Stuart 解を使った非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の 高精度計算スキームの開発*

平田 昭彦^{*1}, 前川 博^{*2}, 山本 稀義^{*3}

A High-Precision Numerical Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations Tested by Stuart Solution

Akihiko HIRATA, Hiroshi MAEKAWA and Kiyoshi YAMAMOTO

A numerical scheme has been developed for solving the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations on a domain that is infinite in the vertical (y) direction and finite in the streamwise (x) direction. The fourth-order equation for the streamwise velocity (u) is advanced in time explicitly using a compact third-order Runge-Kutta scheme. A standard Fourier method is used in the x direction and a mapped spectral method in the y direction. The various parts of the code are tested by solving two problems with analytical or independently-established known solutions. The nonlinear Stuart solution is employed to test the convective parts, the Poisson part of the code and the time advancement. Finally, we find that the disturbance obtained from linear stability theory grows in the linear regime of a free shear flow and that the nonlinear growth of the amplitude corresponds to the vortex roll-up.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Shear Flow, Numerical Analysis, Direct Numerical Simulation, Mapped Fourier Method, Stuart Solution

1. はじめに

ナビエ・ストークス方程式(本文では以後 N-S 方程式と書く)の直接数値解法(以後 DNS と書く)が急速に発展し“成熟”することによって非線形項を精度よく計算するための数値スキームの開発の方向がおおよそ分類整理され始めてきたと考えられる。

非圧縮性流れにおいては、連続の式が発展形でなく、また速度のみで記述されるため、各時間でのそれぞれの点における質量保存を確実なものにするのに、特別な工夫が必要となる⁽¹⁾⁽²⁾。しかしこの連続の条件は数値計算の効率の点で非圧縮性方程式の利点でもある。連続の条件を満たし、N-S 方程式を解くためのスキームはいくつか提案されてきた^{(1)~(3)}。

圧力項の取扱い方によって大きく2種に分けることができるが、N-S 方程式の発散をとり圧力に対するポアソン方程式を解く方法がある。この方法を用いて

Davis-Moore が、空間発展問題として噴流や混合層の二次元のシミュレーションを行っている⁽⁴⁾。

これとは別に、圧力の項を消去し計算中で用いる変数の数を減らすために N-S 方程式の回転をとる方法がある⁽³⁾。この方法の利点は連続の条件を直接付加することができるということである。回転演算子を一度用い二つの渦度方程式を作る方法⁽⁵⁾と、演算子を二度用い同じ方向の速度と渦度についてのそれぞれの方程式を作る方法⁽³⁾⁽⁶⁾がある。

一方、DNS による計算精度がフーリエ級数のモード数や有限差分メッシュ数によってどの程度変わるか不明のまま、計算結果について詳細な議論がなされることが従来あった。

本研究の目的は、自由せん断流を対象として DNS スキームを開発するために必要な非線形項の取扱いと、連続条件を満たし自由せん断流における境界条件(一様ディリクレ条件)を満足するスキームを開発し、その精度を明らかにすることにある。

本研究では速度と渦度についての方程式を用いたスキームの開発について述べる。このスキーム中では二次元の場合、変数として一つ velocity 成分を取扱うことになる。空間微分は、差分法に比べ少ない格子点で高い精度を得ることのできる擬スペクトル法を用い、ま

* 平成5年8月20日 流体工学部門講演会において講演、原稿受付 平成5年12月20日。

^{*1} 学生員、電気通信大学大学院 (〒182 調布市調布ケ丘1-5-1)。

^{*2} 正員、電気通信大学。

^{*3} 正員、航空宇宙技術研究所 (〒182 調布市深大寺東町7-44-1)。

た、三次のコンパクト Runge-Kutta 法を用いて時間積分を行った⁽³⁾。そして開発されたスキームの非線形項等の取扱いの精度を確認するため非圧縮性非粘性の厳密解である Stuart 解を用いた。

また、厳密解のほとんど見つかっていない圧縮性流れにおいては DNS の非線形項等のコーディングの精度を確かめるために線形安定性理論より与えられる流れ方向の微小かく乱をせん断層に加え、線形領域における導入かく乱の成長の様子を調べることが重要であるが、非圧縮性流れの本スキームによってかく乱の線形および非線形領域の成長を精度よく調査できることを明らかにした。

2. 数 値 解 法

2.1 支配方程式 非圧縮性 N-S 方程式と連続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H} - \text{grad } P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表せる。ただし、移流項 $\mathbf{H} = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$ である。

$\mathbf{U} = (u, v, w)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ とし式(1)の回転を二度行うことにより

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_1 \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla^2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を得る。式(2)より

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を式(3)に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_1 + \frac{1}{Re} \nabla^4 u \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $\nabla^2 u = \phi$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = h_u + \frac{1}{Re} \nabla^2 \phi \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} h_u = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_1 \end{aligned}$$

また $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とすると式(1)の回転を行うと

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_x \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)と式(7)に初期値および境界条件を与えることにより u, ω_x を求める。

本報では二次元であるので z に関する項を除くと、式(6)と連続の式について解くことになる。ただし

$$\begin{aligned} h_u = & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v \omega_z}{\partial y} + \frac{\partial u \omega_z}{\partial x} \right), \\ \phi = & \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots (8) \end{aligned}$$

2.2 境界条件 数値解法において主せん断方向 $y = \pm \infty$ での境界条件を与えるために式(8)において変数 (u, v, ω_z) を平均成分 (u_0, v_0, ω_{z0}) と計算成分 (u_c, v_c, ω_{zc}) に分離して一様ディリクレ条件を与える。

流れ方向は周期境界条件を用いる。

$$\Phi(x, y) = \Phi(x + L_x, y) \quad \dots\dots\dots (9)$$

2.3 計算法 本研究では主せん断方向と流れ方向に擬スペクトル法を用いる。スペクトル法を用いる際に発生する aliasing 誤差を除くために波数領域を 1.5 倍に広げる 3/2 法則を使用している。

2.3.1 流れ方向の微分の近似 物理空間を $0 \leq x < L_x$ とし

$$x_i = L_x \frac{i-1}{N_x} \quad (1 \leq i < N_x) \quad \dots\dots\dots (10)$$

で離散化を行い三角級数を用いた高速フーリエ変換 (IMSL ルーチン) を使用した。ただし、 L_x は 3.1 節と 3.2 節で定義される。

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \frac{1}{N_x} \left[\hat{\Phi}_1 + (-1)^{(n-1)} \hat{\Phi}_{N_x} \right. \\ & + 2 \sum_{m=2}^{N_x/2} \hat{\Phi}_{2m-2} \cos \frac{(m-1)(n-1)2\pi}{N_x} \\ & \left. - 2 \sum_{m=2}^{N_x/2} \hat{\Phi}_{2m-1} \sin \frac{(m-1)(n-1)2\pi}{N_x} \right] \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

2.3.2 垂直方向の微分、積分の近似 物理空間を $-\infty < y < \infty$ とし、写像関数

$$y = -\beta \cos(\pi \zeta_j) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\zeta_j = \frac{j-1}{N_y} \quad (1 \leq j \leq N_y)$$

を用いた mapped フーリエ法⁽⁷⁾ を使用する。 β は伸長パラメータを表す。垂直方向の一階および二階微分は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y_j} = & \frac{1}{N_y} \frac{1}{2\beta} \left[2 \sum_{m=2}^{N_y/2} \{ m \hat{\Phi}_{2m+1} \right. \\ & - 2(m-1) \hat{\Phi}_{2m-1} + (m-2) \hat{\Phi}_{2m-3} \} \\ & \times \cos \{ 2(m-1) \zeta_j \} \\ & - 2 \sum_{m=2}^{N_y/2} \{ -m \hat{\Phi}_{2m} + 2(m-1) \hat{\Phi}_{2m-2} \\ & \left. - (m-2) \hat{\Phi}_{2m-4} \} \sin \{ 2(m-1) \zeta_j \} \right] \quad \dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{y_j} = & \frac{1}{N_y} \frac{1}{4\beta^2} \left[2 \sum_{m=2}^{N_y/2} \{ -m(m+1) \hat{\Phi}_{2m+2} \right. \\ & + 2m(2m-1) \hat{\Phi}_{2m} - 6(m-1)(m-1) \hat{\Phi}_{2m-2} \} \end{aligned}$$

表 1 三次のコンパクト ルンゲ-クッタ法の計算アルゴリズム

TIME	DERIVATIVES	DATA1	DATA2
t^n		$r^n = u^n$	u^n
$t' = t^n + \alpha_1 \Delta t$	$k_1 = H(r^n, t^n)$	$r' = u^n + \alpha_1 \Delta t k_1$	$u' = u^n + \beta_1 \Delta t k_1$
$t'' = t^n + (\alpha_2 + \beta_1) \Delta t$	$k_2 = H(r', t')$	$r'' = u' + \alpha_2 \Delta t k_2$	$u'' = u' + \beta_2 \Delta t k_2$
$t^{n+1} = t^n + (\alpha_3 + \beta_1 + \beta_2) \Delta t$	$k_3 = H(r'', t'')$	$r^{n+1} = u'' + \alpha_3 \Delta t k_3$	$u^{n+1} = u'' + \beta_3 \Delta t k_3$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(m-2)(2m-3)\hat{\Phi}_{2m-4} \\
 &- (m-3)(m-2)\hat{\Phi}_{2m-6} \cos\{2(m-1)\zeta_j\}] \\
 &- 2 \sum_{m=2}^{Ny/2} [\{-m(m+1)\hat{\Phi}_{2m+3} + 2m(2m-1)\hat{\Phi}_{2m+1} \\
 &- 6(m-1)(m-1)\hat{\Phi}_{2m-1} \\
 &+ 2(m-2)(2m-3)\hat{\Phi}_{2m-3} \\
 &- (m-3)(m-2)\hat{\Phi}_{2m-5} \} \sin\{2(m-1)\zeta_j\}]] \\
 &\dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

2・3・3 ポアソン方程式の解法 二次元のポアソン方程式 $\nabla^2 P = Q$ は二次元のフーリエ変換を用いて解くことができる。

物理空間で x 方向が均一、 y 方向が不均一なグリッドをとっているので $P(x, y)$, $Q(x, y)$ のそれぞれの二次元のフーリエ係数を $\hat{P}(k_x, k_y)$, $\hat{Q}(k_x, k_y)$ とすると

$$A[\hat{P}] = [\hat{Q}]$$

と表せる⁽⁷⁾。ここで A は式(14)から与えられる五重対角行列である。

係数行列 A を LU 分解し、ガウス消去法を用いて波数空間 $\hat{P}$ を計算し、 P を求める。

2・3・4 時間積分 三次のコンパクト Runge-Kutta 法を使用した。この方法では、各グリッド点において従属変数あたり二つの記憶領域のみ必要である。表 1 にそのアルゴリズムを示す。

本研究ではパラメータをそれぞれ $\alpha_1=2/3$, $\alpha_2=5/12$, $\alpha_3=3/5$, $\beta_1=1/4$, $\beta_2=3/20$, $\beta_3=3/5$ とする。

タイムステップは $\Delta t=0.005$ とする。この値は三次の Runge-Kutta 法の CFL 数 $\sqrt{3}$ を満たす。

3. 計算結果および考察

3・1 Stuart 解 Stuart 解は二次元の非圧縮性非粘性 N-S 方程式の厳密解であり流れ関数 ϕ は次のように与えられる⁽⁸⁾。

$$\phi(x, y, t) = cy + \ln[b \cosh(y) + a \cos(x - ct)] \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$a = \sqrt{b^2 - 1}, u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

である。

式(15)は渦が速度 c で移流する解を表し、計算スキ

(a) u -分布 ($t=1$)

(b) v -分布 ($t=1$)

(c) ω_z -分布 ($t=1$)

図 1 計算結果 ($t=1$)

ームの非線形項やポアソン方程式の解法および時間積分に関する精度テストに適切な問題である。また、計算スキームの安定性の検証問題としても適している。

本研究では、非粘性の条件を近似するために $Re=10^9$ および $Re=10^8$ とし、また、パラメータを $a=1/2$, $c=1$, $L_x=2\pi$, $\beta=4$ とする。

境界条件として一様ディリクレ条件

(a) u -誤差分布 ($t=1$) (b) v -誤差分布 ($t=1$) (c) ω_z -誤差分布 ($t=1$)図 2 誤差分布 ($t=1$)

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{y \rightarrow \pm\infty} &= v(x, y, t)|_{y \rightarrow \pm\infty} \\ &= \omega_z(x, y, t)|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0 \end{aligned} \quad \cdots \cdots (16)$$

が与えられる。

コロケーションポイントとして x 方向, y 方向それぞれ $N_x=32, N_y=128$ とし, タイムステップ数 200, $t=0$ から $t=1$ まで計算を行った。そのときの数値解 u, v, ω_z の物理空間, 座標 (x, y) に対する分布をそれぞれ図 1 (a)~(c) に示す。図 1 より x 軸に沿って渦が移流していることがわかる。

また厳密解との誤差の分布を x - y 座標にプロットしたものを図 2 (a)~(c) に示す。 x - y 座標を用いたのは個々の点における誤差を見やすくするためである。図 2 より境界条件がうまく適用されていることがわかる。数値解 u, v, ω_z の誤差が最大になる点の座標

図 3 u の最大誤差

とその点での相対誤差を以下に示す。

$(x, y) = (2.356, -1.543)$ において

$$|(u_{\text{analytic}} - u_{\text{numeric}})/u_{\text{analytic}}| = 8.613 \times 10^{-8}$$

$(x, y) = (3.534, 0.2950)$ において

$$|(v_{\text{analytic}} - v_{\text{numeric}})/v_{\text{analytic}}| = 3.031 \times 10^{-7}$$

$(x, y) = (4.123, 0.2950)$ において

$$|(\omega_{z\text{analytic}} - \omega_{z\text{numeric}})/\omega_{z\text{analytic}}| = 1.637 \times 10^{-7}$$

それぞれ十分な精度が得られる。さらにモード数をかえて $(N_x, N_y) = (32, 16), (32, 32), (32, 64), (32, 128)$ で $t=1$ まで計算を行った際の u の最大誤差を図 3 に示す。この計算中では, de-aliasing の処理を行っている。図 3 よりモード数 N_y を増やすことにより精度が著しく上がることがわかる。 $Re=10^8$ で計算を行ったときもほぼ同じ精度を得た。

また, $(N_x, N_y) = (32, 128)$ のモードについては de-aliasing を行ったとき (○) と, 行わなかったとき (△) を示す。de-aliasing を行うことにより, 精度が上がったことが確認されるが, モード数が十分大きいときその差はわずかであることがわかる。

以上より非圧縮性 N-S 方程式を解くために開発されたスキームの時間積分 (三次のコンパクト Runge-Kutta 法使用) および非線形項とポアソン方程式の計算を行う際に必要である空間微分積分 (擬スペクトル法使用) の精度が確認された。

3・2 二次元自由せん断層 平均流として

$$U = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} \left[\frac{1}{\Lambda} + \tanh(2y) \right] \quad \cdots \cdots (17)$$

を用いる。ここで Λ はせん断の強さを示すパラメータであり次の式で与えられる。

$$\Lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \quad \cdots \cdots (18)$$

ただし U_1, U_2 はそれぞれ高速側, 低速側の流速を表す。本研究では $\Lambda=0.5$ とする。また, $Re = \delta_\omega \Delta U / \nu$ と定義し, δ_ω と ΔU はそれぞれ渦度厚さと高速と低速の流速の差を表す。

図 4 基本波の成長(初期振幅 $A_0=0.01$) 図 5 基本波の成長(初期振幅 $A_0=0.05$, $Re=500$) 図 6 渦度分布 ($Re=500$, $t=16$)
(渦度間隔は最大値の 6%) (a) 初期条件 ($t=0$) (b) 線形領域 ($t=1$) (c) 非線形領域 ($t=16$)図 7 u -固有関数

流れ方向の初期かく乱は線形安定性理論で次のようにおくことができる。

$$u = \mathcal{R}[A_0 \bar{u}(y) \exp\{i(ax - \omega t)\}] \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで $\mathcal{R}$ は [] 内の実部を, A_0 は初期振幅をそれぞれ表す。本研究では, 時間発展問題を取扱うので α は実数であり, 流れ方向のかく乱の波数を表し, ω は複素数で, その虚部は時間的増幅率を与える。 $\bar{u}(y)$ は複素固有関数を表し, 固有値が決定されることによりも

とめられる。

かく乱方程式として非粘性の Rayleigh 方程式を用い, 与えられた α にたいする固有値 ω の虚部が最大値をとるモードが基本波を示しておりこのときの固有関数を用いる⁽⁹⁾。計算領域は流れ方向が $L_x=2\pi/\alpha$ とし, 垂直方向はパラメータ $\beta=1$ とする。

成長したかく乱を求めるためにかく乱の成分 u, v のフーリエ解析を用いて次のように振幅の大きさを定式化する⁽⁵⁾。

$$A(t) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [2\bar{u}(k_x, t) \bar{u}^\dagger(k_x, t) + 2\bar{v}(k_x, t) \bar{v}^\dagger(k_x, t)] dy} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで $\dagger$ は複素共役を示し, 本研究では基本波 ($k_x=1$) について調べた。

線形領域の計算は, 安定性理論で与えられ解が DNS コードでも再現できることが重要であり, また非線形発展

(a) 初期条件 ($t=0$) (b) 線形領域 ($t=1$) (c) 非線形領域 ($t=16$)図 8 v -固有関数

する様子を調査することは自由せん断層のシミュレーションの基本的問題となっている。

平均速度分布(17)に対し ω の虚部が最大値をとることを調べると, $\alpha=0.8892$ のときであり, このとき ω の虚部は最大値 $0.1264i$ をとる⁽⁹⁾。

初期振幅 $A_0=0.01$ とし, $(N_x, N_y)=(32, 128)$ でレイノルズ数を変えたときの振幅 $A(t)$ を図 4 に示す。 $Re=\infty$ は非粘性の Rayleigh 方程式から得られた初期かく乱が線形発達をした場合を示す。図 4 からわかるようにレイノルズ数が小さくなるほど粘性の影響から $Re=\infty$ の場合との差が大きくなることがわかる。また, 初期条件 $A_0=0.01$ では $0 \leq t \leq 20$ の間ではレイノルズ数にかかわらずおおよそ線形に成長していることがわかる。

次に初期振幅を $A_0=0.05$ としてシミュレーションを行ったときの振幅 $A(t)$ の時間変化を図 5 に示す。図 5 からわかるように $t=10$ まで $A(t)$ は線形安定性理論の結果に一致して直線的に線形発達しているが, それ以後は増幅率が減少している。このことは, かく乱の基本波が飽和し, 非線形発達が始まったことを示している。 $t=16$ のときの $0 \leq x \leq 2\pi/\alpha$, $-1.67 \leq y \leq 1.67$ の渦度分布を図 6 に示す。図 6 より渦度の集中がおこり, ロール構造ができ始めていることがわかる⁽¹⁰⁾。

また, 初期振幅 $A_0=0.05$ での流れ方向の流速 u , および垂直方向の流速 v のそれぞれの基本波に対する固有関数を図 7, 8 に示す。固有関数は式(20)における $\bar{u}$, $\bar{v}$ に対応する。それぞれ $t=0$, $t=1$, および $t=16$ の場合を示している。 $t=0$ は初期かく乱を示し, $t=1$ のときは, まだ線形発達を示しているので, $t=0$ のときの固有関数に比べ実部(図中で点線), 虚部(図中で一点鎖線)が異なり位相差があることを示すが大きさ(図中で実線)の分布は $t=0$ の場合と相似形でよく一致している。一方 $t=16$ のときは図 5 からわかるように非線形発達が始まっており, $t=16$ の固有関数の分布も線形領域の分布と異なっていることがわかる。

4. ま と め

連続の条件を常に満たす非圧縮性 N-S 方程式の解法スキームにおいて, $-\infty < y < \infty$ で境界条件が与えられる自由せん断層をシミュレートする際に必要な写像関数を応用したスペクトル法とその非線形項の取扱いによって Stuart 解がモード数 $(N_x, N_y)=(32, 128)$ で精度よく与えられることが確かめられた。

また二次元自由せん断層中の線形安定性理論から得られたかく乱の線形発達, およびその後に非線形発達が起ることが確かめられた。

本スキームの線形領域の解は安定性理論の解とよく一致することが確かめられ, 非線形領域では基本波成分の成長が飽和していくことが示され, 成長の飽和は渦の形成に対応することが明らかになった。

本研究の一部は文部省科学研究費(No. 03650154)の補助によって行われたものであり, ここに感謝の意を表す。

文 献

- (1) Moser, R. D. and Moin, P., *Rep., Stanford Univ.*, No. TF 20 (1984).
- (2) 山本・細川, *J. Phys. Soc. J.*, **57**-5 (1988), 1532.
- (3) 前川・Mansour, N. N., *機論*, **57** 540, B (1991), 2583.
- (4) Davis, R. W. and Moore, E. F., *Phys. Fluids.*, **28** (1985),

- 1626.
- (5) Rogers, M. M. and Moser, R. D., *J. Fluid. Mech.*, **243** (1992), 183.
 - (6) Buell, J. C., *J. Comput. Phys.*, **95** (1991), 313.
 - (7) Cain, A. B., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., *J. Comput. Phys.*, **56** (1984), 272.
 - (8) Stuart, J. H., *J. Fluid. Mech.*, **29** (1967), 417.
 - (9) 前川・長友, 機論, **57**-542, B (1991), 3365.
 - (10) Corcos, G. M. and Lin, S. J., *J. Fluid. Mech.*, **139** (1984), 29.
-