改良された多重相反境界要素法による軸対称定常熱伝導解析*

落 合 芳 博^{*1}Axisymmetric Heat Conduction Analysis under Steady State
by Improved Multiple-Reciprocity Boundary Element Method

Yoshihiro OCHIAI

Heat conduction analysis without heat generation under a steady state can be easily treated by the boundary element method. However, for the case with heat generation, a domain integral is necessary. This paper shows that the problem of steady heat conduction with heat generation can approximately be solved without the domain integral by the improved multiple-reciprocity boundary element method. The multiple-reciprocity boundary element method is not suitable for the complicated heat generation. In the improved multiple-reciprocity boundary element method, the domain integral in the each step is divided into point, line and area integrals. In order to solve the problem, the contour lines of heat generation, which approximate the actual heat generation, are used.

Key Words: Boundary Element Method, Heat Conduction, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Harmonic Function, Axisymmetric Problem

1. 緒 言

境界要素法において領域内に任意の熱発生を伴う熱伝導解析を行う場合、領域積分が必要になる。しかし、領域を部分領域に分割し、その部分領域内での熱発生分布がラプラスの方程式で近似できる場合は、領域積分を境界積分に置き換えることが可能である⁽¹⁾。ただし、上記の手法では、近似の精度が落ちる場合がある。また、多重相反境界要素法も領域積分を境界積分に置き換える方法であるが、この方法は熱発生分布が関数で与えられている場合にしか使用することができない⁽²⁾⁽³⁾。そこで、本論文では境界形セルの考えを考慮に入れ、多重相反境界要素法を改良することにより、精度よく熱発生分布を近似する方法を示す。領域内に任意の熱発生を伴う場合でも、線積分のみで精度よく軸対称定常熱伝導解析を行うことが可能であることを示す。本手法は二次元問題および三次元問題に対して示した方法を軸対称問題に拡張したものである⁽⁴⁾。また、内部発熱量などの場合、総量が既知であったり、総量を指定したい場合があるので、与えられた分布の総量、平均値を求める方法を併せて示す。

2. 理 論

2・1 三次元問題の場合 三次元問題での定式化を示し、それらの式より軸対称問題の場合の式を誘導する。任意の熱発生 W_1 を伴う定常温度 T を求めるには、次のポアソン方程式を解かなければならない。

$$\nabla^{[3]2} T = \frac{-W_1}{\lambda} \left(\nabla^{[3]2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 λ は熱伝導率であり、上付き添字[3]は三次元を示すものとする。境界要素法によれば、上式を解くための境界積分方程式は次式で与えられる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} cT(P) = & \int_{\Gamma} \left\{ T_1^{[3]}(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} \right. \\ & \left. - \frac{\partial T_1^{[3]}(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} d\Gamma(Q) \\ & + \lambda^{-1} \int_{\Omega} T_1^{[3]} W_1(q) d\Omega \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ただし、滑らかな境界上では $c=0.5$ 、領域内部では $c=1$ であり、 Γ および Ω は境界および領域を示す。記号 Q は境界上の点を示し、 q は内点を示すものとする。なお、三次元問題の場合、式(2)における定常熱伝導解析の基本解 $T_1^{[3]}(P, Q)$ およびその単位法線 n に関する微分係数は次式で与えられる。

* 原稿受付 平成5年11月12日。

*¹ 正員、近畿大学理工学部 (〒577 東大阪市小若江3-4-1)。

$$T_1^{[3]}(P, Q) = \frac{1}{4\pi r} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial T_1^{[3]}(P, Q)}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 r は 2 点 P および Q 間の距離である。式(2)に示すように任意の熱発生 $W_1(q)$ が存在する場合、領域積分を考慮しなければならない。そこで、改良した多重相反法を活用する。式(1)の熱発生量 W_1 は、点熱源 W_{P1} および線熱源 W_{L1} 、面熱源 W_{S1} および二重

層 W_{D1} と領域全体に分布する熱源 W_{V1} に分けることができ、次式が成立する。

$$W_1 = W_{V1} + W_{S1} + W_{L1} + W_{P1} + W_{D1} \dots\dots\dots (5)$$

多重相反法の各段階 f で次式が成立するとする。

$$\nabla^2 W_{Vf-1} = -W_f \dots\dots\dots (6)$$

$$W_f = W_{Vf} + W_{Sf} + W_{Lf} + W_{Pf} + W_{Df} \dots\dots\dots (7)$$

多重相反法において高次の項は小さくなることを考慮し、 W_{V1} は近似的に次式を満足するものとする。

$$\begin{aligned} \nabla^{[3]2F} W_{V1} = & (-1)^F [W_{SF+1} + W_{LF+1} + W_{PF+1} + W_{DF+1}] \\ & + \text{sgn}(F-1) \sum_{f=1}^{F-1} (-1)^{F+f} \nabla^{[3]2f} [W_{SF-f+1} + W_{LF-f+1} + W_{PF-f+1} + W_{DF-f+1}] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ただし、 $\text{sgn}(\)$ は符号関数である。また、次式で与えられる f 重調和関数 $T_f^{[3]}$ を考える。

$$\nabla^2 T_{f+1}^{[3]} = T_f^{[3]} \dots\dots\dots (9)$$

点熱源の数を M 、線熱源の形状を Γ_L 、面熱源の形状を Γ_S 、二重層の形状を Γ_D とし、式(5)～(9)およびグリーン

の定理より、式(2)は次式となる。

$$\begin{aligned} cT(P) = & \int_{\Gamma} \left\{ T_1^{[3]}(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1^{[3]}(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} d\Gamma + \lambda^{-1} \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_n} \left\{ T_f^{[3]} \frac{\partial W_{Vf}}{\partial n} - \frac{\partial T_f^{[3]}}{\partial n} W_{Vf} \right\} d\Gamma \\ & - \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f T_f^{[3]} W_{Pfm} - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f \int_{\Gamma_L} T_f^{[3]} W_{Lf} d\Gamma_L - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f \int_{\Gamma_S} T_f^{[3]} W_{Sf} d\Gamma_S \\ & - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_f^{[3]}}{\partial n} W_{Df} d\Gamma_D \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

三次元の場合の f 重調和関数 $T_f^{[3]}$ は一般に次式で与えられる。

$$T_f^{[3]} = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!!(2f-3)!!} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial T_f^{[3]}}{\partial n} = \frac{r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!!(2f-5)!!} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $(2f)!! = 2f(2f-2)\cdots 4\cdot 2$ である。また、三次元問題における f 重調和関数 $T_f^{[3]}$ は、次の性質がある。

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{T_{f+1}^{[3]}}{T_f^{[3]}} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで、熱発生量 W_{V1} はグリーンの定理および式(5)～(9)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} cW_{V1}(P) = & - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ T_f^{[3]}(P, Q) \frac{\partial W_{Vf}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f^{[3]}(P, Q)}{\partial n} W_{Vf}(Q) \right\} d\Gamma \\ & - \sum_{m=1}^M \sum_{f=1}^F (-1)^f T_f^{[3]} W_{Pmf+1} - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^f T_f^{[3]} W_{Lf+1} d\Gamma_L \\ & - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_S} (-1)^f T_f^{[3]} W_{Sf+1} d\Gamma_S - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_f^{[3]}}{\partial n} W_{Df+1} d\Gamma_D \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

また、式(10)、(14)の W_f は同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} cW_{Vf}(P) = & \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma} \left\{ T_{e-f+1}^{[3]} \frac{\partial W_{Ve}}{\partial n} - \frac{\partial T_{e-f+1}^{[3]}}{\partial n} W_{Ve} \right\} d\Gamma_n + \sum_{m=1}^M \sum_{e=f}^F (-1)^e T_{e-f+1}^{[3]} W_{Pme+1} \\ & + \sum_{e=f}^F (-1)^e \int_{\Gamma_L} T_{e-f+1}^{[3]} W_{Le+1} d\Gamma_L + \sum_{e=f}^F (-1)^e \int_{\Gamma_S} T_{e-f+1}^{[3]} W_{Se+1} d\Gamma_S + \sum_{e=f}^F (-1)^e \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_{e-f+1}^{[3]}}{\partial n} W_{De} d\Gamma_D \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

以上により、熱発生量 W_1 が式(8)を満足していれば、境界積分のみで熱伝導解析が可能であることを示した。

次に、分布として与えられた熱発生量の総量または平均値を求める方法を示す。三次元の場合、分布 W_{S1} が式(8)を近似的に満足しているので、グリーンの定理より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_{S1} d\Omega = & \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \phi_f^{[3]}(P, Q) \frac{\partial W_{Sf}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_f^{[3]}(P, Q)}{\partial n} W_{Sf}(Q) \right\} d\Gamma(Q) \\ & + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_S} \phi_f^{[3]} W_{Sf+1} d\Gamma_S + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} \phi_f^{[3]} W_{Lf+1} d\Gamma_L + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi_f^{[3]}}{\partial n} W_{Df+1} d\Gamma_D \end{aligned}$$

$$+ \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M \phi_f^{[3]} W_{Pmf+1} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、関数 ϕ_f およびその法線方向微分係数は次式で与えられる。

$$\phi_f^{[3]} = \frac{r^{2f}}{(2f+1)!!(2f)!!} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial \phi_f^{[3]}}{\partial n} = \frac{r^{2f-1}}{(2f+1)!!(2f-2)!!} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)を用いると領域 Ω の体積は次式で表すことができる。

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_f^{[3]}}{\partial n} d\Gamma \dots\dots\dots (19)$$

2・2 軸対称の場合 軸対称問題の場合、図1に示すような座標を用いる。式(1)は、軸対称問題の場合、次式となる。

$$\nabla^{[J]2} T = -\frac{W_1}{\lambda} \left(\nabla^{[J]2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (20)$$

図1 軸対称問題における座標および境界形セル

上付き添字 $[J]$ は軸対称を示すものとする。また、式(5)は、点熱源 W_{P1} 、線熱源 W_{L1} 、面熱源 W_{S1} および二重層の熱線源を W_{D1} とすると、次式となる。

$$W_1 = W_{S1} + W_{L1} + W_{P1} + W_{D1} \dots\dots\dots (21)$$

したがって、式(8)は次式となる。

$$\begin{aligned} \nabla^{[J]2F} W_{S1} = & (-1)^F [W_{LF+1} + W_{PF+1} + W_{DF+1}] \\ & + \text{sgn}(F-1) \sum_{f=1}^{F-1} (-1)^{F+f} \nabla^{[J]2f} [W_{Lf-f+1} + W_{Pf-f+1} + W_{Df-f+1}] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

また、式(9)と同様に、次式で与えられる軸対称問題の f 重調和関数 $T^{[J]1}$ を考える。

$$\nabla^2 T^{[J]1} = T^{[J]1} \dots\dots\dots (23)$$

軸対称の場合の熱伝導解析のための境界積分方程式は、軸対称の場合の境界を S で示すと、式(10)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} cT(P) = & \int_S \left\{ T^{[J]1}(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[J]1}(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} r_0 dS \\ & - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{S_n} \left\{ \frac{\partial T^{[J]1}}{\partial n} W_{Sf} - T^{[J]1} \frac{\partial W_{Sf}}{\partial n} \right\} r_0 dS - \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f T^{[J]1} W_{Pmf} r_0 \\ & - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f \int_{\Gamma_L} T^{[J]1} W_{Lf} r_0 d\Gamma_L - \lambda^{-1} \sum_{f=1}^{F+1} (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T^{[J]1}}{\partial n} W_{Lf} r_0 d\Gamma_D \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ただし、

$$T_1^{[J]1} = \int_0^{2\pi} T_1^{[J]1} d\theta = \frac{K(m_0)}{C_1 \pi} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial T_1^{[J]1}}{\partial n} = \frac{1}{C_1 \pi} \left\{ \frac{1}{2r_0} \left[\frac{C_4}{C_2} E(m_0) - K(m_0) \right] n_r + \frac{(z-z_0)}{C_2} E(m_0) n_z \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$T_2^{[J]1} = \int_0^{2\pi} T_2^{[J]1} d\theta = \frac{C_1 E(m_0)}{2\pi} \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial T_2^{[J]1}}{\partial n} = \frac{1}{2\pi C_1} \{ [C_1^2 E(m_0) - C_4 K(m_0)] n_r + (z-z_0) K(m_0) n_z \} \dots\dots\dots (28)$$

$$T_3^{[J]1} = \int_0^{2\pi} T_3^{[J]1} d\theta = \frac{C_1^3}{72\pi} [2(2-m_0^2) E(m_0) - (1-m_0^2) K(m_0)] \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{\partial T_3^{[J]1}}{\partial n} = \frac{C_1}{48\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} [C_7 E(m_0) - C_2 K(m_0)] n_r - 6(z-z_0) K(m_0) n_z \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$K(\)$ および $E(\)$ は第1種および第2種完全円関数であり、上式の C_i および m_0^2 は次式で与えられる。

$$C_1 = [(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2} \dots\dots\dots (31)$$

$$C_2 = (r-r_0)^2 + (z-z_0)^2 \dots\dots\dots (32)$$

$$C_4 = r^2 - r_0^2 + (z-z_0)^2 \dots\dots\dots (33)$$

$$C_7 = r^2 + 7r_0^2 + (z-z_0)^2 \dots\dots\dots (34)$$

$$m_0^2 = r r_0 [(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1} \quad \dots\dots\dots (35)$$

一般に、軸対称問題の f 重調和関数 $T^{[f]}$ は式(11)より次式で与えられる。

$$T^{[f]} = \frac{C_1^{2f-3}}{\pi(2f-2)!!(2f-3)!!} \int_0^{\pi/2} [1 - m_0^2 \sin^2 \theta]^{(2f-3)/2} d\theta \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(36)の積分は次式の関係を用いることにより、順次求めることができる。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [1 - m_0^2 \sin^2 \theta]^{n/2} d\theta &= \frac{n-1}{n} (2 - m_0^2) \int_0^{\pi/2} [1 - m_0^2 \sin^2 \theta]^{(n-2)/2} d\theta \\ &\quad - \frac{n-2}{n} (1 - m_0^2) \int_0^{\pi/2} [1 - m_0^2 \sin^2 \theta]^{(n-4)/2} d\theta \quad \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

同様に、熱発生に関する式(14)、(15)は次式のみで表現することができる。

$$\begin{aligned} c W_{sf}(P) &= \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_n} \left\{ T_{e-f+1}^{[f]} \frac{\partial W_{se}}{\partial n} - \frac{\partial T_{e-f+1}^{[f]}}{\partial n} W_{se} \right\} r_0 d\Gamma \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} T_{e-f+1}^{[f]} W_{pme+1} r_0 + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_L} T_{e-f+1}^{[f]} W_{Le+1} r_0 d\Gamma_L \\ &\quad + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_{e-f+1}^{[f]}}{\partial n} W_{Le+1} r_0 d\Gamma_D \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

次に、軸対称の場合の分布として与えられた熱発生量の総量は式(16)より次式で得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_{s1} d\Omega &= \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \phi^{[f]}(P, Q) \frac{\partial W_{sf}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi^{[f]}(P, Q)}{\partial n} W_{sf}(Q) \right\} r_0 dS(Q) \\ &\quad + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} \phi^{[f]} W_{Lf+1} r_0 dS_L + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi^{[f]}}{\partial n} W_{Df+1} r_0 dS_D + \sum_{m=1}^M (-1)^f \sum_{f=1}^M \phi^{[f]} W_{pmf+1} r_0 \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ただし、関数 $\phi^{[f]}$ は次式で与えられる。

$$\phi^{[f]} = \frac{4C_1^{2f}}{(2f+1)!!(2f)!!} \int_0^{\pi/2} [1 - m_0^2 \sin^2 \theta]^f d\theta \quad \dots\dots\dots (40)$$

具体的に示すと

$$\phi_1^{[1]} = \frac{\pi C_3}{3} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{\partial \phi_1^{[1]}}{\partial n} = \frac{2\pi[r_0 n_r - (z - z_0)n_z]}{3} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\phi_2^{[1]} = \frac{\pi[C_3^2 + 2r_0^2 r^2]}{60} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\frac{\partial \phi_2^{[1]}}{\partial n} = \frac{\pi[4r_0 C_8 n_r - 4(z - z_0)C_3 n_z]}{120} \quad \dots\dots\dots (44)$$

ただし

$$C_3 = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$C_8 = 3r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

式(19)より、軸対称体の体積は次式で表すことができる。

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int \frac{\partial \phi_1^{[1]}}{\partial n} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (47)$$

2・3 活用例 実際の計算において、熱発生量 W_1 は与えられているが、式(24)、(38)の W_2 から W_f は通常、与えられていない。そこで次に、 $W_f (F > 1)$ を求める方法を示す。わかりやすくするために $F=2$ とし、境界および等高線に対して一定要素を用いることにする。 W_f をベクトル $\mathbf{W}_f$ 、 $\partial W_f / \partial n$ を $\mathbf{V}_f$ と置き、式(38)を離散化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_{2L} \mathbf{W}_{L3} \\ &\quad \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{H}_1$ 、 $\mathbf{G}_1$ 、 $\mathbf{H}_2$ 、 $\mathbf{G}_2$ および $\mathbf{G}_{2L}$ は、次式の成分を

もつマトリックスである。

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1^{[1]}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1^{[1]}(P, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2^{[1]}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2^{[1]}(P, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$G_{L2ij} = \int_{\Gamma_{jL}} T_2^{[1]}(P, q_L) d\Gamma_{jL} \quad \dots\dots\dots (53)$$

$F=2$ の場合を考えているので、式(38)より次式が得られる。

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_{L1} \mathbf{W}_{L3} \quad \dots\dots\dots (54)$$

ただし、マトリックス $\mathbf{G}_{L1}$ の係数は次式で与えられる。

$$G_{L1ij} = \int_{\Gamma_{jL}} T_1^{[1]}(P, q_L) d\Gamma_{jL} \quad \dots\dots\dots (55)$$

また、式(38)において、熱発生量 $W(q_2)$ の等高線を活用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(p_L) &= -\mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{W}_2 \\ &\quad - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_{L3} \mathbf{W}_{L3} \quad \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{H}_3$ 、 $\mathbf{G}_3$ 、 $\mathbf{H}_4$ 、 $\mathbf{G}_4$ および $\mathbf{G}_{L3}$ は、次式の成分をもつマトリックスである。

$$H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1^{[1]}(p_L, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1^{[1]}(p_L, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2^{[1]}(p_L, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2^{[1]}(p_L, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$G_{L3ij} = \int_{\Gamma_{jL}} T_2^{(j)}(p_L, q_L) d\Gamma_{jL} \dots \dots \dots (61)$$

$W_2=0$ と置くと、式(48)、(54)、(56)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_2 & -G_{L2} \\ 0 & G_1 & G_{L1} \\ G_3 & -G_2 & -G_{L3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 W_1 \\ 0 \\ H_3 W_1 + W(p_L) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (62)$$

上式より V_1 、 V_2 および W_{L3} を求めることができる。なお、 $W_2=0$ と置いたが、 $V_2=0$ としてもよい。任意の F に対しても、同様に求めることが可能である。式(62)は等高線のみを活用する方法を示したが、同様に W_{P3} を用いて、点での値を指定することができる。また、等高線は通常、多く指定するので式(62)の行列式は大きくなる。そのような場合は、図1に示すように領域形セルで領域を分割する⁽¹⁾。

3. 解 析 例

本解法の精度を確かめるために、次式の熱発生分布

図2 内部熱発生を伴う円筒

図3 熱発生分布の近似

を伴う内半径 a 、外半径 b の円筒の温度分布を求めた。

$$W = \frac{W_0(b^2 - r^2)}{b^2 - a^2} \dots \dots \dots (63)$$

ただし、 r は中心からの距離とし、上下面への熱の移動はないものとする。円筒の内周の温度は 0°C とし、外周は断熱状態とし、内半径 $a=10$ mm、外半径 $b=60$ mm、 $W_0/\lambda=0.1^\circ\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$ で計算する。図2に境界および使用した熱発生分布の等高線の要素分割を示す。図3に内部熱発生分布の近似値と実際の分布との比較を示す。本計算例の温度分布 $T(r)$ は次式で与えられることが容易にわかる⁽⁷⁾。

$$T(r) = \frac{-W_0}{16\lambda(b^2 - a^2)} \times \left[4a^2(r^2 - b^2) - (r^4 - a^4) - 4b^4 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right] \dots \dots \dots (64)$$

図4に計算値と式(64)の厳密解との比較を示す。

次に、厳密解を得ることが困難な例として、図5に

図4 円筒の温度分布

図5 内部熱発生を伴う円筒
(与えられた熱発生分布の等高線)

(a) 等高線

(b) 分布

図 6 熱発生分布

示すように等高線分布をもつ熱発生分布を伴う円筒の温度分布を求めた。熱発生分布の等高線は地図の等高線のように任意の形状で、しかも密に等高線を与えてもよいが、本計算例では補間近似がどのようになされるかを示すために単純な等高線を与えている。図5中の円、三角、四角は熱発生量 $W/\lambda = 0.1^\circ\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$ および $0.2^\circ\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$ の等高線を示し、境界上での熱発生量は零とする。図6(a), (b)に計算により近似された熱発生量分布を示す。円筒の周囲の温度を 0°C とした場合の温度分布を図7に示す。本計算例では、わかりやすくするために、単純な等高線を与え、十分に滑らかに補間されることを示した。なお、式(39), (47)を用いることにより、熱発生量の総量および平均値を算出することが可能であり、本計算例での λ で割った総熱発生量は $2.964 \times 10^4^\circ\text{C}\cdot\text{mm}$ であり、平均値は $0.539^\circ\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$ である。

図 7 温度分布($^\circ\text{C}$)

4. 結 言

多重相反境界要素法を改良することにより、軸対称問題の熱発生分布を線積分で表現することができることを示した。従来の多重相反境界要素法では熱発生分布が関数で指定されている場合でしか使用することができなかった。また、従来の多重相反境界要素法では、熱発生分布を精度よく与えるには、境界上の高次の微分値を与える必要があったが、本手法では、内部の値を多く与える方法があるので、低次の基本解のみでも解析可能である。計算例では等高線を活用することにより、任意の熱発生分布が作用する場合でも、軸対称問題の多重調和関数を用いることにより線積分のみにより工学上十分な精度で軸対称定常熱伝導解析が可能になることが示された。

文 献

- (1) 落合・石田・関谷, 機論, 58-552, A(1992), 1390-1394.
- (2) Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (田中・松本・中村共訳), 詳解境界要素法, (1993), 157-168, オーム社.
- (3) Nowak, A. J. and Brebbia, C. A., The multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integral to the Boundary, *Eng. Anal. Boundary Elements*, 6(1989), 164-167.
- (4) 落合, 第71期全国大会機講論, Vol. A (1993), 35-37.
- (5) 関谷・落合・石田, 境界要素法による熱応力解析, (1992), 17-20, 森北出版.
- (6) Brebbia, C. A., *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, (1984), 47-98, Springer-Verlag, 境界要素解析—理論と応用, (1984), 46-100, 丸善.
- (7) 竹内, 熱応力, 再増補改訂版, (1989), 76-81, 日新出版.