして試験部とした。3 種類の内径 ($D=5.4, 10.2, 15.1$ mm) の円管を試験部に用いて Eo を変化させ、溶液の濃度を調節して M を調節した。気泡は円管底部より注入した。大気泡形状に関する数値計算を実行する際に、気泡長さが長いほど多くの計算セルが必要となり、その結果、膨大な計算時間が必要となる。そこで、空気注入量は大気泡長さがおよそ $2D$ によるように調節した。大気泡の終端速度 V_B は、VTR により円管の底部より 1.3 m の位置で測定した。同一の Eo, M の条件下で 20 回以上 V_B を測定し、 V_B の実験値をそれらの平均値として算出した。 V_B の測定値に関する偏り誤差の要因は

なく、95% 確度の計測の不確かさは 1.3% であった。図 3 に大気泡形状撮影部の模式図を示す。気泡形状の撮影にはスチルカメラを用いた。アクリル製垂直円管をアクリルブロックで囲み、光の屈折による誤差を低減させた。このアクリルブロックにより、大気泡形状の屈折による測定誤差を最大でも円管内径の 2% に低減できた。また、この光学的誤差は幾何光学により除去できるので、写真から大気泡形状を讀取る際に補正した。サッカロース水溶液の密度 ρ_L は、溶液質量をその体積で除して算出した。粘性係数 μ_L は回転円筒粘床計 (Viscotester: VT-03, リオン社) を用いて測定し、表面張力 σ は毛細管上昇法を用いて測定した。 ρ_L, μ_L, σ の測定値に関する計測の不確かさは、おのおの 2.7, 2.0, 3.3% であった。空気の物性は空気温度の測定値から、物性表より求めた。

表 1 および図 1 中に実験条件を示す。大気泡の終端速度と形状に及ぼす Eo と M の影響を調べるために、 $Eo =$ 一定の条件と $M =$ 一定の条件で実験を行った。実験条件は、表面張力あるいは粘性力が支配的な条件から無視できる条件までを網羅するように設定した。本実験条件は、大気泡の Fr が取りうる $0 \leq Fr \leq 0.35$ のほぼ全範囲をカバーしている (図 1)。ただし、本実験における気泡レイノルズ数、

表 1 実験条件

case	ρ_L [kg/m ³]	ρ_G [kg/m ³]	$\mu_L \times 10^{-3}$ [kg/ms]	$\mu_G \times 10^{-5}$ [kg/ms]	σ [N/m]	D [mm]	Eo	$\log M$
1	1249	1.22	25.0	1.81	0.0798	5.4	4.47	-5.22
2	1249	1.22	25.7	1.81	0.0796	10.2	15.97	-5.17
3	1249	1.22	25.7	1.80	0.0793	15.1	35.14	-5.16
4	1268	1.22	55.0	1.81	0.0778	5.4	4.65	-3.82
5	1268	1.22	55.0	1.81	0.0778	10.2	16.60	-3.82
6	1268	1.22	55.0	1.81	0.0778	15.1	36.38	-3.82
7	1311	1.21	100.0	1.81	0.0760	5.4	4.92	-2.77
8	1311	1.22	97.0	1.81	0.0760	10.2	17.57	-2.82
9	1311	1.21	93.0	1.81	0.0760	15.1	38.50	-2.90
10	1313	1.23	153.0	1.80	0.0791	5.4	4.74	-2.08
11	1313	1.23	162.0	1.80	0.0765	10.2	17.48	-1.94
12	1313	1.23	169.0	1.80	0.0738	15.1	39.71	-1.82

$$Re = \frac{\rho_L V_B D}{\mu_L} \dots \dots \dots (4)$$

の最大値は 87.8 であり、すべて層流条件下である。層流条件に実験範囲を限定したのは、乱流条件では気泡形状の定常性が低下し計算と実験の比較検討が困難になるとともに、形状の軸対称性も低下し三次元解析が必要になること、および 4 章に示すように本研究で用いる解析手法が乱流を考慮していないことがおもな理

図 3 気泡撮影部の模式図

図 4 White らのフルード数と本実験値の比較 (記号は図 1 中の記号に対応)

由である。乱流条件における詳細解析は今後の課題と考えている。

3・2 実験結果と考察 まず、本実験の信頼性を確認するために、無次元終端速度 Fr の実験結果を White らの相関図と比較しておく。図 4 に比較結果を示す。両者は相対誤差 $\pm 4.1\%$ で一致しており、本実験における物性値測定が十分信頼できることを確認できた。図 5 に、全条件における大気泡形状の写真を示す。各写真は管内径が同じ大きさになるように拡大・縮小してある。なお、全条件とも大気泡形状は定常で時間的にほとんど変化しなかったことを付記しておく。図 5 の写真から形状を読み取り、さらに屈折の影響を補正した形状を図 6 に示す。図 6 より、 Eo と M が大気泡

形状に及ぼす影響として以下の傾向がわかる。

- (1) 気泡後端部は、 Eo の増加または M の減少によって平坦化する。
- (2) 大気泡周囲の液膜厚さは M の増加とともに増加する。
- (3) 大気泡先端部の形状は、大気泡が上昇しない $Eo=4.7$ の際に図 2 (b) と同様にくびれを有する形状となる。
- (4) $\log M \geq -2.83$ のとき、すなわち μ_L が大きい条件では、 Eo が 16.9 から 4.7 に減少するに

図 5 全実験条件における気泡形状の写真
(Eo , $\log M$ の値は各行、各列の平均値)

図 6 気泡形状の測定結果

(a) M の影響

(b) Eo の影響

図 7 気泡先端形状に及ぼす Eo と M の影響

(r : 管軸からの距離, R : 管半径, z : 気泡先端から下流側への距離)

つれて気泡後端形状は偏平化する。

- (5) 図2(d)に示した後端部のくびれが、 EO が小さい条件で現れる。

以上の傾向は、2章に示した既存の知見と一致している。

図7(a), (b)には、気泡先端部の形状に及ぼす M と EO の影響を示す。図7より以下の二点がわかる。

- (6) EO が一定のとき、 M の増加に伴い気泡先端形状の偏平度は低下する。その結果、傾向(2)に記した液膜厚さの増加が生じる。

- (7) EO の減少に伴い、大気泡先端部形状は平坦化する。

傾向(6), (7)も、従来の研究⁽²⁰⁾⁽²⁵⁾と一致している。従来の研究と本研究の唯一の相違点は、本実験が二つの無次元数 EO と M をパラメータとして行われている点にある。

以上、広範囲の流動条件における大気泡形状を系統的に取得できた。以下では、本実験結果と数値計算結果を比較検討する。

4. 数値解析および考察

4.1 数値計算手法 解析には軸対称の二次元円筒座標系(r, z)を用いる。この系において瞬時局所的に成立する以下の非圧縮性二相流に対する質量および運動量の保存式を各相について解く⁽⁵⁾⁽¹¹⁾。

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{\partial v_k}{\partial z} + \frac{u_k}{r} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial r} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_k \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{u_k}{r^2} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial r} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_k \left[\frac{\partial^2 v_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_k}{\partial r} \right] - g \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、添字の k は各相($k=G$ or L)を、 u は径方向の速度成分、 v は軸方向の速度成分、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 t は時間を表す。式(6), (7)中の密度 ρ は次式で定義される。

$$\rho = (1-F)\rho_G + F\rho_L \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 F は各計算セルにおける液相体積率($0 \leq F \leq 1$)を表す。 F が 0, 1 のセルはおおの気相、液相で満たされている。また、 $0 < F < 1$ のセルには気液界面が存在する。なお、式(5)~(7)では気液各相を区別するために速度を u_k, v_k と表記しているが、プログ

ラム中では原版の VOF 法⁽¹¹⁾と同様に u, v という二つの変数を用意しておき、 $F=0$ ならば $u=u_G, v=v_G, F=1$ ならば $u=u_L, v=v_L$ とみなせばよい。

界面を含むセル(界面セル)では、そのセルを中心とする周囲9セルの F の値から、界面セル内の界面位置と曲率 κ が計算できる。得られた κ より表面張力による圧力 p_s を、

$$p_s = \kappa \sigma \dots\dots\dots (9)$$

から求め、式(6), (7)の右辺に加える。

F は液相体積率なので、以下に示す液相の体積保存式を満たす。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r F u_L}{\partial r} + \frac{\partial F v_L}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

上式より界面位置の時間変化を計算する。

ここで、原版の VOF 法⁽⁵⁾⁽¹¹⁾と本研究における計算方法の相違点を列挙しておく。

(1) 原版の VOF 法はおもに自由表面を含む流れの解析が目的であるため、式(6), (7)中の動粘性係数 ν_k には単一の変数が用いられている。一方、本研究では気液二相流を対象とするため気液各相の動粘性係数に異なる値を使用できるようにしている。

(2) 原版のように単精度の計算では、気液の密度比が大きい場合にけた落ちにより数値解が不安定化しやすいので倍精度計算としている。

(3) 圧力と速度の同時反復計算の収束特性を向上させるために、反復解法として既報⁽²⁷⁾に提示した改良 SOLA 法を使用している。

次に、計算体系、境界条件および初期の大気泡形状を図8に示す。大気泡周囲の液膜内では速度こう配が

図8 解析の初期条件・境界条件

図 9 計算された気泡形状時間変化の一例 ($E_o=39.71$, $\log M=-1.82$) 図 10 気泡先端部の流れ方向の無次元移動距離 z/D と無次元上昇速度 V/V_{in} の時間変化の一例 ($E_o=39.71$, $\log M=-1.82$)

図 11 フルード数の実験値と計算値の比較 (記号は図 1 中の記号に対応)

大きくなると予想されるので、液膜付近の領域では計算セルを細かくした。初期気泡の先端部および後端部の形状は、直径 $0.8D$ の半球形とした。二つの半球は同じ直径の円柱でつながれている。実験で得られた大気泡の体積と初期気泡の体積がほぼ等しくなるよう

図 12 気泡形状の実験値と計算値の比較

に、円柱部分の長さを調節した。また、上部境界より一様速度 V_{in} で液相を下方へ流入させ、管壁も同じ速度 V_{in} で下降させた。右側境界は軸対称条件、下部境界は連続流出条件とした。 V_{in} の大きさを大気泡の終端速度の計算値 V_B と同じ値とすることによって、大気泡の先端に固定した座標系から観察した流れ場の解析となるようにした。本座標系では、大気泡が終端速度に到達した時点で大気泡先端位置が静止しなければならない。そこで、 V_{in} の大きさを試行錯誤的に変更して計

図 13 Kawaji ら⁽²⁶⁾による気泡直後の流れ場の可視化例 (a) $\log M = -1.82$ (b) $\log M = -2.90$ (c) $\log M = -5.16$ 図 14 速度分布計算結果 ($Eo = 37.3$)

算を複数回試み、大気泡先端位置の軸方向座標が移動しなくなる状態を実現させた。なお、計算時間は条件によって異なり、72 MIPS の演算速度を有するワークステーション HP-730 を用いて約 5～15 h であった。

4・2 計算結果と考察 図 9 に大気泡形状の時間変化の一例を示す。ここで、 t^* は次式で定義される無次元時間である。

$$t^* = \frac{V_{in} t}{D} = \frac{V_B t}{D} \dots\dots\dots (11)$$

上部境界からの流入速度 V_{in} を計算で得られる大気泡の終端速度 V_B と同じ値になるように調節したため、大気泡の先端位置が計算開始後すぐに一定位置に落ち着いている。大気泡形状に関しては $t^* > 6$ で定常な形

状に達している。この定常に達した形状を最終の計算結果として、実験結果との比較に用いた。図 10 には、管壁に固定した座標系(実験室系)における大気泡の軸方向移動距離と大気泡速度の時間変化の一例を示す。本図より、大気泡は管内径 D 程度の距離を移動した後($t^* \sim 1$)に、終端速度に達していることがわかる。従来より、大気泡は D あるいは $2D$ 程度の短い距離を移動した後に、終端速度に達することが知られている。したがって、図 10 の結果は過去の実験観察結果と一致しているといえる。

図 11 に、無次元終端速度 Fr の実験結果と計算結果の比較結果を示す。両者は相対誤差 $\pm 3.1\%$ で一致した。次に、大気泡形状の実験結果と計算結果の比較結果を図 12 に示す。各図の左側半分に描いた速度ベクトルは大気泡先端に固定した座標系におけるものである。本図より、大気泡の形状に及ぼす Eo と M の影響を良好に予測できていることがわかる。図 11, 12 より、大気泡に作用する抗力、浮力、表面張力が妥当に評価されているといえる。

次に、気泡周囲の速度分布に関して考察する。大気泡内速度分布に関しては、Goldsmith-Mason⁽²⁰⁾ がトレーサー粒子(煙)による観察によりトロイダル渦が存在することを確認している。また、Kawaji ら⁽²⁶⁾ はフォトリソグラフィ法で生成したダイにより大気泡下部の液相スラグ部の速度分布を測定し、図 13 に示す結果を得ている。本図は、 $\log M = -8.26$ における実験結果である。図 13 より、液膜部から下方に流出した液相は噴流のように液スラグ部を流れること、および大気泡直下の液相はほぼ様な速度で大気泡に追従して上昇することがわかる。図 14 に大気泡周囲の速度分布の計算結果を示す。速度分布を見やすくするために、速度ベクトルは 4 セルに一つの割合で示してある。本図より、計算でも大気泡内にトロイダル渦が生じていることがわかる。また、大気泡下方の速度分布に関しては、 M が Kawaji らの実験条件に近付くにつれて、液膜部より流出する液相が噴流のような流れを形成していくことがわかる。以上より、大気泡周囲の速度分布に関しても、定性的に既存の実験結果と一致する計算結果が得られることを確認できた。

5. 結 言

垂直管内静止液中における層流条件下の単一大気泡を対象として、実験と計算を実施した。実験は、サッカロース水溶液と内径の異なる 3 種の円管を用いることにより、モルトン数 M とエトベス数 Eo を広範囲で変化させて実施した。計算には VOF 法を用いた。以下

に、得られた結論を要約する。

(1) Eo と M による大気泡形状の変化に関する実験結果を提示した。本結果は、今後、新たな界面追跡手法に基づく詳細解析手法を開発した際にその妥当性を検討する際のデータベースとして利用できる。

(2) 広範囲にわたる Eo と M の条件における大気泡の終端速度と形状に関して、VOF 法を利用した数値解析結果は実験結果と良好に一致した。

(3) 大気泡内部の速度分布および下部の液体スラグ部の速度分布に関しても、既存の実験結果と定性的に一致する計算結果が得られた。

文 献

- (1) Ishii, M., *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, (1975), 133, Eyrolles.
- (2) Delhaye, J. M., Giot, M. and Riethmuller, M. L., *Thermo-hydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*, (1981), 187, McGraw-Hill.
- (3) Zun, I., Kljenak, I. and Moze, S., *Proc. Int. Conf. Multiphase Flows '91-Tsukuba*, **1**(1991), 463.
- (4) Mortensen, G. A. and Trapp, J. A., *Proc. Jpn. U. S. Seminar Two-Phase Flow Dyn.*, Berkeley, California, (1992), 85.
- (5) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., *J. Comput. Phys.*, **39** (1981), 201.
- (6) Hervieu, E., Coutris, N. and Tavares, M., *Proc. ANS Nat. Heat Transf. Conf.*, San Diego, California, (1992), 201.
- (7) Tomiyama, A., ほか 3 名, *Proc. Int. Conf. Multiphase Flows'91-Tsukuba*, **1**(1991), 373.
- (8) Tomiyama, A., ほか 3 名, *JSME Int. J., Ser. B*, **36**-1(1993), 51.
- (9) Tomiyama, A., ほか 3 名, *Proc. Jpn. U. S. Seminar Two-Phase Flow Dyn.*, Berkeley, California, (1992), 67.
- (10) Tomiyama, A., ほか 3 名, *NED*, **141**-1(1993), 69.
- (11) Nichols, B. D., Hirt, C. W. and Hotchkiss, R. S., LA-8355(1980).
- (12) 赤川, 気液二相流, (1974), 117, コロナ社.
- (13) Gibson, A. H., *Philos. Mag.*, **26**(1913), 952.
- (14) Barr, G., *Philos. Mag.*, **1**(1926), 395.
- (15) Hattori, S., *Pep. Aeronaut. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.*, **9**-115(1935), 161.
- (16) Dumitrescu, D. T., *Z. Angew. Math. Mech.*, **23**(1943), 139.
- (17) Davies, R. M. and Taylor, G., *Proc. R. Soc., London, Ser. A*, **200**(1950), 375-390.
- (19) Harmathy, T. Z., *AIChE J.*, **6**-2(1960), 281.
- (20) Goldsmith, H. L. and Mason, S. G., *J. Fluid Mech.*, **14** (1962), 42.
- (21) White, E. T. and Beardmore, R. H., *Chem. Eng. Sci.*, **17** (1962), 351.
- (22) Brown, A. S., *Can. J. Chem. Eng.*, **43**(1965), 217.
- (23) Özgü, M. R., Chen, J. C. and Stenning, A. H., *Trans. ASME, J. Heat Transf., Ser. C*, **95**-3(1973), 425.
- (24) 深野・ほか 3 名, 機論, **46**-412, B(1980), 2412.
- (25) Nickens, H. V. and Yannitell, D. W., *Int. J. Multiphase Flow*, **13**-1(1987), 57.
- (26) Kawaji, M., ほか 4 名, *NED*, **141**-1(1993), 343.
- (27) 富山・平野, 機論, **58**-551, B(1992), 2171.