境界上の速度の積分を用いた粘性流の解析*
(第2報, 円柱回りの流れの計算例と小領域分割法の検討)宇多小路 豊^{*1}, 斉藤 圭司郎^{*2}Numerical Flow Calculation based on Velocity Integrals on Boundary
(2nd Report, Calculation of Flow around a Circular Cylinder
and Review of Calculation Method)

Yutaka UTAKOJI and Keishiroh SAITOH

Two-dimensional incompressible viscous flow calculation has been presented. Flow field has been divided into small sub-domains. Vorticity and vortical velocity distributions in the sub-domain have been calculated using BEM (boundary element method) similar to Wu's method, and then vortical velocity has been superposed with potential flow to obtain overall flow field. Effects of vorticity distribution outside of sub-domain boundary have been taken into consideration in calculations based on velocity integrals on boundary. Vorticity diffusion has been treated as transient potential flow problems by BEM. The transport of vortices has been considered as the instantaneous vortex source distributed in the flow field. Calculations of viscous flow around a circular cylinder at moderate Reynolds numbers 1 000 and 1 200 have been presented. Merits of using sub-domains in the case of sparse but large-sized matrices have been explained.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Viscous Flow, Velocity Distribution

1. 緒 言

Wu らの手法^{(1)~(3)}と同様な境界要素を用いて流れの場を計算することを試みた。Wu らが定式化した手法は境界よりも外に存在する渦度等の影響を境界上の速度の積分に変換する意味をもっているため、あまり大きくない領域を設定して領域内の渦度分布により誘起される速度を計算すると同時に、境界の外の遠い点で影響度の少ない渦による影響をまとめて境界上の速度の積分値として計算に取り込むことができる。このような観点から、比較的小きな境界を設けて小規模の計算を繰返して全体の流れを求めることを試みた。また、Wu らの計算よりは高いレイノルズ数の流れの計算を試みた。第1報の解析方法と簡単な非圧縮性・二次元の平板上の流れに関する計算例を説明したので、本報では円柱回りの流れの計算結果について説明する。

おもな記号

d : 円柱の直径

G : グリーン関数

$\mathbf{n}$: 境界に垂直な外方向単位ベクトル

t : 時刻および時間ステップ

U : 無限遠の一樣流速度

$\mathbf{u}$ (およびベクトル $\mathbf{u}$): 速度

ν : 動粘性係数

τ : 瞬間的な渦度の置かれた時刻

ω (およびベクトル ω): 渦度

添 字

i : 座標軸, 二次元では $i=1, 2$

V : 渦で誘起された速度成分 (Vortical Velocity)

2. 解 析 方 法

領域分割を行った小さな領域の任意の点における速度は Wu らの^{(1)~(3)}の提示した積分表示式(1)で表すことができる。また、渦度の拡散式は(2)のように表示できることが知られている⁽¹⁾。これらの基礎方程式を離散化して、速度分布と渦度分布を微小時間ステップごとに計算し、全領域の流れを求める。すなわち、固体壁面上では流れがスリップしない条件から、式(1)を用いて固体壁に接した部分の渦度分布をまず決定し、このような境界条件を満足する渦度分布が粘性拡散式

* 原稿受付 平成6年1月19日。

^{*1} 正員, 京都大学工学部 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)。

^{*2} 学生員, 京都大学大学院。

(2)によって微小時間ステップ後にどのような渦度分布をとるかを求める。新しい渦度分布によって誘起される固体壁上の速度はスリップしないという条件から外れるが、次の時間ステップで固体壁に接した部分の渦度分布を修正して計算ステップを進めていく。

$$\beta \mathbf{u}_v(\xi_i) = - \int_A (\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{G}) dA + \int_S \{ (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{G} \times \mathbf{n}) \times \} \mathbf{u}_v dS \quad \cdots \cdots (1)$$

$\beta=1$: $P(\xi_i)$ が領域の中にある場合

$\beta=1/2$: $P(\xi_i)$ が滑らかな境界上にある場合

$\mathbf{G}$ は観測点からソース点に向かう方向をもったベクトルであって

$$\mathbf{G} = \nabla \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right\} \text{ (二次元) } = - \frac{\mathbf{r}}{2\pi r^2}$$

である。また

$\mathbf{r}$: ソース点から観測点に向かう位置ベクトル

$r=|\mathbf{r}|$, $r^2=(\xi_i-x_i)^2$, x_i : ソース点の座標

ξ_i : 観測点の座標

である。

$$\begin{aligned} \alpha \omega(\xi_i, t) &= \nu \int_0^t d\tau \int_S (\mathbf{G} \mathbf{n} \cdot \nabla \omega - \omega \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}) dS \\ &+ \int_0^t d\tau \int_A \mathbf{G} (-\mathbf{u} \cdot \nabla \omega) dA + \int_A [\mathbf{G} \omega]_{\tau=0} dA \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$\alpha=1$: $P(\xi_i)$ が領域の中にある場合

$\alpha=0$: $P(\xi_i)$ が領域の外にある場合

3. 計 算

解析例あるいは実験結果が公表されているレイノルズ数1000と1200について出発流れの計算を行った。

格子を図1のように円柱の中心点を通る放射状の直線と同心円で構成し、円柱に近い部分では半径方向の格子間隔を円周方向の間隔よりも狭めに設定し、円柱

から遠い部分はほぼ正方形の格子になるように計画した。分割数は円周方向の半円周分を120分割、半径方向を127分割とし、流れが上下対称であるという仮定のもとに上半分のみの計算を実施した。また、図1の格子の最外周を円柱に比べてかなり大きくとり、最外周円上ではVortical Velocityが零であるという単純な条件を設け、円柱の後流がこの最外周円上に到達する時刻より前の状態で計算を行った。

4. 計算結果と考察

4.1 計算結果 レイノルズ数 $Re=1000$ の $Ut/d=0.5 \sim 2.0$ の計算結果と Ta Phuoc Loc の差分法による結果⁽⁴⁾ を比較して図2に示す。双子渦の長さ L の成長の様子を図3に示す。縦軸は双子渦の長さ L を円柱の直径 d で除した値、横軸は無次元時刻である。流線の様子や双子渦の成長の様子は、Kawamura ら⁽⁵⁾ や Rumsey⁽⁶⁾ らの差分法による計算結果、および、Taneda⁽⁷⁾ の実験結果とよく一致している。

次に、はく離点の移動の様子を Kawamura ら⁽⁵⁾ や Rumsey⁽⁶⁾ の差分法による計算結果と Nagata ら⁽⁸⁾ の実験結果とともに図4に示す。 S_p は後方よどみ点から測ったはく離点の角度で、はく離点は流線が円柱から離れる位置から求めた。時刻 $1 \leq Ut/d$ 以降でははく離点は $70 \sim 80^\circ$ となり、Kawamura ら⁽⁵⁾ や Rumsey⁽⁶⁾ らの結果よりははく離点の角度が若干小さいが、 Ut/d の小さい時刻に後方よどみ点近傍ではく離を起こし時間の経過とともに前方に移動していく過程の最初の部分は、Rumsey⁽⁵⁾ らの計算結果、および、Nagata ら⁽⁸⁾ の実験結果に近い値となっている。

4.2 考察 第1報の平板上の流れの計算と同様に、流れの方向の格子間隔はクーラン数の条件を守る立場から比較的粗くし、流れに直角方向の格子間隔は渦度の拡散現象を精度よく捕捉するために極力細かく

図1 計算に用いた格子

する必要がある。このような格子間隔への要求条件を満たすことは、円柱の後流のような渦を巻く部分では不可能となる。にもかかわらずこの計算例を見る限りでは、上述の必要条件を十分には満たしていないことからくる誤差が致命的にはなっていないように見える。

今回の計算例では、壁面からある程度距離の離れた領域においても壁面近くとまったく同じ計算を行って

いるが、これらの領域では渦の粘性拡散の項は小さく渦の移送項が支配的となる領域であるから、渦点法的な簡潔な計算方法に乗り換える手法のほうが望ましいであろう。

Wu らがレイノルズ数 40 程度の円柱回りの流れの計算例を示していたのに比べて今回の計算例がかなり高いレイノルズ数を達成できたのは、流れに直角方向の格子間隔を極度に狭くし、それに伴って非常に細長

図2 得られた流線(右)と Ta Phuoc Loc の流線(左)の比較 ($Re=1000$)

図3 双子渦の長さの成長の様子 ($Re=1200$)

図4 はく離点の移動の様子 ($Re=1200$)

図5 円柱周辺の小さな計算領域と三角形要素の再分割

くなる三角形要素等の中をさらにサブの小さな三角形に細分(図5)したうえでそれぞれにガウスの求積法を適用するなどの工夫を行って、渦度分布が近隣の格子点に及ぼす影響係数や渦度の拡散の大きさの数値積分の精度を確保することができたためであろう。

4・3 領域を分割したことの効用 今回の計算例では円柱の回りに細長いセクタ状の小さな領域Aを設けて、その領域内の渦度がセクタの中央の格子点に及ぼす影響の面積積分と、領域Aを取り囲む境界S上の Vortical Velocity が中央の格子点に及ぼす影響の線積分を合算して中央部の格子点の Vortical Velocity を算出している(図5)。仮に、円周方向を100分割し、半径方向も円柱の表面から外を100分割して、合計10000点(10^4 点)の格子点を領域に配置してその流れを一挙に大形計算機を用いて解くことを考えると、任意の格子点の渦度が他の任意の格子点の Vortical Velocity に及ぼす影響をまとめて記述した行列は

$$10^4 \times 10^4 = 10^8$$

の規模となり、取扱いは容易ではない。しかも、その行列の要素は対角線部分の値が大きくて全体の計算を支配しており、対角線から離れた大部分の行列要素の値は非常に小さく行列演算の結果への影響度は小さい。これに対して今回の計算では、図5に示すとおり円周方向に5列の細長い領域の計算を繰返しているの、行列の規模は

$$5 \times 10^2 \times 10^2 = 5 \times 10^4$$

であって 10^8 規模に比べると圧倒的に小さな行列で済んでいる。円柱回りの流れの計算という特殊な事例であるために同一の小規模の行列を円周の前縁側から後縁側に至るまで繰返し使用したが、円柱でない任意形

状であって円周方向に相当する100列に対応してそれぞれ異なった行列を準備して順次計算する場合であっても

$$5 \times 10^2 \times 10^2 \times (100 \text{ 種類}) = 5 \times 10^6$$

程度の大きさであって 10^8 規模に比べれば依然として小規模の計算で済むことが理解できる。このように境界Sで取り囲まれた小さな領域Aで計算を行うことは、大形の行列の対角線近傍のみを切りとった小形の行列で計算を行うことを意味し、しかも、行列の中の遠い点の影響を示す部分を境界S上の線積分で完全に補っている。このような観点から今回は小規模の計算の繰返しを行って、流域全体の流れの解析を行ったものである。

取扱うデータ量が少ないことが利点であるはずの境界要素法ではあるが、粘性流を取扱って領域の広範囲に分布している渦度を扱うこととなるとデータ量が激増するので今回の試算においても上述のような計算上の工夫が必要であった。

5. 結 語

レイノルズ数1000程度の円柱回りの出発流れを境界要素法を用いて行うことができた。双子渦の生成等の状況は差分法による解析例や実験結果とおよそ一致するが、時刻 $1 \leq Ut/d$ 以降では離点は差分法による他の計算例より若干小さい結果が得られた。

また、小さな領域に分割して小領域ごとに境界要素法を適用し、小規模の計算を繰返すことで全体の流れを求めることができた。

本研究に際し、助言をいただいた京都大学の赤松教授に厚くお礼を申し上げる。また、計算精度の向上等について京都大学の流体工学研究室の方々に協力をいただいたことを申し添え感謝の意を表す。

文 献

- (1) Banerjee, P. K. and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, (1981), 333-336, 217, McGraw-Hill Book Co. (UK).
- (2) Wu, J. C. and Thompson, J. F., *Comput. Fluids*, **1**(1972), 197-215.
- (3) Wu, J. C. and Rizk, Y. M., *Proc. Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn. (6th)*, (1979), 559.
- (4) Ta Phuoc Loc, *J. Fluid Mech.*, **100**(1980), 111.
- (5) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA Paper*, No. 84-0340 (1984).
- (6) Rumsey, C. L., *Proc. Forum Unsteady Flow Separat.*, FED-52, ASME, (1987).
- (7) Taneda, S., *Proc. IUTAM Symp.*, **2**(1971), 1165.
- (8) Nagata, H., Minami, K. and Murata, Y., *JSMF*, **22** 166 (1979), 512.