蓄冷材内のヘリウムの流動解析*
(スターリング冷凍機のパフォーマンス解析)

宇 多 小 路

豊*¹Numerical Analysis of the Helium Flow in Regenerator
(Performance Calculation of a Stirling Cryocooler)

Yutaka UTAKOJI

Computer simulation of flow in packed wire screens of a regenerator is successfully attempted using a technique similar to the boundary element method. One-dimensional potential flow is assumed and the local helium volume increase by heating and pressure change is replaced by source or sink. Finally, fictitious sources are attached to both ends, satisfying the given pressure conditions. Darcy's law is applied to obtain flow velocity from potential. This method requires no iterative processes. This fairly efficient calculation is installed in overall cryocooler performance calculations, and the change of velocity distribution in the regenerator is successfully investigated in the course of the refrigeration cycle.

Key Words: Numerical Analysis, Cryogenics, Potential Flow, Stirling Engine, Porous Media, Refrigeration, Boundary Element Method, Helium

1. 緒 言

スターリング冷凍機の研究は数多くなされている^{(1)~(9)}が, その冷凍性能は蓄冷器と呼ばれる伝熱ユニット数の非常に大きな蓄熱式熱交換器の性能に依存する部分が多い。極低温用冷凍機にあつては一端が極度に低い温度に曝されるので蓄冷材を構成する材質の低温特性も重要であるが, 作動流体のヘリウムが蓄冷材の中をどのように流動しているのかを充分理解することも重要である。ところが, スターリング冷凍機の性能解析例⁽³⁾でも蓄冷器の両端の密度の平均値を用いた圧力損失計算などを行っているだけで蓄冷材の高温端から低温端にいたる速度の分布などの解析例は見当たらない。

蓄冷材の中の流れは, 両端の圧力に大きな差はないとしても両端の温度差が大きいために, かなりの密度変化を伴う流れとなる。高温端が常温の範囲にあつて低温端が極低温に達している場合を想定すると, 伝熱ユニット数が多いために内部を流動するヘリウムの温度も一端は常温, 他端は極低温となるのでその間のヘリウムの密度変化は非常に大きく, 平均密度を用い

て流速を計算したので決して十分な精度が得られないことが理解できる。

そこで, 蓄冷材の両端の圧力が与えられたときに逐次近似的な計算過程を経ないで効率よく蓄冷材各部の温度・圧力・ヘリウムの流速を計算し, 冷凍サイクル全体の性能シミュレーションを行う方法を研究した。蓄冷材をブロックごとに目の細かさの異なる金網で構成した場合の特性を計算に取り込むことも可能である。

研究対象としたスプリット形スターリング冷凍機⁽¹⁾⁽²⁾の概略構造は図1のとおりで, 圧縮機のピストンがつくりだすヘリウムの脈動により, ガススプリ

図1 スプリット型スターリング冷凍機

* 原稿受付 平成6年3月18日。

*¹ 正員, 京都大学工学部 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)。

グを備えたディスプレイサが自由に往復動をする。ディスプレイサの質量とガススプリングのばね定数で決まる固有振動数と圧縮機から送られるヘリウムの脈動周波数の関係が適切になるように設計すると、ディスプレイサはヘリウムの圧力波に対して約 90° 進んだ位相で自由振動を行い、膨張室側に冷気を発生する。

おもな記号

- A : 仕事の熱当量
 c_p : ヘリウムの等圧比熱
 C_{R1}, C_{R2} : 蓄冷材の圧力損失式の係数
 d_m : 蓄冷材を構成する金網の線径(図2参照)
 f : 流れの圧力損失係数
 $G(x, \xi)$: 速度ポテンシャルをもった一次元流れのグリーン関数
 H_{MASS} : スターリング冷凍機の膨張室周辺の固体壁等の水当量
 L : 速度ポテンシャルの基準に関する値
 L_R : 蓄冷材の充填厚さ(両端面間の距離)
 ΔL : 蓄冷材を分割した微小要素の長さ $= L_R/n$
 L_w : 金網の線間距離(目開き, 図2参照)
 M_E : 膨張室(Expansion Space)に存在するヘリウムの質量
 n : 数値解析の際の、蓄冷材の流れ方向の分割数
 n_s : 蓄冷材の単位長さ当たりの金網の積層枚数
 $P_{\text{ORO}}, P_{\text{ORO}}(\xi)$: 蓄冷材の空隙率, 位置座標 ξ の場所の空隙率
 ΔP : 蓄冷材の両端の圧力差
 p : ヘリウムの圧力
 $\Delta \rho_t$: ヘリウム圧力の, 微小時間の間の変化量
 $\Delta \rho_x$: ヘリウム圧力の, 流れ方向(蓄冷材の積層方向)の微小変化量
 Q : 膨張室に外部から加えられた熱量
 T : ヘリウムの温度
 ΔT : ヘリウム温度の, 微小時間の間の変化量
 t : 時間ステップ
 $U, U(x)$: 蓄冷材の中の流れの速度ポテンシャル
 V : 体積
 v : ヘリウムの流速(Frontal Flow Velocity, すなわち, 容積流量を蓄冷材の前面面積で割った値)
 x : 蓄冷材の中の, 積層方向の距離
 観測点の位置座標(図4, 5参照)
 β : 蓄冷材を構成する金網の開口比(図2と表1参照)
 μ : ヘリウムの粘性係数

ν : ヘリウムの動粘性係数

ξ : ソース点の位置座標(図4, 5参照)

ρ : ヘリウムの密度

σ : 比表面積(表1参照)

$\phi(\xi_i)$: 座標 ξ_i の境界におかれた仮想的な吹き出し

$\phi(\xi)$: 座標 ξ の, 内部の点におかれた吹き出し

添字

E : 膨張室(Expansion Space, 図1参照)

p : 観測点(図5参照)

q : ソース点(図5参照)

1, 2: 蓄冷材の左端, および, 右端(図4参照)

2. 解析方法

蓄冷材は金網等を厚く積層してあり, 積層の方向にヘリウムが流れる。金網の素線周辺の流れはレイノルズ数の小さな層流であるが, 微小粒子の充填層の中のポテンシャルを持った流れとみなして Darcy の法則を適用する。流れは一次元とみなし, 蓄冷材の中でヘリウムが温度上昇や圧力降下によって体積が増加する現象を流れの中の吹き出し分布と考え, 境界条件を満足させるための仮想的な吹き出しを最後に蓄冷材の両端に付加して流れの解とする積分型の計算手法を採用する。

$$v = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{速度}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$U = \frac{2\beta L_w}{C_{R1} n_s \mu} \frac{\Delta p_x}{\Delta x} x \quad (\text{ポテンシャル}) \quad \dots\dots (2)$$

Δp_x : 距離 Δx 当たりの圧力降下

μ : 粘性係数

n_s : 単位長さ当たりの積層枚数

β, L_w : 表1参照

v : Frontal Flow Velocity

C_{R1} は 52 とした。その根拠は以下のとおりである。

表1 積層した金網の幾何学的形状値

Mesh Size No.	500	635
Opening Area Ratio β (fig. 2)	.260	.250
Wire Dia., d_m , mm	.025	.020
Mesh Distance, L_w , mm	.026	.020
Porosity, P_{ORO}	.572	.561
Specific Surface σ , mm^2/mm^3	53.5	60.88

$$\text{Opening Area Ratio } \beta = \left(\frac{L_w - d_m}{L_w} \right)^2$$

図2 金網の形状

P. R. Taylor⁽⁹⁾ は宮部ら⁽¹¹⁾ の金網の圧力損失の実測値 (図 3 参照) 等を整理して $4 < Re < 1000$ に対し、次式に相当する関係式を導いている。

$$f = \frac{C_{R1}}{Re} + C_{R2}, \quad C_{R1} = 52.15,$$

$$C_{R2} = 0.334, \quad Re = \frac{(v/\beta)L_w}{\nu}$$

$$\Delta p_x = f \frac{1}{2} (n_s \Delta x) \rho (v/\beta)^2,$$

ρ : 密度

ν : 動粘性係数

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta x} = (C_{R1} + C_{R2} Re) \frac{n_s \mu}{2 L_w} (v/\beta)$$

Darcy の法則を適用することは Re の小さい範囲でこの式の $(C_{R1} + C_{R2} Re)$ の部分の第 2 項を省略することを意味する。

なお、宮部らの圧力損失係数 f (図 3) と他の研究報告とを併せて整理した結果⁽¹²⁾ を、さらに Taylor⁽⁹⁾ が一つの計算式に集約しており、著者は Taylor が一つに集約した計算式のほうを利用した。図 3 の図中に記されている圧力損失係数 f の式の右辺の C_{R1} , C_{R2} の値が本文中の記述と異なるのはこのためである。

2.1 基礎方程式 間接法と呼ばれる境界要素法の一次元の考え方⁽¹³⁾ を、蓄冷材の流れに適用すると以下ようになる (図 4 参照)。

$$U(x) = G(x, \xi_1) \phi(\xi_1) + G(x, \xi_2) \phi(\xi_2) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(x, \xi) \phi_0(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$v(x) = F(x, \xi_1) \phi(\xi_1) + F(x, \xi_2) \phi(\xi_2) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(x, \xi) \phi_0(\xi) d\xi \quad (4)$$

$\phi(\xi_1)$, $\phi(\xi_2)$: 境界上の吹出し (未知)

$\phi_0(\xi)$: 内部の吹出し (既知)

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} (L - |x - \xi|) \quad (5)$$

図 3 金網充填層の圧力損失係数⁽¹¹⁾

$$F(x, \xi) = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}(x - \xi) \} = -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \quad (6)$$

L はポテンシャルの基準に関する値 (任意) で、蓄冷材の積層厚さ L_R に等しくとって $L = L_R$ と置く。

2.2 離散化 蓄冷材を流れの方向に n 個に等分割し $\phi(\xi)$ の分布を離散化して表すと以下ようになる (図 4, 5 参照)。

$$U(x_p) = \frac{1}{2} (L_R - x_p) \phi(\xi_1) + \frac{1}{2} x_p \phi(\xi_2) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n (L_R - |x_p - \xi_q|) \phi(\xi_q) \quad (7)$$

$$v(x_p) = \frac{1}{2} \phi(\xi_1) - \frac{1}{2} \phi(\xi_2) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \text{sgn}(x_p - \xi_q) \phi(\xi_q) \quad (8)$$

ただし

$$\phi(\xi_q) = \phi_0(\xi_q) \Delta L_q$$

である。

2.3 境界上の値の決定 式 (7), (8) の未知の $\phi(\xi_1)$ と $\phi(\xi_2)$ の大きさを両端の①, ②, ③の境界条件から決める。なお、式 (7), (8) の $\phi(\xi_q)$ は伝熱計算や流れの計算から決定できるので、既知として扱う。

① 一端でポテンシャルが零である条件 式 (7) を書き換えて $x = x_1$ においてポテンシャルが零になるように式 (9) の C を決める。

$$L_R \phi(\xi_1) + 0 \times \phi(\xi_2) + 2C = A \quad (9)$$

図 4 吹出しの分布

図 5 吹出し分布の離散化

ここで

$$A = - \sum_{q=1}^n (L_R - \xi_q) \phi(\xi_q)$$

である。

② 両端の圧力差 与えられるのは蓄冷材の両端の圧力差 ΔP であってポテンシャル差ではないので圧力差とポテンシャル差の関係を明確にしておく。

長さ ΔL の微小ブロックの両端のポテンシャルの差 ΔU は式(2)より

$$\frac{\Delta U}{\Delta L} = \frac{2\beta L_w}{C_{R1} n_s \mu} \frac{\Delta p_x}{\Delta x} \dots\dots\dots (10)$$

この比例係数の変動を考慮して、微小ブロックの ΔU をブロックの個数だけ集計してやれば、蓄冷材の前後の差圧とポテンシャルの差を結びつけることができる。このことを考慮に入れて式(7)を整理すると

$$-\phi(\xi_1) + \phi(\xi_2) = D + \frac{\Delta P}{B} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$B = \sum_{p=1}^n G_p \Delta L$$

$$D = \frac{\sum_{p=1}^n G_p \sum_{q=1}^n \text{sgn}(x_p - \xi_q) \phi(\xi_q) \Delta L}{B}$$

$$G_p = \frac{C_{R1} n_s \mu}{2\beta L_w}$$

である。

③ 無限遠方に影響を及ぼさない条件 吹出しの合計が零でなければならない。

$$\phi(\xi_1) + \phi(\xi_2) = E \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$E = - \sum_{q=1}^n \phi(\xi_q)$$

である。

以上の式(10), (11), (12)をまとめると

$$\begin{bmatrix} L_R & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(\xi_1) \\ \phi(\xi_2) \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ D + (\Delta P/B) \\ E \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

これを解いて

$$\phi(\xi_1) = \frac{1}{2} \{ E - (\Delta P/B) - D \} \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$\phi(\xi_2) = \frac{1}{2} \{ E + (\Delta P/B) + D \} \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

$$C = \frac{1}{2} \left\{ A - L_R \frac{1}{2} [E - (\Delta P/B) - D] \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot c)$$

2.4 内点の計算 以上のようにして境界上の $\phi(\xi_1)$ と $\phi(\xi_2)$ および C が決定できたので、これらをもとの式(8)に戻して、蓄冷材の中のすべての場所の流速が求められる。

2.5 計算手順 長さ ΔL のブロックの中の温度

T のヘリウムが微小時間 t の間に蓄冷材から加熱されて ΔT の温度上昇があったとすると

$$\phi(\xi) = \frac{P_{oro}(\xi) \cdot \Delta T(\xi) \cdot \Delta L}{T(\xi) \cdot t} \dots\dots\dots (15)$$

の吹出しと考えることができる。同様に微小時間 t の間に圧力 p が Δp_t だけ変化したとすると

$$\phi(\xi) = \frac{-P_{oro}(\xi) \cdot \Delta p_t(\xi) \cdot \Delta L}{p(\xi) \cdot t} \dots\dots\dots (16)$$

の吹出しと考えることができる。

このようにヘリウムの単位時間あたりの体積変化を見掛け上の吹出しとして扱うので、吹出しが流れの中に外部から質量を持ち込むことにはならない。

以上の流動解析法を、サイクル全体の冷凍性能シミュレーションの中に組み込んで評価する。蓄冷材の両端にかかる圧力を系全体の計算から微小時間ごとに算出して、これを境界条件として蓄冷材内のヘリウム温度・圧力・流速と蓄冷材温度の分布を求めるとともに、高温端と低温端を出入りする流速、すなわち、ヘリウムの移動質量を計算すると蓄冷材の圧縮機側と膨張室側それぞれに存在するヘリウムの質量が得られる、この値とそれらのヘリウムが占める容積からボイルシャルの法則を用いて各部の圧力が計算できる。ヘリウムの占める容積は、Runge-Kutta 法を用いてディスプレイサの運動方程式を解いて位置を求めれば計算できる。

求められた各部圧力を用いて膨張室の熱力学計算等を行うとともに蓄冷材内の流れを新たな境界条件のもとで計算する。この計算を繰返すことにより冷凍機全体の性能シミュレーションが可能となる。

膨張室のヘリウムに外部から加えられる熱量と膨張室の容積 V_E 、ヘリウムの質量 M_E 、圧力 p_E などに関する次式から、冷凍サイクル全体の性能が求められる。

$$dQ = M_E c_p dT - A V_E dp_E \dots\dots\dots (17)$$

$$dQ = H_{MASS} dT$$

ただし

A : 仕事の熱当量

c_p : 等圧比熱

dT : 温度上昇

dQ : 外部から加えられた熱量

H_{MASS} : 膨張室周辺の固体壁等の水当量である。

3. 数値計算結果と考察

冷凍能力がほぼ 1 W の計算例を図 6, 7 に示す。図 6 は圧縮機クランク軸の回転角度と蓄冷材内の流れを図示したものである。計算の経過は一応安定で、かつ、

図6 蓄冷材内の速度と圧力の分布の1サイクル間の変化

図7 ディスプレーサの振幅

ディスプレイサの振幅や1サイクルあたりの膨張室の温度低下の計算値も以下に説明するとおり妥当な値となっており、かなり満足のできる結果が得られた。図6を見るとヘリウムの流速等が蓄冷材の高温端から低温端に向かってどのような分布を持っていた、圧縮機が1回転する間にその分布状況がどのように変化するかがよく理解できる。ディスプレイサの振幅(図7)は、計算値が両振幅で4.1 mm に対して供試体による実測値は3.5~4.0 mm、膨張室の外部に取付けた熱容量のある負荷の1サイクル当たりの温度低下の計算値は0.008 K であるのに対して実測値は0.008~0.01 K であって、かなりよく一致している。

次に、蓄冷材の中の流れのレイノルズ数を図6に対応する条件で計算した結果を図8に示す。このレイノルズ数は蓄冷材の高温端と低温端の中央部の温度/流速に対応する値であるが、ほぼ、30 以下であるとみてよく、圧力損失の対数表示の図である図3の右下がり45°の直線部分、したがって、金網の圧力損失係数がレイノルズ数に反比例する範囲に納まっている。すなわち、Darcy の法則に従うと考えて解析した最初の仮

図8 蓄冷材内のレイノルズ数の1サイクル間の変化

定は妥当であったと判断できる。

4. 結 語

蓄冷材の前後の圧力が与えられたとき、逐次近似的な計算過程を経ない積分形の計算方法で蓄冷材各部の温度・圧力・流速を求めて性能シミュレーションに利用する手法を提案することができた。

この解析を適用した蓄冷材は非常に小さな可動部分に組み込まれ、しかも、非定常、かつ、高速現象であるため、流れの解察・計測は不可能といってもよい。したがって、蓄冷材単独特性の実測値と解析の照合はできていないが、冷凍サイクル全体としては実験結果とよく一致しており、製品開発の初期段階でシミュレーション計算を用いて開発作業を支援することができた。

この研究は住友精密工業(株)に著者が在籍したときに行われた。ご協力いただいた小原瑛室長(当時)・須藤功一チーム長(当時)にお礼を申し上げる。

文 献

- (1) Walker, G., *Proc. 21st IECEC*, 869102 (1986), 446-450.
- (2) 野間口, 冷凍, **62**-719 (1987), 937-943.
- (3) Tailor, P. R. and Narayankhedkar, K. G., *Cryogenics*, Vol. 28 (1988), 169-176.
- (4) Atrey, M. D. and Narayankhedkar, K. G., *Cryogenics*, Vol. 30 (1990), Apr. 341-347.
- (5) Ross, Jr, R. G., *Cryogenics*, Vol. 30 (1988), Mar. 233-238.
- (6) Gasser, M. G., Sherman, A. and Beale W., *Natl. Bureau of Std.*, SP-607 (1981), 103-115.
- (7) de Jonge, A. K., *Proc. 14th IECEC*, (1979), 1136-1141.
- (8) Stolfi, F. and de Jonge, A. K., *Philips Tech Rev.*, **42**-1 (1985), 1-10.
- (9) Orlowska, A. H., *Proc. ICEC 11* (1986), 285-289.
- (10) 浜口・高橋・宮部, 機論, **49**-445, B (1983), 2001-2010.
- (11) Miyabe, H., Takahashi, s., and Hamaguchi, k., *Proc. 17th IECEC*, (1982), 1839-1844.
- (12) Chen, N. C. J. and Griffin, F. P., *Proc. 18th IECEC*, (1983), 708-713.
- (13) Banerjee, P. K. and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, (1981), 15, McGRAW-HILL Book Co (UK).