衝撃波との干渉による異種気体界面の変形挙動に関する研究* (低密度/高密度界面の場合)

阿 部 晃 久*¹

Deformation Problems of Gas Interfaces of Different Densities Generated by Shock Waves (Light/Heavy Interface)

Akihisa ABE

This paper reports numerical and analytical studies of the interaction problem between a gas interface of different densities and shock waves. The interface is formed between air and SF₆ (light/heavy interface, i. e., the incident shock wave propagates from air to SF₆), and there is a sinusoidal perturbation on the initial interface. The interface deformation process and the growth rate of a sinusoidal perturbation on the interface are investigated after shock wave interaction. Numerical simulation is carried out using the second-order TVD finite difference scheme, and the Euler equations are solved. Theoretical impulsive growth rate obtained using the stable velocities on the interface after shock interaction is compared with results of the numerical simulation. In the case of incident shock Mach numbers $Ms < 2$ and amplitudes of perturbed interface $\eta_0 k < 1$, good agreement is obtained.

Key Words: Shock Wave, Compressible Flow, Finite Difference Scheme, Gas Interface of Different Densities, Richtmyer-Meshkov Instability, Impulsive Growth Rate, Interface Deformation

1. 緒 言

重力加速度が作用する空間で密度が異なる二種類の媒質による密度不連続面に微小擾乱が存在すると、密度不連続面を境にして重力加速度の方向に密度が減少する場合には擾乱が成長し、Rayleigh-Taylor不安定性が生じる⁽¹⁾。一方、微小擾乱が存在する密度不連続面が衝撃波の入射による衝撃的な加速度を受けた時に引き起こされる不安定性は、Richtmyer-Meshkov不安定性と呼ばれる^(2,7)。このような衝撃波によって引き起こされる不安定現象は、レーザ核融合における燃料ペレットの収縮、超音速燃焼での燃料混合、爆発圧着等の材料加工等に現れ、これらの現象解明は不安定性の積極的な利用又は防止等制御問題の面から工学的に重要な研究課題である。衝撃波による界面不安定現象の最初の解析的研究はRichtmyerによって行われた。Richtmyerは、Taylorによって求められた二つの密度が異なる非圧縮性流体間の界面上の周期擾乱の成長理論を衝撃波駆動の界面不安定性問題に適用し、擾乱の初期振幅が $\eta_0 k < 1$ (ここで η_0 は周期擾乱の初期振幅、 k は波数) のとき、振幅が時間に対し線形的に増加す

ることを示した⁽⁸⁾。その後Meshkovが実験によって単一波長擾乱の線形成長則を確認し⁽⁹⁾、その実験結果はSturtevantによる実験パラメータの修正でRichtmyerの理論解に近付くことがわかった⁽¹⁰⁾。また、Meshkovの実験では比較的強い衝撃波との干渉や比較的大きな $\eta_0 k (< 1)$ の場合でも振幅の増加が時間に対して線形となることが確認されているが、理論と実験との定量的な一致は得られておらず、さらに、界面形状変化のメカニズムについてはあまり議論されていない。特に、 $\eta_0 k$ が大きくなると流体の圧縮性が顕著に現れ、衝撃波が界面と干渉した後に発生する種々の波の挙動を無視することはできず、振幅成長速度ばかりでなく界面形状変化にも影響が現れる。本研究では、初期の界面擾乱振幅および入射衝撃波マッハ数が比較的大きな場合に衝撃波が密度の小さい気体(Light-gas)から密度の大きい気体(Heavy-gas)へ伝播することによって生じる密度不連続界面(以下L/H界面と書く)の界面形状変化のメカニズムや界面上の周期擾乱の振幅成長速度について議論する。また、Richtmyerの理論式中の衝撃速度に修正を試み、数値シミュレーション結果との定量的比較から振幅成長速度と入射衝撃波マッハ数や初期界面振幅との関係等について明かにする。

* 原稿受付 平成6年7月20日。

*¹ 正員, 神戸商船大学 (〒658 神戸市東灘区深江南町5-1-1)。

2. 数値計算

数値シミュレーションは、二次精度風上型TVD差分法⁽¹¹⁾を用いて二次元非粘性圧縮性流体の基礎方程式を解いた⁽¹²⁾。本計算で使用する二種類の気体は理想気体とし、質量分率から混合気体の比熱比を求め、全体を単一の理想気体と見なすことによって異種気体界面挙動をシミュレートした。基礎方程式は、以下のように書ける。

$$U_t + F_x + G_y = 0 \quad (1)$$

ここに、 U , F , G はそれぞれ保存変数ベクトル、 x ならびに y 方向の物理流束ベクトルで、二種類の気体から成る混合気体を考えた場合に次のようになる。

$$U = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ m \\ n \\ E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} c_1 m \\ c_2 m \\ m^2/\rho + P \\ nm/\rho \\ (E+P)m/\rho \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} c_1 n \\ c_2 n \\ nm/\rho \\ n^2/\rho + P \\ (E+P)n/\rho \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = c_1 \rho$, $\rho_2 = c_2 \rho$, $m = \rho u$, $n = \rho v$ で ρ , u , v , P , E は、それぞれ密度、 x および y 方向の粒子速度、圧力、単位体積当たりの全エネルギーで添え字の1,2は気体の種類を意味する。

エネルギー E と内部エネルギー e は

$$E = (\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2) + \frac{m^2 + n^2}{2\rho} \quad (3)$$

$$e_i = C_{v_i} T = \frac{C_{v_i} P}{\sum_{j=1}^2 \rho_j R_j} \quad (4)$$

である。ここに、 C_v は定積比熱、 T は温度、 R は気体定数である。また、全圧 P は分圧の法則と理想気体の状態式より

$$P = P_1 + P_2 = T \sum_{j=1}^2 \rho_j R_j \quad (5)$$

である。したがって、(3), (4), (5)式から圧力 P は

$$P = \frac{(\gamma_1 - 1)C_{v_1} \rho_1 + (\gamma_2 - 1)C_{v_2} \rho_2}{C_{v_1} \rho_1 + C_{v_2} \rho_2} [E - \rho(u^2 + v^2)/2] \quad (6)$$

となる。

計算に使用した格子は、 x 方向100、 y 方向300の正方形格子であり初期界面形状は以下のように与えた。

$$y = \eta_0 \cos(kx), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7)$$

ここに、 η_0 は周期擾乱の初期振幅、 k は x 方向波数、 λ は波長である。計算は主に初期振幅 $\eta_0 k = 0.5$ について行った。

本計算に用いた密度の異なる二種類の気体は、上流側に空気($\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1.402$)、下流側に六フッ化硫黄($\rho = 6.155 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1.06$)であり、入射衝撃波マッハ数は $Ms = 1.1 \sim 2.0$ とした。また、計算は現象の対称性を考慮して図1に示す様な $0 \leq x \leq \lambda/2$ の

図1 計算領域

領域のみについて行った。

3. Richtmyer-Meshkov不安定の理論成長速度

界面上の周期擾乱の y 方向変位を $y = \eta(x, t)$ として表したとき、非圧縮性流体界面上の擾乱の振幅挙動は、粘性や界面張力等を無視した場合以下のようになる⁽¹⁾。

$$\frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} = \sigma^2 \eta(t) \quad (8)$$

ここに、

$$\sigma^2 = k g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (9)$$

であり、 g は重力加速度、 $(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ はAtwood比と呼ばれる(以下Atwood比を A_t と書く)。(8)式はRayleigh-Taylor不安定性を示し、 $\rho_2 > \rho_1$ のとき振幅は定常となるが、 $\rho_2 < \rho_1$ のとき振幅が指数関数的に増大し不安定となることがわかる。これに対して、衝撃波による衝撃加速が界面に作用した場合の不安定性の成長を示す関係式は、重力加速度 g を次のように置き換えることによって求められる^(7,8)。

$$g = [u] \delta(t) \quad (10)$$

ここに、 $[u]$ は衝撃波との干渉により変化した界面の速度、 δ はDiracのデルタ関数である。(10)式を(8)式に代入し、時間積分を行えば次の関係式が得られる。

$$\frac{\eta(t)}{\eta_0} = k A_t [u] t + 1 \quad (11)$$

(11)式より、擾乱の振幅 $\eta(t)$ は時間 t に対して線形であり、 $A_t > 0$ でも $A_t < 0$ でも非定常となることがわかる。(11)式は、Richtmyer-Meshkov不安定性の振幅成長を表し、 $\eta_0 k \ll 1$ のときに成り立つ。

4. 一次元および二次元干渉問題

4.1 一次元問題 図2にマッハ数1.5の衝撃波が空気中からSF6へ入射する一次元干渉問題の模式図を示す。縦軸が時間、横軸が位置を表し、実線が衝撃波(Si;入射衝撃波, Sr;反射衝撃波, St;透過衝撃波), 破

図2 Air/SF6界面と衝撃波(Ms=1.5)の一次元干渉問題

線が界面(I)である。衝撃波が界面へ入射するとき、空気の音響インピーダンスよりSF6のインピーダンスの方が大きいため圧縮波が反射する。界面の移動速度はSF6中へ伝播する透過衝撃波背後の粒子速度で決定される。入射衝撃波マッハ数が1.5の場合、各領域における状態量の解析解は図示する通りである。ここで、圧力、密度、速度はそれぞれ空気の初期圧力、密度および音速に対する比で示している。

図3は、本数値シミュレーションでAir/SF6界面とMs=1.5の衝撃波の一次元干渉問題を解いた結果である。図3(a)は密度分布、(b)は衝撃波面と界面位置の時間履歴である。図3(b)の縦軸は無次元時間、横軸は無次元距離で破線が界面、実線が衝撃波を表す。干渉直後から界面の移動が始まり、界面から反射衝撃波と透過衝撃波がそれぞれ発生・伝播する。界面ならびに透過衝撃波の移動速度はいずれもほぼ一定であることがわかる。数値計算結果から求められた透過・反射衝撃波面前後の流れの諸量と図2で示した解析解との差は、いずれも1%以下である。

4.2 二次元問題 比較的強い衝撃波が異種気体界面と干渉するとき、界面の圧縮性を無視することは出来ない。図4は、L/H界面上の周期擾乱の半波長部に衝撃波が入射した場合の模式図である。界面を境にして気体の音速が異なるため入射衝撃波は界面通過時に相対回折率 $n = U_s/U_t = \sin \alpha_i / \sin \alpha_t$ (ここに、 U_s は入射衝撃波速度、 U_t は透過衝撃波速度)で回折し、気体II中に透過衝撃波を形成する。また、気体I中へは反射衝撃波が伝播する。透過衝撃波はさらに $x=0$ 境界面でマッハ反射を生じ、界面は透過衝撃波ならびにマッハシステム背後の流速で変形移動する。 $\eta_0 k$ が小さくなれば初期衝撃波入射角 α_i が0に近づくことになり、現象は一次元問題と等価になるが、 $\eta_0 k$ がある程度大きければ透過・反射波の複雑な干渉が生じ界面形状変化や振幅成長に著しい影響が現れることは明かである。

図3 数値計算結果 (一次元問題)

図4 Light/Heavy界面と衝撃波の干渉の略図

図5 L/H界面と衝撃波の干渉現象
(a) Meshkovの実験結果⁽⁹⁾(He/R22, Ms=1.25),
(b) 数値計算結果)

図5の(a)は、Meshkovによって行われた可視化実験結果(He/R22界面とMs=1.25の衝撃波の干渉)⁽⁹⁾のスケッチ、(b)は(a)に対応する本数値シミュレーションから得られた界面形状である。可視化実験では初期界面が隔膜で作られていることや分子拡散の影響もあって干渉後の界面厚さの増加や乱れが現れているが、界面形状は位相の変化を生じずに初期界面の凸部がスパイク状に変形していることなど単純な振幅増加にならないことがわかる。図5(b)の本数値シミュレーション結果では、隔膜の影響や分子拡散等の効果を含んでいないため界面が鮮明に捉えられている。界面形状につ

いて厳密な比較をすることは出来ないが、(a)の実験で観察される特徴的な変形形態が得られており実験結果と定性的に一致すると言える。

5. 結果と考察

まず、入射衝撃波マッハ数 $M_s=1.5$ 、 $\eta_0 k=0.5$ の結果について述べる。図6は本数値シミュレーションによって得られた一連の等密度線図と等圧力線図である。図中の等値線一本の跳びは、衝撃波前方における空気の初期値に対して密度が20%、圧力が5%である。界面の振幅は衝撃波の入射直後一時的に減少するが、その後初期界面形状の凸部と凹部の移動速度差のため時間の経過と共に振幅は同位相で増加していく。また、衝撃波が界面へ入射した際に発生した反射衝撃波は $x=\lambda/2$ 境界面でマッハ反射し、さらにこの反射波は x 方向の反射を繰り返していく。一方、回折した透過衝撃波は境界面で弱いマッハ反射を形成し、時間の経過と共にマッハシステム背後の密度および圧力値が上昇していくことがわかる。

図7は、界面上の二つの位置 $x=0$ 、 $\lambda/2$ における界面位置の時間変化を示している。縦軸が無次元時間 τ 、横軸が無次元距離 y/λ である。入射衝撃波がSF6中に完全に透過するのは干渉開始後約0.2無次元時間経過

したときである。その後、 $x=0$ 、 $\lambda/2$ での界面の動きは時間に対して線形的に移動していくことがわかる。詳しく観察すると $x=0$ では、約 $\tau=1.4$ までグラフの傾きが徐々に大きくなり界面の移動速度が減少しており、 $\tau>1.4$ ではほぼ一定速度となっている。一方 $x=\lambda/2$ では、約 $\tau=2$ を境にして傾きにわずかな変化があり界面の移動速度に一時的な加速が生じていることがわかる。

図8に界面擾乱の振幅の時間変化を示す。約 $\tau=0.4$ まで衝撃波により界面が潰され振幅が減少し、最小振幅 $\eta_{\min}$ に達する。その後振幅は $\tau>2$ で線形的に増加していることから、比較的強い衝撃波の場合でも、ある程度の時間が経過すれば振幅成長が時間に対して線形となることがわかる。また、干渉直後に初期振幅が減少するため、数値計算結果から振幅成長速度を求める際には η_0 の代わりに衝撃波干渉後の最小振幅 $\eta_{\min}$ を用いることとした。ここで、数値シミュレーションから得られた $\eta_{\min}$ の値は、関係式 $\eta_{\min}=(1-U_i/U_s)\eta_0$ （ここに、 U_i は $x=0$ 界面速度、 U_s は空気中の初期衝撃波伝播速度）から得られた値に一致した。

図9に界面上の位置 $x=0$ 、 $\lambda/2$ における粒子速度の時間変化を示す。粒子速度は空気中の音速で無次元化している。界面の移動速度は、衝撃波との干渉直後不連続的に上昇しパルス状の鋭い波形を示す。どちらの

図6 数値計算による密度および圧力分布図
((a), (b), (c); 等密度線図, (d), (e), (f);
等圧力線図)

図7 界面位置の時間履歴

図8 界面振幅の時間変化

図9 界面速度の時間変化

位置でも衝撃波干渉直後の速度はほぼ同じであるが、その後 $x=0$ での速度は指数関数的に減少し、 $x=\lambda/2$ の速度は比較的安定した値を示している。 $\tau > 2$ では、界面上の位置の半波長の違いで移動速度に速度比約 0.15 の差が生じていることがわかる。また、 $x=0$ では約 $\tau=1.4$ で速度の変動が見られ、 $x=\lambda/2$ では約 $\tau=2.2$ で速度の増加が見られる。これは、衝撃波と界面の最初の干渉で発生した反射衝撃波が $x=0$ 、 $\lambda/2$ 境界で反射する時期に一致している。すなわち、 $x=\lambda/2$ 境界面近傍では反射衝撃波が界面背後の圧力をわずかながら上昇させ粒子速度を増加するのにに対し、 $x=0$ 境界面近傍では界面形状の変形がすでに大きいことから反射衝撃波が界面と再干渉し、先頭の透過衝撃波がつくるマッハステム背後の圧力の高い領域内に透過波が伝播・反射するためさらに圧力上昇を招き（図 6 (d),(e),(f)参照）、界面背後よりも前方の圧力が高くなり界面の移動速度が減少すると考えられる。したがって、初期周期擾乱の凸部で相対的に移動が遅く凹部で速くなるため界面形状はスパイク形状へ変化することになる。以上のことは界面形状変化を引き起こす要因に関して、透過衝撃波背後の流速だけでなく反射衝撃波との再干渉による影響が無視できないことを意味する。また、図より時間の経過と共に $x=0$ 界面上の速度が指数関数的に減少していき、ある一定値に漸近すると予想される。これは反射波の影響が弱まるためであると考えられる。図 8 と比較すれば振幅成長が線形的になるのは $x=0$ での界面速度が比較的安定する時刻約 $\tau > 2$ に一致する。したがってこの時刻を τ_s とすれば、理論成長速度を求める際には (11) 式中の $[u]$ として最も圧縮性が強く影響する干渉直後の値よりも τ_s 時間経過後の値を用いるべきであると考えられる。ここで時刻 τ_s は、反射衝撃波の影響を考慮して入射衝撃波が空气中を $3/2$ 波長進む時間とする。

図 10 に入射衝撃波マッハ数 $Ms=1.5$ 、 $\eta_0 k=0.5$ の場

図10 界面振幅の時間変化 ($Ms=1.5$, $\eta_0 k=0.5$)

図11 振幅比の時間変化

合の理論および数値計算から得られた界面振幅と時間の関係をまとめて示した。縦軸が界面の最小振幅に対する振幅比、横軸が無次元時間である。図中の実線が一次元問題から得られた界面に生じる衝撃速度を使用して理論式 (11) から求めた理論解、一点破線ならびに二点破線がそれぞれ数値計算から得られた $x=\lambda/2$ 、 0 の界面移動速度の時刻 τ_s における値を使用して (11) 式から求めた理論解で、その平均値を破線で示した。また、記号の $\circ$ は数値シミュレーションから直接得られた振幅比の増加履歴である。これらの比較から実線で示される Richtmyer の理論成長速度ならびに破線で示される平均速度による成長速度（ここに、成長速度はグラフの傾きに対応する）は、数値シミュレーション結果とは著しく食い違っていることが明かである。数値シミュレーションから直接得られた成長速度は時間の経過と共に増加し約 $\tau > 2$ で一定となる。数値シミュレーションの最終的な成長速度は平均速度による理論成長速度よりも遅く、 $x=0$ の界面移動速度値を使用して求めた二点破線で示される理論成長速度に最も近いことがわかる。

図 11 に界面の初期振幅が等しく ($\eta_0 k=0.5$) 入射衝撃

図12 振幅成長速度と入射衝撃波マッハ数の関係

図13 初期界面振幅と成長速度の関係

波マッハ数が異なる場合の本数値シミュレーションから得られた界面振幅比と時間の関係を示す。入射衝撃波マッハ数は $Ms=1.1, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$ である。図より、 Ms の増加に伴ってグラフの傾きが大きくなり、振幅成長速度が増加することがわかる。また、入射衝撃波マッハ数にかかわらず最終的に振幅の増加が直線的になることがわかり、 Ms 値が異なっても図10で示した同様な結果が得られることが期待できる。

図12は、界面振幅成長速度と入射衝撃波マッハ数の関係である。図中の実線は一次元の界面移動速度を使用して求められた理論成長速度、記号●は本数値シミュレーション結果から最小二乗法により求めた成長速度、記号△は時刻 τ_s における $x=0$ 界面上の速度を使用して求めた修正理論成長速度である。 Ms の増加に伴い数値計算結果と実線の理論解とのずれが著しく大きくなることからわかる。これは、 Ms 値の増加に伴って界面形状変化に対する圧縮性の影響が顕著に現れるためであると考えられる。一方、修正成長速度とシミュレーション結果は10%以内の食い違いに収まり良く一致する。また、 $Ms=1.1$ および1.25の場合の本数値計算から得られた成長速度が一次元速度から求め

た理論解に近づく傾向にあり、 $(Ms-1) \ll 1$ のとき成長速度はRichtmyerの理論解に一致することがわかる。

図13に入射衝撃波マッハ数 $Ms=1.5$ に対する初期界面振幅と成長速度の関係を示す。記号△は修正理論成長速度、記号●は本数値シミュレーションから得られた成長速度である。どちらの場合も初期振幅が0に近づけば一次元衝撃速度によるRichtmyerの理論成長速度に漸近し、初期振幅の増加に伴って成長速度が減少する。数値シミュレーション結果と修正理論値の比較から、 $\eta_0 k < 1$ の範囲で両者は比較的良く一致することがわかる。

6. 結 言

衝撃波と異種気体界面(L/H界面)の干渉問題において入射衝撃波マッハ数ならびに初期擾乱振幅が比較的大きい場合について差分法による数値シミュレーションとRichtmyerの理論式により界面形状の変化過程や振幅成長速度を検討し以下の結果が得られた。

- 1) 界面形状は、入射衝撃波と界面との干渉で生じる透過および反射衝撃波の二次的な干渉により界面上の各位置における速度に差が生じ、スパイク状に変形することを明かにした。
- 2) 入射衝撃波マッハ数 $Ms > 1$ のとき、干渉直後の衝撃速度ではなく、その後の安定した速度を用いることにより、圧縮性の影響を抑えRichtmyerの理論式の使用範囲を拡張できることを示した。
- 3) 2)の修正によりRichtmyerの理論成長速度は $\eta_0 k < 1$ 、 $Ms < 2$ の範囲で数値シミュレーション結果と定量的に良く一致した。

文 献

- (1) Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, (1961), Oxford University Press., 428.
- (2) Brouillette, M. and Sturtevant, B., Proc. 17th Intl Symp Shock Tubes and Waves, (1990), 284.
- (3) Besnard, D. and Hass, J.F., Proc. 17th Intl Symp ST&W, (1990), 296.
- (4) Benjamin, R. F., Besnard, D. and Hass, J. F., Proc. 18th Intl Symp Shock Waves, (1992), 325.
- (5) Hass, J. F. and Sturtevant, B., J Fluid Mech., Vol.181, (1987), 41.
- (6) Han, S. J., American Physical Society, Review A, Vol.44, No.12, (1987), 8119.
- (7) Brouillette, M. and Sturtevant, B., J. Fluid Mech., Vol. 263, (1994), 271.
- (8) Richtmyer, R. D., Commun. Pure Appl. Maths 8, (1960), 297.
- (9) Meshkov, E. E., Sov. Fluid Dyn. 4, (1969), 101.
- (10) Sturtevant, B., Proc. 16th Intl Symp Shock Tubes and Waves, (1988), 89.
- (11) Yee, H. C., NASA Technical Memorandum 101088, (1989).
- (12) Abe, A. and Takayama, K., JSME Intl Journal, SeriesII, Vol.33, No.2, (1990), 216.