圧縮性一様等方性乱流の直接数値計算による SGS 応力モデルの検証*

宮内 敏雄^{*1}, 店橋 護^{*1}, 三宅 邦彦^{*2}

Verification of SGS-Stress Models by Direct Numerical Simulation of Compressible Homogeneous Isotropic Turbulence

Toshio MIYAUCHI, Mamoru TANAHASHI and Kunihiro MIYAKE

Direct numerical simulation of three-dimensional compressible homogeneous isotropic turbulence was conducted by a spectral method to verify SGS stress models of large eddy simulation. A linear combination model and dynamic SGS model were compared with the exact SGS stress evaluated from the DNS data. From this study, the following conclusions are obtained. (1) Correlation coefficients between the exact cross-term and the modeled ones predicted by the linear combination model and the model following the original scale-similarity hypothesis show values as high as 90%. (2) The SGS-Reynolds stress predicted by the assumption of scale similarity shows the highest correlation, whereas the correlation between the exact one and the linear combination model is low. (3) The dynamic SGS model and the exact stress show low correlation which depends on the kind of filter and the averaging volume.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Turbulent Flow, Compressible Flow, Direct Numerical Simulation, Large Eddy Simulation, SGS Model, Spectral Method

1. 緒 論

近年の計算機の急速な発達により、数値解析を用いた乱流研究が従来からの理論的および実験的研究と並ぶ重要な地位を占めるようになってきた。しかし、航空・宇宙工学等の分野において重要となる乱流状態の圧縮性流れについては、十分な研究が行われていない。これは圧縮性乱流の場合、非圧縮性乱流に比べて、扱わなければならない物理量の数が多く、また、乱流は本質的に3次元で、非常に広いスケールにわたる現象であるため、計算格子によって直接これを解像する事が非常に困難なためである。そこで、流れ場の諸量をフィルタ操作により計算格子によって解像できるスケール(grid-scale:GS)と格子解像度以下のスケール(subgrid-scale:SGS)の成分に分離し、格子解像度以下のスケールの量を格子スケールの量を用いてモデル化し計算を行うラージ・エディ・シミュレーション(Large Eddy Simulation:LES)が近年注目を集めている。

圧縮性乱流のLESのためのSGSモデルについてはYoshizawa⁽¹⁾によって渦粘性型のモデルが提案され、またscale similarity型のモデル⁽²⁾と渦粘性型のモデルを組み合わせたLinear combinationモデルがErlebacherら

(3)(4)によって提案されている。さらにMoinら⁽⁵⁾によって圧縮性乱流に対するDynamic SGSモデルが提案されている。しかし、圧縮性乱流のSGSモデルとして最適なものは見いだされていないのが現状である。

そこで、本研究ではスペクトル法による圧縮性一様等方性乱流の直接数値計算を行い、その計算結果にフィルタ操作を施してSGS応力を直接求め、Linear combinationモデルおよびDynamic SGSモデルとの比較を行い、圧縮性乱流のLESのためのSGS応力モデルの検証を行う。

2. 記 号

ρ	: 無次元密度
u_i	: 無次元速度
p	: 無次元圧力
T	: 無次元温度
γ	: 比熱比(c_p/c_v)
Re	: レイノルズ数
Pr	: プラントル数
M_0	: マッハ数
E	: 運動エネルギー
$u_{r.m.s.}$	: x 方向速度変動のr.m.s.値
ε	: 散逸
η	: コルモゴロフスケール
λ	: テイラーマイクロスケール

* 原稿受付 平成6年4月4日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 学生員, 東京工業大学大学院。

- Re_λ : テイラーマイクロスケールに基づく Re 数
 $\bar{f}$: 変数 f の GS 成分
 $\tilde{f}$: 変数 f の GS 成分 (Favre 平均)
 f' : 変数 f の SGS 成分
 g : フィルタ関数
 τ_{ij} : SGS 応力項
 L_{ij} : レナード項
 C_{ij} : クロス項
 R_{ij} : SGS レイノルズ項
 Q_i : SGS 熱流束
 C_B : Bardina 型のレイノルズ項のモデル定数
 C_R : 渦粘性型のレイノルズ項のモデル定数
 C : Dynamic SGS モデルの係数
 $\langle \rangle$: 空間平均

3. 基礎方程式および SGS モデル

3.1 基礎方程式 外力, ソレ効果, 体積粘性, 輻射熱流束を無視し, 流体は理想気体の状態方程式に従うと仮定すると, 質量保存式, 運動量保存式, エネルギー保存式, 状態方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \gamma p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ = \frac{1}{Pr M_0^2 Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + (\gamma - 1) \Phi \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_0^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで, 各方程式は計算領域の一辺の長さ L_0 の $1/2\pi$, 初期速度変動の二乗平均 U_0 , 初期平均密度 ρ_0 , 初期平均温度 T_0 で無次元化されており, エネルギー方程式 (式 (3)) は圧力に関する方程式として表されている。また, 粘性応力 σ_{ij} , 粘性散逸 Φ は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \frac{1}{Re} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

これらの基礎方程式に対して以下のような Favre 平均に基づくフィルタ操作,

$$f = \bar{f} + f' \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\bar{f} = \frac{\rho \bar{f}}{\bar{\rho}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x') f(x') dx' \quad \dots\dots\dots (9)$$

を施すことにより次のような方程式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \gamma \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \\ = \frac{1}{Pr M_0^2 Re} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i \partial x_i} + (\gamma - 1) \bar{\Phi} - \frac{1}{M_0^2} \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} \bar{T}}{\gamma M_0^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで, SGS 応力テンソル τ_{ij} , SGS 熱流束 Q_i は次式で与えられる。

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} \underbrace{(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{L_{ij}} + \underbrace{\tilde{u}_i' \tilde{u}_j' + \tilde{u}_i \tilde{u}_j'}_{C_{ij}} + \underbrace{\tilde{u}_i' \tilde{u}_j'}_{R_{ij}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$Q_i = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{T} - \tilde{u}_i \tilde{T} + \tilde{u}_i' \tilde{T}' + \tilde{u}_i' \tilde{T}') \quad \dots\dots\dots (15)$$

また, 式 (14) の各項は以下のように,

$$\begin{cases} L_{ij} = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) & ; \text{レナード項} \\ C_{ij} = \bar{\rho} (\tilde{u}_i' \tilde{u}_j' + \tilde{u}_i \tilde{u}_j') & ; \text{クロス項} \\ R_{ij} = \bar{\rho} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' & ; \text{SGS レイノルズ項} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と呼ばれる。以後, 本研究では SGS 応力 τ_{ij} についての考える。

3.2 SGS 応力モデル 式 (14) のレナード項 (L_{ij}) はフィルタ関数が指定されれば計算できるためモデル化の必要はないが, クロス項 (C_{ij}) および SGS レイノルズ項 (R_{ij}) はモデル化する必要がある。Erlebacher ら (3)(4) は, SGS レイノルズ項に関しては渦粘性型のモデルを, クロス項に Bardina 型のモデルを用いることにより, 次のような Linear combination モデルを提案している。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\rho} \tilde{u}_m' \tilde{u}_m' \delta_{ij} \\ = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \underbrace{\bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{C_{ij}} \\ - \underbrace{2 C_R \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{ij})}_{R_{ij}} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで,

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。しかし、上記のモデルのクロス項は、本来の scale similarity 仮説⁽²⁾によるクロス項とは異なっている。即ち、本来の scale similarity 仮説においてはクロス項は次のように表され、

$$\widetilde{u'_i u'_j} \simeq \tilde{u}'_i \tilde{u}'_j = (\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i) \tilde{\tilde{u}}_j \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\widetilde{u'_i u'_j} \simeq \tilde{\tilde{u}}'_i \tilde{\tilde{u}}'_j = \tilde{\tilde{u}}_i (\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j) \quad \dots\dots\dots (20)$$

また、SGS レイノルズ項は次のように表される。

$$\widetilde{u'_i u'_j} \simeq \tilde{u}'_i \tilde{u}'_j = (\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i) (\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j) \quad \dots\dots\dots (21)$$

これらの表記を直接用いるならば、式 (17) の Linear combination モデルのクロス項は、式 (19)、(20) および式 (21) の和として与えられていることになり、SGS レイノルズ項を含んでモデル化されていることになる。またガリレイ不変性⁽⁶⁾を考慮すると式 (19)、(20) のクロス項については係数は 1 でなければならないが、式 (21) の SGS レイノルズ項に関してはガリレイ不変性の観点からは係数を決定することはできない。

そこで、本研究ではこれらの項を分離して、本来の scale similarity 仮説による純 Bardina 型の次のようなモデル (以下 model 1)、

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \bar{\rho}(\widetilde{u'_i u'_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \underbrace{\bar{\rho}\{(\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i)\tilde{\tilde{u}}_j + \tilde{\tilde{u}}_i(\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j)\}}_{C_{ij}} \\ & + \underbrace{C_B \bar{\rho}(\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i)(\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j)}_{R_{ij}} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

および、Linear combination モデルのクロス項に含まれる Bardina 型の SGS レイノルズ項に相当する部分を次のように SGS レイノルズ項として変形した改良型 Linear combination モデル (以下 model 2) について、Linear combination モデルと比較し検証を行う。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\rho} \widetilde{u'_m u'_m} \delta_{ij} = & \bar{\rho}(\widetilde{u'_i u'_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \\ & + \underbrace{\bar{\rho}\{(\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i)\tilde{\tilde{u}}_j + \tilde{\tilde{u}}_i(\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j)\}}_{C_{ij}} + \\ & \underbrace{C_B \bar{\rho}(\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{u}}_i)(\tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j) - 2C_R \Delta^2 |\tilde{S}|(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{ij})}_{R_{ij}} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

一方、これらとは別に Moin ら⁽⁵⁾は圧縮性乱流に対する Dynamic SGS モデルを提案した。この Dynamic SGS モデルは、定数係数の渦粘性型モデルである Smagorinsky モデルの係数を、時間・空間ごとに変化させるよ

うにしたモデルであり、前もって係数を半経験的に決めておく必要がなく、また、乱流エネルギーの高波数成分から低波数成分への back-scatter を表現することが可能であるなどの特徴を持っている。具体的には、SGS 応力全体に対する渦粘性型のモデルとして次式を与え、

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{mm} \delta_{ij} = -2C \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{ij}) \quad \dots\dots (24)$$

また、係数 C については次式のように与え、計算中変化させている。

$$\begin{aligned} C = & \frac{\langle [\bar{\rho} \widetilde{u'_i u'_j} - (1/\bar{\rho}) (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)] \tilde{S}_{ij} \rangle}{\langle -2\bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} - (1/3) \tilde{S}_{mm} \tilde{S}_{kk}) \rangle} \\ & - \frac{(1/3) \tilde{S}_{mm} (\bar{\rho} \widetilde{u'_k u'_k} - (1/\bar{\rho}) (\bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_k))}{+2\Delta^2 (\bar{\rho} |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} - (1/3) \bar{\rho} |\tilde{S}| \tilde{S}_{mm} \tilde{S}_{kk})} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

この式 (25) は空間平均の形で示されているが、その平均操作は一般的にチャンネル乱流では壁面に平行な平面ごとに行い、一様等方性乱流では計算領域全体で行う。しかし、複雑な幾何形状を持つ流れ場の解析を行う場合には、より局所的な空間で平均操作を行う必要がある。そこで、本研究では平均操作を行う空間として計算領域全体と積分長に相当する長さを一辺に持つ立方体の 2 つを考え比較を行う。また、フィルタとして波数空間において指数関数的に各波数成分を減衰させる Gaussian フィルタと、cut-off 波数以上の高波数成分を 0 とする Cut-off フィルタの 2 つを用い、フィルタの種類による相違についても検討を行う。

4. 圧縮性一様等方性乱流の直接数値計算

始めに、スペクトル法を用いた 3 次元圧縮性一様等方性乱流の直接数値計算の計算結果から示す。直接数値計算を行うにあたり、非線形項の計算には擬スペクトル法を用い、aliasing 誤差は 3/2 則を用いて完全に除去した。境界条件は 3 方向とも周期境界条件とし、時間前進には 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。また、初期条件は速度場に関しては Comte-Bellot & Corssin⁽⁷⁾ の格子風洞乱流の実験結果にスペクトル形を一致させたランダム場を発生させた。密度、圧力の初期条件としては、密度の変動成分、圧力の変動成分ともに 0 とした。また、格子点数は $128 \times 128 \times 128$ 、 $Re = 230.2$ 、 $M_0 = 0.2, 0.4$ 、 $Pr = 0.7$ 、 $\gamma = 1.4$ の条件で計算を行った。

初期条件として参照した実験データと初期条件として用いたデータの比較を表 1 に、 $t = 0.5206$ の時の実

験結果と計算結果の比較を表2に示す。初期条件は十分に実験値に近いことが表1から分かる。また、計算結果についても実験結果と良好に一致していることが表2から分かる。次に、 $t = 0.5206$ におけるエネルギースペクトルを図1に示す。ここで、実線は全運動エネルギーを、一点鎖線と破線はヘルムホルツ分解により得られた非圧縮性成分 ($\text{div } \mathbf{u} = 0$) と圧縮性成分 ($\text{rot } \mathbf{u} = 0$) を示している。これらの図から分かるように圧縮性成

表1 初期条件

	CB & C	Initial condition
E	1.50	1.50
$u_{r.m.s.}$	1.00	1.00
ε	2.25	2.18
η	0.0145	0.0139
λ	0.177	0.173
Re_λ	38.1	39.8

表2 計算結果 ($t = 0.5206$)

	CB & C	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
E	0.833	0.838	0.823
$u_{r.m.s.}$	0.745	0.749	0.740
ε	0.753	0.789	0.741
η	0.0191	0.0180	0.0182
λ	0.228	0.216	0.213
Re_λ	36.6	37.1	36.3

分は小さく、 $M_0 = 0.2$ の場合には全運動エネルギーの0.54%、 $M_0 = 0.4$ の場合は2.3%である。次に、 x 方向の速度変動のr.m.s. 値の時間変化を図2に示す。速度変動のr.m.s. 値は時間とともに減衰していくが、マッハ数が大きいほうが減衰が速いことが分かる。また、実験値とよく一致していることも分かる。次に、図3、図4に密度変動、圧力変動のr.m.s. 値の時間変化を示す。初期のr.m.s. 値0からピークに達した後減衰し、マッハ数が大きいほうが大きな値を示すことが分かる。

5. SGS 応力モデルの検証

次に、これらのDNSの計算結果にフィルタ操作を施し、 $32 \times 32 \times 32$ の格子点数に相当するLESデータを

図2 x 方向速度変動のr.m.s. 値 (a) $M_0 = 0.2$ (b) $M_0 = 0.4$ 図1 エネルギースペクトル ($t = 0.5206$)

図3 密度変動のr.m.s. 値

図4 圧力変動のr.m.s. 値

求め SGS 応力モデルの検証を行う。

5.1 クロス項について LES においては統計量、平均量のみでなく流れ場の構造も正確に捕らえられていることが重要である。そのためには式 (11) に示されるように LES 特有の外力として流れ場に作用する SGS 応力も平均的な性質だけでなく局所的な構造までも正確にモデル化されていることが望ましい。そこで、直接数値計算の結果に Gaussian フィルタを施して得たクロス項について、 $t = 0.5206$ の時の DNS データと各モデルとの相関を表 3 に示す。ここで、相関は次式によって定義され、DNS データとモデルによる応力の空間的構造が一致した場合に 1 となる。

$$C(f, g) = \frac{\langle fg \rangle}{\langle f^2 \rangle^{1/2} \langle g^2 \rangle^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

表 3 から Linear combination モデル、純 Bardina 型の model 1, Linear combination モデルの改良型の model 2 とともに約 90% の高い相関を示し、scale similarity 仮説

表 3 クロス項の相関

	Linear combination		model 1, model 2	
	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
(1,1)	0.912	0.913	0.897	0.898
(1,2)	0.921	0.922	0.914	0.916

表 4 クロス項の r.m.s. 値の比 ($C_{rms}^e / C_{rms}^{(models)}$)

	Linear combination		model 1, model 2	
	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
(1,1)	1.280	1.277	1.431	1.429
(1,2)	1.056	1.055	1.162	1.161

図 5 クロス項の等値線図 ($M_0 = 0.4$)

が妥当であることが分かる。またクロス項に SGS レイノルズ項を含めた Linear combination モデルの場合にも相関は低下していないことが分かる。さらに、マッハ数が異なっても相関値には大きな変化はみられない。図 5 は $x = \pi$ の断面におけるクロス項の (1,2) 成分の等値線を示しているが、これからも相関が高いことが分かる。また、表 4 にモデル値に対する DNS データの二乗平均値の比を示す。(1,1) 成分についてはやや DNS データのほうが大きい値を示しているが、ほぼ 1 に近い値を示しており Bardina 型のモデルが妥当であるといえる。

5.2 SGS レイノルズ項について 次に、Gaussian フィルタを用いて得た SGS レイノルズ項の DNS データとモデル値との相関を表 5, 6 に示す。ここで、model 2 の scale similarity 型の部分の係数 C_B と渦粘性型の部分の係数 C_R は等しいとした。scale similarity 型のみの model 1 は三つのモデルの中で最も高い相関を

表 5 SGS レイノルズ項の相関 ($M_0 = 0.2$)

	Linear combination	model 1	model 2
(1,1)	0.220	0.714	0.224
(1,2)	0.247	0.579	0.252

表 6 SGS レイノルズ項の相関 ($M_0 = 0.4$)

	Linear combination	model 1	model 2
(1,1)	0.211	0.710	0.216
(1,2)	0.238	0.582	0.243

図 6 SGS レイノルズ項の等値線図 ($M_0 = 0.4$)

示し, SGS レイノルズ項の良いモデルとなっていることが分かる. また, 渦粘性型の Linear combination モデルは (1,1), (1,2) 成分ともに 20% 程度の低い相関を示している. 二つのモデルの混合型である model 2 については scale similarity 部分の寄与により僅かに相関が向上しているが, 本質的に改善されるには至っていない. これは非圧縮性乱流に対する SGS モデルに関して既に報告されているように, scale similarity 型の部分と渦粘性型の部分の大きさが大きく異なり渦粘性型の部分が支配的となるためである. そのため, それぞれの部分に対する係数 C_B と C_R は独立に与える必要がある. 次に, $x = \pi$ における SGS レイノルズ項の (1,2) 成分の等値線図を図 6 に示す. model 1 については相関に関しては比較的高い値を示しているが, 局所的な構造に関しては DNS データに比べ全体的にやや小さなスケールを有していることが分かる. これに対して,

表 7 Dynamic SGS モデルの相関 (Gaussian filter)

	All domain		Integral scale	
	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
(1,1)	0.297	0.283	0.280	0.274
(1,2)	0.328	0.323	0.312	0.303

表 8 Dynamic SGS モデルの相関 (Cut-off filter)

	All domain		Integral scale	
	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
(1,1)	0.0867	0.0885	0.0825	0.0835
(1,2)	0.112	0.106	0.104	0.0991

図 7 Dynamic モデルの等値線 (Gaussian, $M_0 = 0.4$)

Linear combination モデルと model 2 は相関値からも明らかなように空間的な構造はほとんど再現されていない.

5.3 Dynamic SGS モデルについて 次に, DNS データと Dynamic SGS モデルの相関を表 7 と表 8 に示す. ここで test filter は元のフィルタ幅の 2 倍とした. 相関値は Gaussian フィルタを用いた場合には約 30%, Cut-off フィルタを用いた場合は 10% 程度と低い値を示しており, Dynamic SGS モデルは相関の点では良いモデルとは言えない. また全計算領域で平均を行ったものより積分長に相当する長さを一辺に持つ立方体で平均を行ったもののほうが相関が低くなっており, 複雑な幾何形状の流れ場を解析する際には, 平均操作を行う空間の選択に十分な注意が必要であることが分かる. さらに, 全計算領域で平均操作を行った場合のモデル係数を表 9 に示す. これらの値は平方根をとることによって通常の Smagorinsky モデルの定数と等価となるが, この場合それらの値は 0.15 ~ 0.17 程度となり, 一様等方性乱流に対して一般的に用いられる定数 0.2 よりもやや小さいが妥当な値となっている.

次に, 図 7, 図 8 に $x = \pi$ における (1,2) 成分の等値線

表 9 Dynamic SGS モデルの係数 (全領域)

	$M_0 = 0.2$	$M_0 = 0.4$
Gaussian filter	0.0299471	0.0277532
Cut-off filter	0.0258260	0.0239682

図 8 Dynamic モデルの等値線 (Cut-off, $M_0 = 0.4$)

図を示す。相関値から明らかなように、空間的な構造はほとんど再現されていない。また、図8のCut-offフィルタを用いた場合のDNSデータは他に比べ小さいスケールの構造を有してる。これは、Gaussianフィルタの場合にはSGS成分にも比較的大きなスケールの成分が含まれているのに対して、Cut-off波数でGS成分とSGS成分をシャープに分離するCut-offフィルタの場合には大きなスケールの成分が全く含まれていないためである。従って、GS成分を用いてSGS成分をモデル化する場合にGaussianフィルタのほうがCut-offフィルタよりも高い相関値を示すことになる。

6. 結 論

スペクトル法を用いて圧縮性一様等方性乱流の直接数値計算を行い、その結果に基づき圧縮性乱流のLESのためのSGS応力モデルの検証を行い、以下の結論を得た。

1. クロス項に関してはLinear combinationモデルおよび純Bardina型のmodel 1, Linear combinationモデルの改良型のmodel 2ともに約90%の高い相関を示す。
2. SGSレイノルズ項に関しては純Bardina型のmodel 1が最も高い相関を示し、Linear combinationモデルおよび、二つのモデルの混合型であるmodel 2の相関は低い。

3. model 2のSGSレイノルズ項の相関を高めるためには渦粘性部分の係数とscale similarity型の部分の係数を独立に与える必要がある。
4. Dynamic SGSモデルの相関は低く、相関はフィルタの種類および係数を求める際の平均を行う空間に依存する。

本研究は文部省科学研究費重点領域研究(1)「LESのSGSモデルに関する研究」(05240108)の援助を受けて行われたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- (1) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **29**-7, (1986), 2152.
- (2) Bardina, J., ほか2名, *Stanford Univ. Rep. TF-19*, (1983).
- (3) Erlebacher, G., ほか3名, *NASA CR-178273*, (1987).
- (4) Speziale, C. G., ほか3名, *Phys. Fluids*, **31**-4, (1988), 940.
- (5) Moin, P., ほか3名, *Phys. Fluids A*, **3**-11, (1991), 2746.
- (6) Speziale, C. G., *J. Fluid Mech.*, **156**, (1985), 55.
- (7) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, **48**, (1971), 273.