コラプシブルチューブに発生する自励振動* (集中定数モデルによる検討)

林 叡*¹, 丹羽 匡孝*², 早瀬 敏幸*¹

Self-Excited Vibrations Occurring in Collapsible Tubes (Analysis by Lumped Parameter Model)

Satoru HAYASHI, Masataka TANBA and Toshiyuki HAYASE

In this paper, self-excited vibrations occurring in collapsible tubes are investigated on the basis of a lumped parameter model. The instability condition is theoretically derived and the unstable region is indicated, which almost coincides with that of the simplified model in the previous paper. It is shown that the collapsible tube system consists of two modes corresponding to the characteristic roots of the system, and that the higher frequency mode can be unstable but the lower frequency mode is always stable. The global behavior of the collapsible tube is numerically investigated.

Key Words: Collapsible Tube, Flow Induced Vibration, Self-Excited Vibration, Biomechanics, Blood Flow, Lumped Parameter Model

1. はじめに

コラプシブルチューブは流れの変化とチューブの変形が互いに影響し合って著しい非線形特性を示すので、その流動は複雑となって負性抵抗特性を示したり自励振動が発生することがあり、これが人工心肺への脱血回路に生ずる振動、血圧測定時に発生するコロトコフ音など生理学上の問題と深く関わっているため、従来から多くの研究がなされている^{(1)~(5)}。特に自励振動発生機構に関する実験的、理論的研究は多いが、未だ現象を統一的に説明し得る理論はない。

既往の多くの研究では、コラプシブルチューブ内流れの特異性は圧平されたチューブのくびれ部に発生するはく離の寄与によるとして、その数学モデルにははく離が考慮されている。しかし、著者の一人は、このはく離の影響は二次的なものであり、あくまで粘性抵抗損失が主要因であるとする立場から、はく離の影響を無視した数学モデルを分布定数モデルとして導き、静特性に関する理論結果が実験結果とよく一致すること

を示した⁽⁶⁾⁽⁷⁾。さらに、この静特性を勘案しつつコラプシブルチューブの動的挙動を集中定数モデルとして近似し、流れが不安定となる条件とその機構を明らかにした⁽⁸⁾。その際チューブの上流圧力を一定とし、系の次数を二次に低減した簡単化モデルを用いた。

本研究では上述の仮定をはずして四次系の安定性を検討し、さらに Runge-Kutta 法によって四次の集中定数モデル系に基づき、その大域的挙動を検討して発生する自励振動の基本的性格を明らかにした。

2. コラプシブルチューブの数学モデル

図1はコラプシブルチューブの模式図である。このチューブ内流れに生ずるはく離の影響を無視して前報で導いた基礎方程式を列記する。

運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \tau_w \frac{S}{A} \dots \dots \dots (1)$$

連続の式は、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

チューブ膜に作用する力の平衡式は、

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -P_t + \phi \left(\frac{A}{A_0} \right) \dots \dots \dots (3)$$

* 平成5年7月23日 D&Dにおいて講演、原稿受付 平成6年3月9日。

*¹ 正員、東北大学流体科学研究所(〒980-77 仙台市青葉区片平2-1-1)。

*² ダイナボット会社(〒105 東京都港区虎ノ門3-8-21)。

図1 コラプシブルチューブの模式図

ここに、 u は流速、 P はチューブ内圧力、 x はチューブ上流端からの軸方向距離、 S はチューブ周長、 A はチューブ断面積、 A_0 は剛体管路断面積、 $\tau_w (= f_t \rho |u| u)$ は壁面せん断応力、 f_t はチューブの抵抗係数、 T はチューブ張力、 $P_t (= P - P_e)$ はチューブ伸展圧、 y は圧平されたチューブ断面形状を長方形で近似した場合の中心線から膜面までの高さである⁽⁶⁾。また、 ϕ はチューブ則で、Shapiro⁽³⁾の表式を用いる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{圧平時} \\ 0 < y \leq y_0 \\ \phi\left(\frac{A}{A_0}\right) = K_p \left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^{-3/2}\right] \\ = K_p \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-3/2}\right] \\ \text{膨張時} \\ y_0 < y \\ \phi\left(\frac{A}{A_0}\right) = K_e \left[\left(\frac{A}{A_0}\right) - 1\right] \\ = K_e \left[\left(\frac{y}{y_0}\right) - 1\right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 K_p 、 K_e は圧平時、膨張時のチューブ剛さ係数、 y_0 は上流・下流端のチューブ高さである⁽⁶⁾。

これらの方程式を与えられた境界条件の下で解析的に解くことは困難であるから、著者らは、まず既報の研究において分布定数モデルに基づいて静特性を数値的に解き、その結果⁽⁶⁾⁽⁷⁾とチューブの動的挙動を集中定数近似した基礎方程式とから定常流の安定性を検討した⁽⁸⁾。なお計算に用いる系諸元は付録に示す。

3. 集中定数模型による基礎方程式

前報⁽⁸⁾と同様にコラプシブルチューブを図1のように3区分して集中定数近似し、流路の動作を記述する基礎方程式を導くと以下ようになる。ただし、剛体管路 L_1 の上流端には P_s の定圧水槽が、剛体管路 L_2 の下流端には抵抗 R が接続されているものとする。

上流剛体管路内流体柱の運動方程式は、

$$L_1 \frac{dQ_1}{dt} = P_s - P_1 - r|Q_1|Q_1 \dots\dots\dots (5)$$

図2 静特性曲線 $\Delta P = F(Q, P_{t0})$
 $[P_e = 4.00 \text{ kPa}, R = 300 \text{ GPa}/(\text{m}^3/\text{s})^2]$

チューブの上流域Iにおける容量特性は、

$$C_1 \frac{dP_1}{dt} = Q_1 - Q \dots\dots\dots (6)$$

チューブのくびれ部IIの抵抗特性はチューブ静特性の表式によって次式のように表されるものとする。

$$\Delta P = F(Q, P_{t0}) \dots\dots\dots (7)$$

チューブの下流域IIIにおける容量特性は、

$$C_2 \frac{dP_2}{dt} = Q - Q_2 \dots\dots\dots (8)$$

下流剛体管路内流体柱の運動方程式は、

$$L_2 \frac{dQ_2}{dt} = P_2 - R|Q_2|Q_2 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $L_1 (= \rho l_1 / A_0)$ 、 $L_2 (= \rho l_2 / A_0)$ はそれぞれ長さ l_1 、 l_2 の上流、下流管路のイナータンス、 Q_1 、 Q 、 Q_2 はそれぞれ上流管路、くびれ部、下流管路の流量、 C_1 、 C_2 はそれぞれチューブ上流域I、下流域IIIの等価キャパシタンス、 P_s は上流の定圧水槽圧力、 P_1 、 P_2 はそれぞれチューブの上流、下流圧力、 ΔP はチューブ圧力損失、 $P_{t0} (= P_2 - P_e)$ はチューブ下流端の伸展圧、 P_e は外圧、 r は上流管路抵抗、 R は下流の管路と絞りの抵抗である。

式(7)の静特性曲線の1例を図2に示す。この静特性の表現形式は流量 Q とチューブ圧力損失 ΔP の関係を示したもので、Conrad⁽¹⁾以来多くの研究でこの表現が取られているが、本解析では、式(6)、(8)に見られるとおり式(7)を Q について解いて次式の形に表示の方が好都合である。

$$Q = f(\Delta P, P_{ti}) \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は上流圧力 P_1 を圧力基準に取ってチューブ上流端伸展圧 $P_{ti} (= P_1 - P_e)$ をパラメータとして流量 Q を圧力差 $\Delta P = P_1 - P_2$ の関数として表したものである。

図3 静特性曲線 $Q=f(P_1-P_2, P_{ti})$

分布定数表現したコラプシブルチューブの基礎方程式を数値的に解いた式(10)の特性を図3に示す。この図にはチューブ上流端伸展圧 $P_{ti}=P_1-P_e$ をパラメータとした一連の曲線群が示してある。これらの曲線の正確な解析的表示は困難であるから、式(5)～(9)による系の動特性の計算に際して数値データをあらかじめコンピュータに記憶させておき、スプライン補間によって関数値を求めることにした。

4. 解析結果

4・1 定常動作点 一定の供給圧力 P_s 、一定の外圧 P_e の下での定常流れ、すなわち定常動作点は式(5)、(6)、(8)、(9)における時間微分項を $d/dt=0$ とおいて得られる式(11)の解として求められる。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_s - r|Q|Q \\ Q &= f(P_2 - P_1, P_{ti}) \\ P_2 &= R|Q|Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)から得られる定常流量 Q と供給圧力 P_s の関係を図4、図5に示す。図に見られるように一定の上流圧力 P_s に対して、動作点1個が存在する場合〔領域(a)〕、定常流量の異なる3個の定常動作点が存在する場合〔領域(b)〕が生ずる。 $P_e=4$ kPa のばあいについて極大点近傍を拡大して図5に示す。図5では $P_s=6.13$ kPa～ 6.41 kPa の間で動作点は複数個となる。

4・2 安定性 この系の大域的挙動の検討に先だって動作点、すなわち定常流の安定性について調べるために式(5)、(6)、(8)、(9)、(10)から動作点における線形化式の特性方程式を求めると次のようになる。

$$s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$a_0 = ACF - BDE + EF$$

$$a_1 = CD(A-B)(A+B)(D-B)$$

$$a_2 = (A-B)(C+D) + CD + E + F$$

図4 定常状態における供給圧力と流量の関係
[$R=300$ GPa/(m³/s)²] 図5 Q vs. P_s 曲線の拡大図 [$P_e=4.00$ kPa]

$$a_3 = A - B + C + D$$

$$A = f_{P1}/C_1, \quad B = f_{P2}/C_2,$$

$$C = 2rQ_0/L_1, \quad D = 2RQ_0/L_2,$$

$$E = 1/C_1L_1, \quad F = 1/C_2L_2,$$

$$f_{P1} = \partial f / \partial P_1, \quad f_{P2} = \partial f / \partial P_2.$$

この系が不安定となる条件は Routh-Hurwitz 法から、

$$a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2 > 0 \dots\dots\dots (13)$$

この四次系の安定条件は多くのパラメータが関わって複雑になるので、前報ではチューブの上流側キャパシタンスが十分大きく、上流圧 P_1 はほとんど変化しないとの前提下に特性方程式の次数を二次に低減して次の不安定条件をえた。

$$\left. \begin{aligned} D1 &= 2RQ_0f_{P2} - 1 < 0 \\ \text{あるいは} \quad D2 &= 2RC_2Q_0F_{P0} - L_2 < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

図6に二次系としての不安定条件式(14)から求めた安定限界を静特性曲線上に示した。この図の場合、曲

線 D1, D2 はそれぞれ式(14)の第1式, 第2式から求めたものであるが, D2 は D1 を包含しているので D2 曲線が事実上安定限界線となる。上流圧力 P_1 の変化を考慮した四次系の安定条件式(13)から求めた安定限界曲線は D2 とほぼ一致し, 両者の間には事実上差は認められなかった。これは定常動作点近傍の微小じょう乱に対する解析において上流圧力 P_1 を一定とする仮定の妥当性を示す一証左と考えられる。

4.3 大域的挙動 定常動作点が不安定な場合の振動の自励過程を解析的に扱うことは, その非線形特性のため困難であるから, Runge-Kutta法による数値シミュレーションによって検討することとし, 初期点を不安定動作点の近傍に選んだ場合の挙動を検討する。

図7は初期点を図5の領域(a)中の $P_s=6$ kPa に取った場合の自励振動波形であり, 一種の弛緩振動となっている。図に見るとおり振動は下流側で激しく, 上流側ではほとんど振動していない。これらの特徴はいずれも実験結果とよく一致している⁽⁶⁾。領域(b)に発生する振動の波形も図7と定性的には同じである

図6 定常動作点の安定性
[$R=300 \text{ GPa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$, $C_2=4.77 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$]

図7 領域(a)における自励振動 [$P_s=6.00$ kPa]

が, この領域では同一の圧力 P_s に対して3個の定常状態が対応しており, 初期点を図5の ab, de 間にとった場合と bcd 間にとった場合とではその挙動はかなり異なる。

図8は ab 間あるいは de 間に初期点を取った場合の位相軌跡である(集中定数系の挙動を完全に記述する四次元の状態空間の表示は困難なため, ここでは Q_2 と ΔP からなる二次元の位相面を用いた)。図に見るとおり同一の P_s に対して3動作点 A, B, C があり, A, B はそれぞれ ab 上, de 上の不安定点, C は ef 上の安定点である。数値解析によれば A, B 点近傍から出発した軌跡はいずれも同一リミットサイクルに達しているが, 安定平衡点 C 近傍から出発した軌跡は C 点に収束している。

一方, 区間 bcd 上の定常点近傍に初期点を取ると, 図9に見られるように軌跡はいずれも安定動作点 C

図8 ab間における位相面軌跡 [$P_s=6.25$ kPa]

図9 bd間における位相面軌跡
[$P_s=6.35$ kPa]

に収束して振動は持続しない。リミットサイクルと定常点に関する位相空間的な構造を数値解析手法によって解明するためには膨大な計算量を必要とするので、この点に関する詳細は別途に検討する。

次に、 P_s の低い安定領域から出発して P_s を漸増させて振動の消長を調べた。計算では P_s 一定の条件の下に適当な初期条件を与えて自励振動を発生させ一定時間計算した後、 P_s のみをわずかに変化させて計算を続行した。結果を図 10 に示す。横軸の流量 Q はチューブ上流側流量 Q_1 の平均値を取ってある。

P_s を増加させるととき図の B 点から振動は自励し始め、D 点で停止する。逆に P_s を減少させる場合、C 点から発振し始め、A 点で振動は終わる。B、C 点は図 6 の安定限界に対応しているが、AB 間、CD 間に見られるように明らかに定常動作点の不安定域と自励振動の発生域とは一致せず、一種の履歴現象を示している。この点も実験的事実⁽⁷⁾ とよく符合している。

次に、この流体回路を振動学的観点から解釈してみる。式(5)～(10)を電気回路で等価的に表現すると図 11 のようになり、 f がチューブ特性に対応する非線形抵抗を表している。振動方程式の形に書き表すと、

$$\left. \begin{aligned} C_1 L_1 \dot{Q}_1'' + 2C_1 r |Q_1| \dot{Q}_1' + Q_1 &= f \\ C_2 L_2 \dot{Q}_2'' + 2C_2 R |Q_2| \dot{Q}_2' + Q_2 &= f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

図 10 自励振動発生域と履歴現象
[$R=300 \text{ GPa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$, $C_2=4.77 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$]

図 11 コラプシブルチューブ系と等価な電気回路

となって、それぞれ上流側と下流側の剛体管路慣性とチューブ容量で構成される固有角振動数

$$\omega_1 = 1/\sqrt{C_1 L_1}, \quad \omega_2 = 1/\sqrt{C_2 L_2} \dots\dots\dots (16)$$

の振動系が非線形抵抗 f を介して連成する形になっている。チューブの圧平状況によって f が変化するので、それに伴って各モードの振動数も変化する。

図 10 の静特性曲線上の動作点に対して、式(12)を解いて得た特性根の虚数部に対応する振動数の変化は図 12 の曲線のようにになる。図においてチューブが圧平状態にある低流量域の振動数は式(16)のそれと大略一致しており、上流側の振動数はチューブ容量 C_1 が下流側に比べて大きいことを反映して著しく低い値を取っている。もちろんこれらの関係は定常動作点近傍の局所的挙動に限り成立する関係であり、この条件の下では下流側の高振動数モードのみが不安定となり、上流側の低振動数モードは決して不安定にならない。これは前報⁽⁸⁾ に述べた系の発振機構からも推測される。

(a) $C_2=4.77 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$

(b) $C_2=1.13 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$

図 12 定常動作点近傍における 2 モードの振動数
(□, △シミュレーション結果, —, - - - 式(12)の計算結果)

図 13 2 モードの振動が共存する自励振動波形

図 14 2 モードの振動の同時発生を示す実測波形

定常動作点近傍の局所的な挙動に関してはこのような単純化した考え方が出来るが、定常点から大きくずれると非線形特性の影響が著しく、もはやこの関係が成立するとは限らず、状況は非常に複雑になる。この点に関しては図 8、図 9 に示した大域的挙動や図 10 に示した履歴現象に見られるとおりである。

数値解析結果によれば上述の振動の他にも非線形特性の影響著しい特異な現象が見られる。すなわち、不安定系において下流側に振動が成長すると、安定な低振動数モードも励起されて 2 モードが共存することもある。

図 13(a), (b) は $C_2 = 1.13 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ 、図 13(c) は $C_2 = 4.77 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ のシミュレーション結果であり、いずれも 2 モードの振動が重なっている。この結果から得た 2 成分の振動数は、図 12(b) に□、△印で表されているとおり、各モードの線形振動数に近い値を示している。この理論結果は図 14 に示す

ように実験的にも確認された。

5. む す び

本報ではコラプシブルチューブ内流れの動的挙動を集中定数模型で近似し、数値解析手法によって系の局所的性質と大域的挙動の関係を検討した。

本来、分布定数である系を集中定数で近似したため、チューブ膜面を伝ばする波動に関わる諸現象は全く無視した形になっている。また、チューブの上流、下流のキャパシタンスを一定として扱ったが、これらはチューブの圧平状態によって変化すると考えられ、これも実際の系との食い違いの原因となると考えられる。これらの諸点に関してはかなりの単純化を行ったにもかかわらず、定性的には実験事実をかなりよく説明し得る結果を得て、この系の動的挙動に関する基本構造に関する知見を得た。

本研究の一部は文部省科学研究費補助金・総合研究(A)によって行ったものであることを付記する。

付 録

表 1 計算に用いた系諸元

Density of water	$\rho = 0.9982 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Upstream inertance	$L_1 = 2.27 \times 10^6 \text{ kg/m}^4$
Downstream inertance	$L_2 = 2.27 \times 10^6 \text{ kg/m}^4$
Upstream capacitance	$C_1 = 1.00 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{Pa}$
Downstream capacitance	$C_2 = 1.13 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ $4.77 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$
Upstream resistance	$r = 5.0 \times 10^{10} \text{ Pas}^2/\text{m}^6$
Downstream resistance	$R = 3.0 \times 10^{11} \text{ Pas}^2/\text{m}^6$
External pressure	$P_e = 4.0 \text{ kPa}$

文 献

- (1) Conrad, W. A., *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, BME **16** (1969), 284.
- (2) Katz, A. I., Chen, Y. and Moreno, A. H., *Biophys. J.*, **9** (1969), 1261.
- (3) Shapiro, A. H., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **99**-3 (1977), 126.
- (4) Cancelli, C. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **175** (1985), 375.
- (5) 松崎・池田, 機論, **57**-534, B(1991), 468.
- (6) 林・豊田・佐藤, 機論, **57**-534, B(1991), 387.
- (7) Hayashi, S., Honda, T. and Hayase, T., *Rep. Inst. Fluid Science, Tohoku Univ.*, **3**(1991), 201.
- (8) 林・本多・丹羽, 機論, **58**-549, B(1992), 1140.
- (9) 山根・折田, 機論, **58**-551, B(1992), 1134.