剛体着水現象の数値解析のためのマーカー粒子法を併用した有限要素法*

中山 司^{*1}, 森 峰 男^{*2}Finite Element Method Combined with Marker-Particle Method for
the Solution of the Water-Entry Problem of a Rigid Body

Tsukasa NAKAYAMA and Mineo MORI

The present paper deals with a finite element method for the solution of a two-dimensional time-dependent free surface flow problem and its application to the analysis of the low-velocity impact of a rigid body into still water. For the ease of numerical treatment of the free surface expressed by a multiple-valued function, a marker-particle method is employed. Numerous virtual particles are spread over regions occupied by water. Each particle is moved according to the water velocity on a fixed finite element mesh. The velocity field within water regions is calculated by solving the Navier-Stokes equations and the equation of continuity by the finite element method based on quadrilateral elements. The methodological problems arising in the implementation of the marker-particle method on an unstructured mesh of finite elements and the solutions to those problems are discussed. Numerical results are compared with available experimental data and good agreement is obtained.

Key Words: Free Surface Flow, Water-Entry Problem, Finite Element Method, Marker-Particle Method

1. は じ め に

本論文では、船舶のスラミング(slamming)や飛行艇の海洋着水のように、速度をもった物体と水面が衝突する現象の解析を扱う。このような現象に対しては、古くは Kármán⁽¹⁾ や Wagner⁽²⁾ の理論的研究があるが、いずれも水面変位を微小とした線形理論に基づいているため、水面の大変形応答の解析には限界がある。例えば、飛行艇の底部の形状設計においては着水時の水面からの飛まつ軌跡を把握することが重要であるが⁽³⁾、線形理論では予測し得ない。水面の動きを考慮しつつ、水の流れや物体の運動を予測するためには、コンピュータの利用を前提とした数値解析が有効であろう。

一般に、流体運動を数値的に解析する場合、支配方程式を解く計算領域は、例えば有限要素に分割される。そこで、上述のような移動境界を有する問題においては、有限要素網で覆われる計算領域と実際に液体が占める領域の相対関係によって、数値解法が大きく2種類に分けられる。

液体領域と計算領域をつねに一致させ、液体の動きに合わせて有限要素網を変形させる方法はラグランジュ法と呼ばれる。この方法は、流れの方程式に非線形の移流項が現れないため方程式が解きやすい反面、要素の変形が著しいと計算が破たんしてしまうことがある。そこで、リゾーニング(rezoning)と呼ばれる液体領域の要素網への再分割を定期的に行わねばならず、アルゴリズムやコンピュータプログラムが複雑になる欠点がある。ラグランジュ法による解析では、任意形状の液体領域を高速で要素分割するためのアルゴリズムが不可欠である。射出成形過程における溶融樹脂の流れのような特定の現象の解析を目的とした自動要素分割法の考案の報告は見られるが⁽⁴⁾⁽⁵⁾、実用性のある有効なアルゴリズムはいまだ考案されていないようである。これがラグランジュ法の実用化におけるボトルネックとなっているように思われる。さらにラグランジュ法には、再分割によってできた新しい節点に流速や圧力の値を補間する際、不必要な人工拡散の効果が入ってしまい、計算精度が低下する恐れもある。

一方、空間に固定された要素網上で液体を移動させる方法はオイラー法と呼ばれる。この場合、計算領域と液体領域は必ずしも一致しないため、液体領域を識別するための手段が必要となる。この識別法の代表的

* 原稿受付 平成6年5月16日。

^{*1} 正員, 中央大学理工学部 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)。^{*2} 学生員, 中央大学大学院 [現: 旭硝子(株)]。

なものとして、VOF 法(volume-of-fluid method)⁽⁶⁾とマーカー粒子法(marker-particle method)がある。前者は、要素に含まれる液体の体積比率を表す関数 F の値を要素ごとに計算し、その値によって液体領域を識別する方法である。 $F=1$ ならばその要素は液体で満たされており、 $F=0$ のときその要素は空であると判定される。そして $0 < F < 1$ のとき要素内を自由表面が通過すると考える。この方法に関しては、射出成形加工時の溶融樹脂や鋳造時の溶融金属の流れのシミュレーションを目的として、有限要素法との結合法に関する研究が進められている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。しかし、自由表面付近の要素での計算が煩雑である、三次元の流動現象への応用が難しい、などの欠点がある。

一方、後者の方法は、液体領域に多数の仮想粒子(マーカー)を分布させ、これらの粒子の時々刻々の動きを追跡することにより、液体の動的挙動を把握しようとするものである。計算のアルゴリズムが単純であるという特徴がある。この方法には、マーカー分布をプロットなどで図化してみなければ自由表面の位置や形状を把握できないという欠点があるが、(1)アルゴリズムが単純である、(2)三次元問題への拡張が容易である、(3)砕波現象のような複雑な液体運動に対しても容易に応用できる、などの捨て難い利点をもっている。この方法を応用した計算手法としては MAC 法(marker-and-cell method)⁽⁹⁾ がよく知られている。しかし、MAC 法は直交格子網を計算の基礎としており、工学上見られる複雑な境界形状を有する問題では計算精度の低下が懸念される。MAC 法を拡張して曲線境界の問題にも応用できるようにする研究は Vieceilli⁽¹⁰⁾ によってなされたが、境界付近の格子における計算が煩雑である、自由表面における応力境界条件に粘性項が考慮されていない、などの改良を要する点が残されていた。近年、差分法において境界適合座標系を用いる手法が広まりつつあるが、使いこなすには相当の熟練が要求され、現段階では実用的手法とは言い難い。

本研究は、マーカー粒子法を有限要素法と組合せることにより、新しいシミュレーション手法を構築することを目的としている。本論文では、その手法を構築する際の技術的な問題点を明らかにし、それらの解決策を述べたのち、二次元剛体の着水現象の計算に応用した結果について報告する。

2. 問題の定式化

図 1 に示すような二次元剛体が速度をもって静止水面に衝突する現象を考える。この問題において座標系の選択は重要である。もし、空間固定の静止座標系を

採用すれば、計算領域上で物体を移動させながら計算を進めることになる、計算領域の要素分割を毎時間ステップ行わなければならない。しかし、これではオイラー法を採用した意味がない。そこで本解析では、物体に固定した動座標系を用いることにする。図 1 のように、物体底面の中心を原点とし、鉛直上向きに y 軸をとり、水平右向きに x 軸をとる。

水を非圧縮性粘性流体とし、その運動は二次元的であるとすれば、流れの支配方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - (a_B + g) \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 Ω は水の占める領域を表し、 t は時間、 u, v はそれぞれ座標系に対する水の相対速度の x 成分と y 成分、 ρ は密度を表す。 g は重力加速度である。物体は鉛直方向にのみ運動するものとし、その運動の加速度を $a_B(t)$ とする。応力の構成方程式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与える。ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数である。

さて、物体は左右対称な形状をもち、その対称軸をつねに鉛直軸に一致させて運動するものとする。この仮定により、水の流れも物体の対称軸をはさんで左右対称となるから、以後計算は x - y 平面の右半面について行う。このとき、液体領域 Ω を囲む境界は図 1 に示す四つである。すなわち、自由表面 Γ_1 、物体表面と対称軸 Γ_2 、物体下方に設けた仮想水平境界 Γ_3 と物体

図 1 剛体の着水現象のための二次元計算モデル

の右遠方に設けた仮想鉛直境界 Γ_4 である。

自由表面上では応力の釣り合い条件

$$\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad \cdots \cdots (5)$$

を課す。ここに、 n_x, n_y はそれぞれ境界に立てた外向き単位法線ベクトルの x, y 成分を表す。式(5)の導出にあたって、大気圧は零と仮定し、水の表面張力は無視している。境界 Γ_2 と Γ_4 上では、滑り条件

$$\left. \begin{aligned} u n_x + v n_y &= 0 \\ (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y) t_x + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) t_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Gamma_2, \Gamma_4 \text{ 上} \quad \cdots \cdots (6)$$

を与える。ここに、 t_x, t_y はそれぞれ境界に対する単位接線ベクトルの x, y 成分を表す。境界 Γ_3 上では条件

$$u = 0, v = -v_B(t) \quad \Gamma_3 \text{ 上} \quad \cdots \cdots (7)$$

を指定する。ここに $v_B(t)$ は物体の運動速度である。この条件は、静止座標系から見たとき、境界 Γ_3 が物体と同じ速さで下方へ移動することを意味する。

初期条件は、次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= 0, v(x, y, 0) = -v_B(0) \\ p(x, y, 0) &: \text{静水圧} \end{aligned} \right\} \quad \Omega \text{ 内} \quad \cdots \cdots (8)$$

物体の運動方程式は

$$M_B a_B = F_p - M_B g \quad \cdots \cdots (9)$$

で与える。ここに、 M_B は物体の質量、 F_p は水から受ける圧力抵抗である。物体表面で滑り条件を仮定しているので摩擦抵抗は考慮しない。

3. 流れの基礎方程式の離散化

3・1 有限要素法 流れの基礎方程式の空間方向の離散化は、四角形要素を用いる有限要素法により行う。速度成分 u, v の値を4頂点で定義し、要素内では局所座標の双一次式で近似する。圧力 p は要素内で一定と近似する。通常のカラキン法を用いて式(1)～(3)の弱形式を導き、それらを離散化すると、運動方程式は

$$\bar{M} \dot{U} + [A(U) + D]U - HP + F = O \quad \cdots \cdots (10)$$

となり、連続の方程式は要素ごとに、

$$h_e^T u_e = 0 \quad (e=1, 2, \dots, NE) \quad \cdots \cdots (11)$$

となる。ここに、 U は節点流速から成る速度ベクトル、 P は圧力ベクトル、 F は加速度項 ($a_B + g$) に対応するベクトル、 O は零ベクトルである。 $\bar{M}$ は集中化された質量行列を表し、 $A(U)U, DU, HP$ はそれぞれ移流項、粘性項、圧力こう配項に対応する。上付きドット ($\dot{}$) は時間 t に関する偏微分を意味する。式(11)において、 u_e は第 e 要素の4節点での流速成分から成る要素速度ベクトルであり、 h_e^T は発散オペレータ $\partial/\partial x + \partial/\partial y$ に対応するベクトルである。 NE は要素総数で

ある。

式(10)、(11)の行列やベクトルを導く際の積分計算は数値積分によって処理されるのが一般的であるが、ここでは文献(11)を参考にして解析的に処理する。これにより、係数行列の組立に関する演算が高速化され、また数値積分に伴う誤差を排除することができる。

自由表面上での境界条件(5)は、式(1)、(2)の右辺第1項を部分積分することにより、自然境界条件として式(10)で考慮されている。境界 Γ_2, Γ_3 上での滑り条件(6)の導入方法については文献(12)を参照されたい。

3・2 流速圧力同時緩和法 時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し、時刻 $t^n \equiv n\Delta t$ と時刻 $t^{n+1} \equiv (n+1)\Delta t$ には含まれた代表的な区間を考える。そこで、式(10)、(11)を時間に関して次のように離散化する。

$$\begin{aligned} \bar{M} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + [A(U^n) + D]U^n \\ - HP^{n+1} + F^n = O \quad \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

$$h_e^T u_e^{n+1} = 0 \quad (e=1, 2, \dots, NE) \quad \cdots \cdots (13)$$

ここに、上付き添字 $n, n+1$ はそれぞれ時刻 t^n, t^{n+1} における値を意味する。

時間区間 $[t^n, t^{n+1}]$ における速度場、圧力場の更新のための計算は2段階に分けて行われる。まず第1段階では、式(12)の P^{n+1} を P^n で置き換えた式

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{n+1} = U^n - \Delta t \bar{M}^{-1} \{ [A(U^n) + D]U^n \\ - HP^n + F^n \} \quad \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

によって、速度 $\tilde{U}^{n+1}$ を求める。この速度は必ずしも非圧縮条件(13)を満足していないので、上付きチルダ ($\tilde{}$) を付けて U^{n+1} と区別することにする。続く第2段階で、非圧縮条件(13)が満たされるように $\tilde{U}^{n+1}$ に補正が加えられる。この補正の手続きは要素ごとに行われ、その過程で圧力 P^{n+1} も同時に計算される。ある要素で $\tilde{U}^{n+1}$ に補正が加えられると、その結果はその要素と節点を共有する周囲の要素の速度場に影響を及ぼす。したがって、この補正は反復的に行われる⁽¹⁰⁾。

k を反復回数を表す指標として、 k 回の反復計算後の結果を $U^{n+1, (k)}, P^{n+1, (k)}$ のように表すことにする。そして反復計算の初期値を

$$U^{n+1, (0)} = \tilde{U}^{n+1}, P^{n+1, (0)} = P^n \quad \cdots \cdots (15)$$

とおく。いま、第 e 要素 Ω_e に注目するものとし、まずこの要素内での速度の発散 $D_e^{(k)}$ を

$$D_e^{(k)} = \frac{1}{A_e} h_e^T u_e^{n+1, (k)} \quad \cdots \cdots (16)$$

で計算する。ここに A_e は要素面積である。要素の大小による影響を除くために、 $D_e^{(k)}$ を単位面積あたりの大きさとして定義している。次に、この要素の圧力

$p_e^{n+1,(k)}$ に対する修正量 $\Delta p_e^{(k)}$ を

$$\Delta p_e^{(k)} = -\lambda_e D_e^{(k)} \quad (17)$$

で計算する。ここに λ_e は次式で与えられる正の係数で、その大きさは要素ごとに異なる。

$$\lambda_e = \frac{A_e}{\Delta t h_e^T \bar{m}_e^{-1} h_e} \quad (18)$$

式(18)の導出は後述する。式(18)中の行列 $\bar{m}_e^{-1}$ は、対角行列 $\bar{M}^{-1}$ の成分のうち、要素 Ω_e の4節点における8個の速度成分に対応する成分から成る 8×8 の小対角行列である。修正量 $\Delta p_e^{(k)}$ によって要素圧力 $p_e^{n+1,(k)}$ は

$$p_e^{n+1,(k+1)} = p_e^{n+1,(k)} + \Delta p_e^{(k)} \quad (19)$$

のように更新される。さらに、この圧力修正量はナビエ・ストークス方程式を通じて要素速度ベクトル $u_e^{n+1,(k)}$ にも影響を及ぼす。すなわち、これらの速度ベクトルは次のように補正される。

$$u_e^{n+1,(k+1)} = u_e^{n+1,(k)} + \Delta t \bar{m}_e^{-1} h_e \Delta p_e^{(k)} \quad (20)$$

式(16)から式(20)までの一連の計算をすべての要素について行ったのち、

$$\max_{1 \leq e \leq NE} |D_e^{(k)}| < \epsilon \quad (21)$$

により収束判定を行う。ここに ϵ は与えられた微小量とする。計算が収束したときは

$$U^{n+1} = U^{n+1,(k+1)}, P^{n+1} = P^{n+1,(k+1)} \quad (22)$$

とし、収束していなければ、反復計算を続ける。時間区間 $[t^n, t^{n+1}]$ における以上の手順をフローチャートにまとめたものを図2に示す。

図2 流速圧力同時緩和法の計算手順

以上述べた解法では、流速修正と圧力計算を要素ごとに行っているため連立一次代数方程式を組み立てる必要がない。したがって、その係数行列のような大規模な行列を扱う必要がなく、使用する計算機メモリーは少なく済む。例えば、よく知られた急拡大流路内の流れを780要素、848節点で解析した場合、流速圧力同時緩和法では0.3MBのメモリー量で計算できるのに対し、要素圧力を未知量とする780元の連立一次代数方程式を解く他の方法(SIMPLER法のアルゴリズムを用いたFractional step法)では8.6MBのメモリーを必要とした。このとき、計算に要したCPU時間は、前者のそれを1とするとき後者の方法では9.1であった。しかし、これは同じ時間ステップ数を計算したときの比較であって、同程度の計算精度を得るために要する計算時間の比較ではない。後者は前者よりも若干大きめの時間増分値をとり得るので、計時間間に関してはさらに慎重な比較検討が必要である。

ここで、式(18)の導出をまとめておこう。式(20)の両辺に左からベクトル h_e^T を乗じると

$$h_e^T u_e^{n+1,(k+1)} = h_e^T u_e^{n+1,(k)} + (\Delta t h_e^T \bar{m}_e^{-1} h_e) \Delta p_e^{(k)} \quad (23)$$

を得る。式(16)を考慮すると、上式は

$$D_e^{(k+1)} = D_e^{(k)} + \frac{\Delta t h_e^T \bar{m}_e^{-1} h_e}{A_e} \Delta p_e^{(k)} \quad (24)$$

と書ける。圧力修正量 $\Delta p_e^{(k)}$ の値は $D_e^{(k+1)} = 0$ となるように決められるから、上式で $D_e^{(k+1)} = 0$ とおいて

$$\Delta p_e^{(k)} = -\frac{A_e}{\Delta t h_e^T \bar{m}_e^{-1} h_e} D_e^{(k)} \quad (25)$$

を得る。これと式(17)を比較すれば、式(18)が導かれる。

4. 計算の方法

4.1 手順 計算を始めるにあたって計算領域(水の初期領域と水が広がる可能性のある空気領域)の全体を有限要素に分割する。この要素網は計算を通じてその位置と形状を固定しておくものとする。次に、水の占める領域に水の動きを表示するためのマーカー粒子を均一に配置する。そこで、時刻 t^n の状態を知って時刻 t^{n+1} の状態を求める過程に注目するとき、計算手順は次の4段階で構成される。

第1段階では、計算領域を覆っている有限要素を次の3種類に分類する。

- 空要素(empty element) マーカーを含まない要素。

- 表面要素(surface element) マーカーを含み、空要素に隣接する要素。図3に示すように要素内に自由

図 3 要素の分類

表面が存在する。

・流体要素(fluid element) マーカを含み、空要素に隣接しない要素。

第2段階では、表面要素と流体要素で覆われた部分を水の領域とみなし、ここで有限要素方程式を組み立てる。この方程式を3章の流速圧力同時緩和法で解き、各節点での流速を求める。このとき計算上の自由表面境界は、図3の太実線で示される、空要素と表面要素の間の境界線であり、実際の自由表面とは必ずしも一致しない。

第3段階では、第2段階で計算された速度分布を用いて、各マーカー粒子を移動させる。移動は次式によって行われる。

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i^{n+1} \Delta t, \quad y_i^{n+1} = y_i^n + v_i^{n+1} \Delta t \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに (x_i, y_i) は i 番目のマーカーの座標を表す。マーカー速度 (u_i, v_i) は、そのマーカーが位置する要素の節点速度を内挿して求める。

第4段階では、物体の加速度、速度、移動距離を求める。水に接している物体表面に沿って圧力を積分して圧力抵抗 F_B^{n+1} を求めたのち、運動方程式(9)を用いて加速度 a_B^{n+1} を

$$a_B^{n+1} = \frac{F_B^{n+1}}{M_B} - g \quad \dots\dots\dots (27)$$

で計算する。次に、速度 v_B^{n+1} と静止水面から鉛直下向きに測った物体の移動距離 h_B^{n+1} をそれぞれ次式で計算する。

$$v_B^{n+1} = v_B^n + \frac{\Delta t}{2} (a_B^{n+1} + a_B^n) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$h_B^{n+1} = h_B^n - \frac{\Delta t}{2} (v_B^{n+1} + v_B^n) \quad \dots\dots\dots (29)$$

最後に、時間を Δt 進めて第1段階から計算を繰返す。

基本的な計算手順は上述のとおり、オリジナルのMAC法と同様である。しかし、直交格子という特性を

最大限に利用して構築されたMAC法と同じ手順を非構造格子網上で実現するためには、いくつかの計算過程において新たな工夫が必要とされる。最も重要な計算過程は流れの支配方程式の求解、マーカー位置の同定、マーカー移動の際の流速補正である。方程式の求解についてのアイデアは3章ですでに述べたので、ここでは後二者について、本論文の提案を述べる。

4.2 マーカーの位置同定

マーカーの移動速度を節点流速の内挿によって求めるためには、そのマーカーがどの要素上に位置しているかを知らなければならない。等間隔に配置された直交格子網であれば、MAC法に見られるように、マーカー座標と格子幅の間の単純な除算によってマーカーの位置する格子の番号を知ることができるが、不規則配置を前提とする有限要素網上では若干の工夫が必要である。ここでは、三角形有限要素で用いられる面積座標を応用する。

ある四角形要素を取り出し、図4のように対角線の一つで、これを二つの三角形に分割する。次に、着目しているマーカー M と三角形の3頂点を結んで、図4のようにさらに三つの小三角形を作る。そこで、次式によって $A_i (i=1, 2, 3)$ を計算する。

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & x_M & y_M \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ であり、下付き添字 $M, 1, 2, 3$ は、それぞれマーカー粒子、頂点 P_1, P_2, P_3 の座標値を意味する。さて、着目しているマーカーが $\Delta P_1 P_2 P_3$ の中(辺上を含む)にあれば、式(30)で計算される A_1, A_2, A_3 はすべて非負の値をとる。このとき A_1, A_2, A_3 の値はそれぞれ $\Delta M P_2 P_3, \Delta M P_3 P_1, \Delta M P_1 P_2$ の面積の2倍に等しい。逆に、マーカーが $\Delta P_1 P_2 P_3$ の外にあると、 A_1, A_2, A_3 の少なくとも一つは負値をとる。したがって、注目している四角形要素のどちらか一方の三角形領域で A_1, A_2, A_3 の値がすべて非負であれば、このマーカーはその四角形要素内に存在することになる。また、どちらの三角

図 4 マーカー粒子と三つの小三角形

形領域で計算しても A_1, A_2, A_3 の少なくとも一つが負になる場合は、そのマーカーは四角形要素内には存在しない。このときは、別の要素について同様の計算を行うことになる。その際、負値をとった面積座標からマーカーの位置する方向を検出することができる。この情報を利用すれば、着目するマーカーを内包する要素を最短経路で探索することができる。

4.3 表面要素の節点流速について 表面要素に隣接するある空要素に注目しよう。時刻 t^n において空要素であっても、マーカーの移動によってマーカーがその空要素に流入し、時刻 t^{n+1} には表面要素になる場合がある(図5の斜線を施した要素)。この場合、この要素は、水の領域を構成する要素の一つとして時刻 t^{n+1} において有限要素方程式(12), (13)の組立に関与することになる。このとき、この要素の4節点のうちいくつかでは $u^n = v^n = 0$ のはずである(図5の白丸の節点)。しかし、その要素にマーカーが流入してきたということは、その要素が位置する場所の水が運動の最中であることを意味するから、このような流速値が零である節点が存在することは不自然である。そこで、有限要素方程式を組み立てる前に、表面要素の流速値が零である節点に対して非零の流速値を与える操作を施さなければならない。

この操作は、該当する表面要素ごとに非圧縮条件(11)を満たすように行われる。この場合、1本の方程式で少なくとも2変数(1節点あたりの u と v) の値を決めなければならないので、その方法には工夫を要

する。オリジナルのMAC法では、連続の方程式(3)を近似的に $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y = 0$ のように分解し、第1式から u を、第2式から v を求めている。本方法では、3.2節で述べた流速圧力同時緩和法の第2段階で用いた反復計算を応用し、以下のような手順を提案する。

(1) 流速値が零の節点において、非零の流速値を推定する。このための方法はいろいろ考えられるが、ここではマーカー粒子の速度の平均値を利用する。まず、注目している節点を共有する表面要素ごとに要素内のマーカー群の平均速度を計算する。次に、それらの要素平均速度の、要素面積を重みとする重み付き平均をその節点の流速とする。

(2) (1)で推定された流速は非圧縮条件(11)を必ずしも満足しない。そこで、この条件を満たすように補正を加える。一つの表面要素に着目して、

(i) 速度の発散を式(16)で計算し、

(ii) 圧力修正量を式(17)で計算し、

(iii) 要素圧力と節点流速を式(19), (20)で計算する。

このとき(iii)において、もともと非零の流速を有していた節点(図5の黒丸の節点)には流速補正を施さない。(i)~(iii)の操作を、流速値が零の節点をもつすべての表面要素について行い、式(21)の収束判定条件が満たされるまで繰返す。

以上の手続きによって、非圧縮条件を満たす非零の流速値を、表面要素の流速値が零であった節点に与えることができる。また同時にその表面要素の圧力(補正前は零である)も決定することができる。(1)のステップで節点流速の推定を行わずに、流速値を零にしたまま(2)のステップから始めてもよさそうに見えるが、この場合反復計算は収束しないことが多い。

5. 解析結果

計算は、矩形とくさび形の2種類の物体について行った。それぞれの寸法と計算条件を表1にまとめる。ここで、矩形物体を用いる計算は、その結果を文献(13)の実験データと比較することにより計算精度を検証することを目的としており、ブロックの寸法と質量、着水速度の値は文献(13)より引用した。密度を $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘性係数を $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。重力加速度は 9.8 m/s^2 である。式(21)の ϵ は 10^{-3} とする。いずれの計算も、物体底面あるいは底面先端が静止水面に接した状態を $t=0$ とする。マーカーの初期配置数は表1に示すとおりであるが、以後計算の進行に従って、境界 Γ_3 での流速に応じてマーカーを流入させる。図6に、それぞれの計算に使用した有限要

図5 表面要素上の流速値が零の節点

素分割を示す。

図7は、矩形の場合について、物体の移動距離 h_B 、物体の無次元加速度 a_B/g 、物体の底面中央に作用する

表1 物体の寸法と計算条件

Block shape	Rectangle	Wedge
Block size [unit: cm]
Mass of block	153 g	120 g
Initial impact velocity	-30 cm/s	-100 cm/s
Size of initial liquid region	57 cm × 23 cm	50 cm × 30 cm
Initial number of markers	15920	23880
Time increment	4×10^{-3} s	10^{-3} s

(a) 矩形物体

(b) くさび形物体

図6 有限要素分割

圧力のそれぞれの時間変化を、文献(13)より引用した実験値と比較して示したものである。○印が本方法による計算結果、実線が実験結果である。圧力のピーク値とそれが現れる時刻を除けば、両者の一致は良好である。加速度のピーク値に関していえば、計算値と実験値はよい一致を示しているが、時間増分の大きさを変えるとその計算値は変動する。そのとき、加速度のピーク値と時間増分値の積がほぼ一定となる傾向が見

図7 矩形物体についての計算値と実験値の比較

図8 矩形物体着水時の水面変化

図9 くさび形物体着水時の水面変形のシミュレーション

られる。このケースでは、着水速度が遅いこともあって水面変動は小さく、図8に示すように物体近傍がわずかに盛り上がる程度であった。

図9に、くさび形物体の着水時の水面変形の様子をマーカー分布によって示す。水面からの飛まつ形状がよくとらえられている。

6. お わ り に

マーカー粒子法と有限要素法を併用した、自由表面を有する流体の運動解析のためのシミュレーション手法を構築し、二次元物体の着水現象の解析に応用した。物体の没水距離、加速度、物体にかかる流体圧につき、実験値との比較による精度検証を行った結果、良好な結果が得られることを確認した。

本論文では、比較的遅い落下速度の着水現象を計算した。実際の模型実験に相当する高速落下の場合を計算するためには流れの計算に乱流モデルの導入が必要であろう。次なる課題としたい。

最後に、本研究の一部は平成3、4年度の文部省科学研究費補助金(一般研究C)の助成で行われたことを付記する。

文 献

- (1) von Kármán, Th., *NACA Tech. Note*, 321 (1929).
- (2) Wagner, H., *Z. Angew. Math. Mech.*, **12** (1932), 193.
- (3) Kikuhara, S., *J. Aero/Space Sci.*, **27** (1960), 415.
- (4) Wang, H. P. and McLay, R. T., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **108** (1986), 465.
- (5) Muttin, F., ほか3名, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36** (1993), 2001.
- (6) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., *J. Comput. Phys.*, **39** (1981), 201.
- (7) 鶴飼, 機論, **56**-531, B (1990), 3248.
- (8) Usmani, A. S., ほか2名, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **35** (1992), 787.
- (9) Welch, J. E., ほか3名, *Los Alamos Scientific Laboratory Rep.*, LA-3425 (1966).
- (10) Vieceilli, J. A., *J. Comput. Phys.*, **8** (1971), 119.
- (11) Mizukami, A., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **59** (1986), 111.
- (12) Nakayama, T. and Yazaki, H., *Comput. Mech.*, **12** (1993), 123.
- (13) Cheng, R. Y.-K. and Leland, T. J. W., *Numerical Methods in Fluid Dynamics* (Brebbia, C. A. and Connor, J. J., eds.), (1974), 272, Pentech Press, London.