種々のプラントル数流体の乱流直接シミュレーション
に基づく温度場2方程式モデルの構築*島田 昌也^{*1}, 長野 靖尚^{*1}Development of Two-Equation Heat Transfer Model Based
on Direct Simulations of Turbulent Flows
with Different Prandtl Numbers

Masaya SHIMADA and Yasutaka NAGANO

A low-Reynolds-number two-equation $k_t-\varepsilon_t$ model has been constructed with the aid of direct numerical simulation (DNS) data bases on turbulent flows with different Prandtl numbers. The model adopts new length and time scales to represent various sizes of eddies in a thermal field. The predicted results for thermal fields at different Prandtl numbers were compared with the relevant DNS and experimental data. These comparisons indicate that the proposed model has sufficient capability to reproduce the DNS data, to perform highly stable computations and to analyze the heat transfer in various Prandtl number fluids.

Key Words: Turbulent Flow, Heat Transfer, Computational Fluid Dynamics, Turbulence Model, Time Scale

1. 緒 言

乱流現象を予測する場合、 $k-\varepsilon$ 2 方程式乱流モデルはその扱い易さと高精度数値解が容易に得られることから現在最も多用されている。同様に、熱移動を伴う流れ場の解析では、温度乱れ強さ $k_t = \overline{t'^2}/2$ とその散逸率 ε_t を用いる温度場2方程式モデル ($k_t-\varepsilon_t$ モデル) は、速度場と温度場の非相似性の強い場の伝熱の諸問題を解くことができることから技術計算で最近よく用いられるようになってきている。この $k_t-\varepsilon_t$ モデルは、Nagano-Kim⁽¹⁾ により最初に提案されて以来、現在までに様々な改良が重ねられており^{(2)~(6)}、自由乱流から壁乱流まで、あるいは熱的境界条件が変化する温度場の予測など多方面にその威力を発揮している。ところで、過去に提案された $k_t-\varepsilon_t$ モデルは、主に実験データを基に構築されていたため、平均温度と乱流熱流束以外の乱流諸量の定量的な予測にはまだ不備が残っていた。しかし、乱流の直接数値シミュレーション (DNS) 技術の急速な発展により、実験からは得難い乱流諸量を精

度よく求めることが可能となり、モデル構築の新たな展開の道が開いた。

現在までに提案されているほとんどの $k_t-\varepsilon_t$ モデルは、壁乱流を扱う場合、モデル関数中の壁面からの距離を粘性長さ ν/u_τ で無次元化した $y^+ = u_\tau y/\nu$ (または $x_2^+ = u_\tau x_2/\nu$) で表していた。しかし、粘性長さ ν/u_τ は、例えばはく離・再付着点で無限大の値を持つ ($u_\tau = 0$ のため) ことが知られており、結果として $k_t-\varepsilon_t$ モデルの適用範囲が限定されている。そこで、このような問題点を克服する方法として注目されるのが、安倍ら⁽⁶⁾ が最近提案したモデルである。このモデルは、粘性長さ ν/u_τ の代わりに最小渦 (散逸渦) のサイズを規定する Kolmogorov スケール $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ で無次元化したパラメータ $x_2^* = x_2/\eta$ を採用し、はく離・再付着流の高精度な予測を行うことに成功している。

本研究では、種々のプラントル数流体の乱流熱輸送に関する DNS データベースから得られる知見を基に、新たな温度場2方程式モデルの構築を行う。乱流輸送現象をモデル化する際に必要となる乱れの代表長さとしては、乱流エネルギー保有渦スケール、エネルギー散逸渦スケールに加えて温度場においては温度乱れの分

* 原稿受付 平成6年7月20日。

*¹ 正員, 名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

散に寄与するスケールと温度乱れの消滅に寄与するスケールがある。また、温度乱れの消滅を支配するスケールとエネルギー散逸渦スケールの大小関係が流体の分子プラントル数 Pr によって変化することもよく知られている⁽⁵⁾⁽⁷⁾。従って、本モデルの構築においては、単に粘性長さスケール ν/u_τ を排除するだけでなく、種々のプラントル数における乱流伝熱が解析できるように、上述の各種スケールの効果を合理的にモデルに組込むことを試みた。

2. 記号

- $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$: $k-\epsilon$ モデルのモデル定数
 C_λ, C_t : α_t 及び k_t -方程式のモデル定数
 $CP_1, CP_2, CD_1, CD_2, CD_3$: $\tilde{\epsilon}_t$ -方程式のモデル定数
 C_m, C_η, C_τ : 調和平均の重み定数
 d : 円管直径
 D_t : k_t -方程式の分子拡散項
 $f_\mu, f_{w1}, f_{w2}, f_t$: $k-\tilde{\epsilon}$ モデルのモデル関数
 f_λ, f_h, f_{wt} : α_t 及び k_t -方程式のモデル関数
 $f_{P1}, f_{P2}, f_{D1}, f_{D2}, f_{D3}$: $\tilde{\epsilon}_t$ -方程式のモデル関数
 k : 乱流エネルギー $= \overline{u_i u_i}/2$
 k_t : 温度乱れ強さ $= \overline{t^2}/2$
 Nu : ヌセルト数
 $\bar{P}$: 平均圧力
 P_k : k -方程式の生成項 $= -\overline{u_i u_j} \overline{U_{ij}}$
 Pr, Pr_t : 分子及び乱流プラントル数 $= \nu/\alpha, \nu_t/\alpha_t$
 P_t : k_t -方程式の生成項 $= -\overline{u_j t} \overline{T_{,j}}$
 R : 時間スケール比 $= \tau_t/\tau_u$
 Re_d, Re : レイノルズ数 $= \overline{U}_m d/\nu, 2\overline{U}_m \delta/\nu$
 Re_τ : レイノルズ数 $= u_\tau \delta/\nu$
 $R_t, \tilde{R}_t$: 乱流レイノルズ数 $= k^2/(\nu\epsilon), k^2/(\nu\tilde{\epsilon})$
 Re, Re_t : 壁面垂直方向の無次元距離 $= x_2/\tilde{\eta}, x_2/\tilde{\eta}_m$
 $\bar{T}, t$: 平均温度及び変動温度
 T_t : k_t -方程式の乱流拡散項
 $\overline{U}_i, u_i$: x_i 方向の平均速度及び変動速度
 $\overline{U}_m, u_\tau$: 断面平均速度及び壁面摩擦速度
 α, α_t : 温度伝導率及び熱の渦拡散係数
 δ, δ_{ij} : チャネル半幅及びクロネッカのデルタ
 ϵ, ϵ_t : k 及び k_t の散逸率 $= \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}, \alpha_t \overline{t_{,j} t_{,j}}$
 $\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_t$: k 及び k_t の擬散逸率
 η, η_t : 速度場及び温度場の散逸スケール
 λ, λ_t : 速度場及び温度場の Taylor マイクロスケール
 ν, ν_t : 動粘性係数及び渦粘性係数
 Π_k, Π_ϵ : k -及び $\tilde{\epsilon}$ -方程式の圧力拡散項
 $\sigma_k, \sigma_\epsilon, \sigma_h, \sigma_\phi$: 乱流拡散係数に関するモデル定数

- $\tau_m, \tau_{\eta m}$: エネルギー保有渦及び散逸渦の混合時間スケール
 τ_U, τ_T : 乱れの生成に寄与する時間スケール
 τ_u, τ_t : エネルギー保有渦の時間スケール
 $\tau_{\eta u}, \tau_{\eta t}$: 散逸渦の時間スケール
 $\overline{(\quad)}$: 時間平均値
 $(\quad)^+$: 内層のパラメータによる無次元量
 $(\tilde{\quad})$: $\tilde{\epsilon}$ を含む無次元量
 添字
 $f_{,i}$: 変数 f の x_i による微分
 $(f_{,i} = \partial f / \partial x_i, f_{,ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \text{ など})$
 w : 壁面上の値
 2 : 壁面垂直方向

3. $k-\tilde{\epsilon}$ モデル

温度場2方程式モデルの構築の前に、本研究で用いる速度場2方程式モデル($k-\tilde{\epsilon}$ モデル)を以下に示す。

連続の式

$$\overline{U_{i,i}} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式

$$\frac{D\overline{U}_i}{D\tau} = -\frac{1}{\rho} \overline{P_{,i}} + \nu \overline{U_{i,jj}} - (\overline{u_i u_j})_{,j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

レイノルズ応力及び渦粘性の定義式

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t (\overline{U_{i,j}} + \overline{U_{j,i}}) - 2\delta_{ij} k/3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \tilde{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$f_\mu = (1 - f_{w2}) \left\{ 1 + \frac{80}{\tilde{R}_t} \exp \left[- \left(\frac{\tilde{R}_t}{40} \right)^{3/4} \right] \right\} \quad \dots\dots (5)$$

k -方程式モデル

$$\frac{Dk}{D\tau} = \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right]_{,j} + P_k - \epsilon + \Pi_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_k = \max \left\{ \left[\nu k_{,j} - (f_{w1} \epsilon \bar{\lambda} e_j) \right]_{,j}, 0 \right\} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (6)$$

$\tilde{\epsilon}$ -方程式モデル

$$\frac{D\tilde{\epsilon}}{D\tau} = \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \tilde{\epsilon}_{,j} \right]_{,j} + C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_k - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} + f_{w2} \nu \nu_t (\overline{U_{i,jk}})^2 + \Pi_\epsilon \\ \Pi_\epsilon = - \max \left\{ \nu \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{k} k_{,j} \right)_{,j}, 0 \right\} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、式(2)、(6)、(7)中の $D/D\tau$ は実質微分を表し、式(6)、(7)中の $P_k = -\overline{u_i u_j} \overline{U_{i,j}}$ は乱流エネルギーの生成項を表す。 Π_k 及び Π_ϵ は k と $\tilde{\epsilon}$ の圧力拡散項であり、式(6)の右辺最終項にある $\bar{\lambda} = \sqrt{2k}(\sqrt{\nu/\epsilon} + \sqrt{\nu/\epsilon_w})/2$ は平均 Taylor マイクロスケールを表している。また、式(6)中の散逸率 ϵ と式(7)から得られる“等方的”擬散逸率 $\tilde{\epsilon}$ は、次式の関係を持つ⁽⁸⁾。

表1 k - ε モデルのモデル定数とモデル関数

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	f_{w1}	f_{w2}	f_t	f_1	f_2
0.09	$1.2/f_t$	$1.3/f_t$	1.45	1.9	$\exp\left(-\frac{\tilde{R}_t}{90}\right)$	$\exp(-1.9 \times 10^{-3} R_\varepsilon^2)$	$1 + 3 \exp\left(-\frac{\tilde{R}_t}{100}\right)$	1.0	$1 - 0.3 \exp\left[-\left(\frac{\tilde{R}_t}{6.5}\right)^2\right]$

$$[\tilde{R}_t = k^2/(\nu\tilde{\varepsilon}), \quad R_\varepsilon = x_2/(\nu^3/\tilde{\varepsilon})^{1/4}]$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon - 2\nu(\sqrt{k_{j,2}})^2 : \sqrt{k_{j,2}} \geq 0 \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon : \sqrt{k_{j,2}} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

なお、式(4)~(7)中のモデル定数とモデル関数は、表1にまとめて示す[上記モデルの物理的な意味は、文献(9)に詳述した]。

4. 温度場2方程式モデルの構築

温度場(強制対流伝熱)を解析するときに必要な基礎式は、次式のように表される⁽¹⁾。

$$\frac{DT}{D\tau} = \alpha \bar{T}_{,jj} - (\overline{u_j t})_{,j} \dots\dots\dots (9)$$

$$-\overline{u_j t} = \alpha_t \bar{T}_{,j} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 α_t は熱の渦拡散係数である。温度場2方程式モデルでは、 α_t は温度乱れ強さ k_t とその散逸率 ε_t 及び k , ε を通して表現される。

4.1 熱の渦拡散係数 α_t のモデル化 熱の渦拡散係数 α_t は、速度場と温度場のエネルギー保有渦の時間スケール $\tau_u = k/\varepsilon$, $\tau_t = k_t/\varepsilon_t$, または時間スケール比 $R = \tau_t/\tau_u$ を用いて次式のように表現される⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda (k^2/\varepsilon) f(R) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 C_λ , f_λ はモデル定数とモデル関数である。 α_t のモデル化で重要なことは、複数の場(本研究では、速度場と温度場)が同時に存在する状態において、適切な代表スケール(時間スケール、長さスケール)をいかに選択するかということである(当然、単一場中の大小異なる渦に対するスケールの適切な選択も重要である)。過去のモデルでは、単一場の大きな渦のスケールからの寄与のみ(例えば、乱流プラントル数の仮定)、あるいは、複数の場の大渦のスケールからの寄与のみ(例えば、Nagano-Kim モデル⁽¹⁾の混合時間スケール $\tau_m = \sqrt{\tau_u \tau_t}$)を通してモデルの構築がされていた。前者の場合、運動量と熱輸送の非相似性の強い場で破綻を来すことは、周知の事実である。また、後者の場合、種々の流れ場の熱移動の予測は可能となるが、壁のごく近くまで大渦のスケールを適用するため、壁近くでの乱流諸量の予測精度の低下が生じる。最近、上記の問題点を克服できる有効なモデルが、安倍ら⁽⁶⁾によって提案された。このモデルは、速度場と温度場のエネルギー保有渦の時間スケールに対し $\tau_m = \tau_u R/(C_m + R)$ [すなわち、 $\tau_m = (1/\tau_u + C_m/\tau_t)^{-1}$] なる重み付き調和平均

型混合時間スケール τ_m を導入して速度場と温度場における大渦の寄与に明確な物理的意味を持たせ、更に散逸渦の時間スケールも同時に考慮するもので、以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{2R}{R + C_m} + \frac{\sqrt{2R}}{Pr} \frac{3}{R_t^{3/4}} f_d \right) \\ f_\lambda &= \{1 - \exp(-x_2^*/14)\} \{1 - \exp(-\sqrt{Pr} x_2^*/14)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)は、壁近くで $\alpha_t \propto \sqrt{k} \eta \sqrt{R/Pr} \propto \nu_t \sqrt{R/Pr}$ となるため、壁近くの乱流構造を支配する散逸渦の挙動を捉えることができる。そこで本研究では、式(12)と同じ特徴を持つ次式を、 α_t のモデル化の基本形として採用する。

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{2R}{R + C_m} + \sqrt{\frac{2R}{Pr}} \frac{B_\lambda}{R_t} f_d \right) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 B_λ は散逸渦の影響の度合を表すモデル定数であり、 f_d は影響範囲を規定するためのモデル関数である。また、モデル関数 f_λ は、式(5)の f_μ 中の $(1 - f_{w2})$ との対応から、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} f_\lambda &= 1 - \exp(-A_\lambda R_{et}^m R_\varepsilon^{2-m}) \\ &= 1 - \exp(-A_\lambda^* R_\varepsilon^2) \\ A_\lambda^* &= A_\lambda (1 + C_\eta \sqrt{Pr})^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 A_λ は任意の定数を表す。式(14)中に現れる無次元パラメータ R_{et} は、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} R_{et} &= x_2/\tilde{\eta}_m \\ \tilde{\eta}_m &= (1/\tilde{\eta} + C_\eta/\tilde{\eta}_t)^{-1} \\ &= \tilde{\eta}/(1 + C_\eta \sqrt{Pr}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\tilde{\eta} = (\nu^3/\tilde{\varepsilon})^{1/4}$ は Kolmogorov スケール、 $\tilde{\eta}_t = (\alpha^2 \nu/\tilde{\varepsilon})^{1/4} = \tilde{\eta} Pr^{-1/2}$ は Batchelor スケール⁽¹⁰⁾を表している。重み付き調和平均を表す式(15)は、低 Pr 数では Kolmogorov スケールが、高 Pr 数では Batchelor スケールが散逸渦(最小渦)を支配する長さスケールとなることを意味する^{*2}。

式(14)中の R_{et} と R_ε に対する指数の和が2となることは、 α_t の壁面漸近挙動の関係⁽²⁾⁽⁶⁾から拘束される

^{*2}低 Pr 数流体の最小渦スケールとしては、Obukhov スケール⁽¹¹⁾ $\tilde{\eta}_0 = (\alpha^3/\tilde{\varepsilon})^{1/4} = \tilde{\eta} Pr^{-3/4}$ も考えられるが、 $\tilde{\eta}_0/\tilde{\eta} = Pr^{-3/4}$ の関係から常に低 Pr 数では Kolmogorov スケールが小さくなる。つまり、Kolmogorov スケールが場に存在する最小渦のスケールとなる。

ものである。指数 m 、定数 A_λ 及び重み定数 C_η については、式(14)中の $A_\lambda^* = A_\lambda(1 + C_\eta\sqrt{Pr})^m$ が異なる3種類のプラントル数(例えば $Pr = 0.1, 0.71, 2.0$)における k_t の最大値(計算値)がDNS値と一致する要請から一義的に定まり、その A_λ^* の値から代数的に、 $m = 1/4$ 、 $C = 6.5 \times 10^{-4}$ 、 $C_\eta = 2$ と定まる。

式(13)の右辺の括弧内の第1項目にある C_m は、速度場と温度場のエネルギー保有渦の時間スケール τ_u 、 τ_t の中で、短い時間スケールを選択する際に必要となる重み定数である。速度場が一様等方性の高 Pr 数流体($Pr > 1$)では、乱流レイノルズ数 Re が大きい領域で時間スケール比 $R > 1$ が確認されており⁽¹²⁾、壁乱流では壁面で $R = Pr$ が厳密に成り立つ(壁温変動がない場合)ことから、 $Pr > 1$ の場合には壁からかなり離れた領域まで $R > 1$ (すなわち $\tau_u < \tau_t$) が成り立つものと推察される。従って、高 Pr 数流体のエネルギー保有渦の代表時間スケールとしては、 τ_u を選択することが妥当である。一方、低 Pr 数流体では、壁乱流、自由乱流問わず常に $R < 1$ がDNSから確認されているため、エネルギー保有渦の時間スケールとしては、 τ_t を選択するのが適切である。また、 $Pr \approx 1$ 付近の場合(例えば、空気)、 k 及び k_t のエネルギースペクトルを調べると、エネルギー保有渦の持つ波数は互いに隣接しているため、 τ_u 、 τ_t の両方の時間スケールの影響が現れるものと思われる。以上のことから、重み定数 C_m は Pr を介して変化させることが望ましく、上述の条件を満たすよう $C_m = 0.2/Pr^{1/4}$ とした。[なお、 C_m は対数領域のDNSから R と乱流プラントル数 $Pr_t = \nu_t/\alpha_t$ が既知であれば求まる。これについては文献(6)を参照願いたい。]

最後に、散逸渦の影響の度合を表すモデル定数 B_λ と影響範囲を規定するモデル関数 f_d について考える。モデル定数 B_λ は、式(15)の関数と壁温変動の有無に拘らず正しい壁面漸近挙動を得ること、また、散逸渦に対する速度場と温度場の時間スケールの比が $\sqrt{R/Pr}$ であること⁽²⁾⁽⁶⁾を考慮して、 $B_\lambda = 120/(1 + C_\eta\sqrt{Pr})^m = 120/(1 + 2\sqrt{Pr})^{1/4}$ とした。その結果、 α_t の壁近くでの挙動は、前述の安倍らのモデル⁽⁶⁾と同様、 $\alpha_t \propto \nu_t\sqrt{R/Pr}$ となる。モデル関数 f_d については、特に高 Pr 数流れ(温度乱れの散逸スケールが非常に小さくなる)の予測においてその影響が顕著となることから、前述の代表散逸渦のスケールにより規格化された無次元距離 R_{et} を用いて、 $f_d = \exp[-(R_{et}/35)^{3/4}]$ とした。

以上をまとめると、本研究で提案する α_t モデルは、以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\epsilon} \left\{ \frac{2R}{R + 0.2/Pr^{1/4}} + \sqrt{\frac{2R}{Pr}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{120}{(1 + 2\sqrt{Pr})^{1/4}} \frac{1}{R_t} \exp \left[- \left(\frac{R_{et}}{35} \right)^{3/4} \right] \right\} \\ f_\lambda &= 1 - \exp(-6.5 \times 10^{-4} R_{et}^{1/4} R_e^{7/4}) \\ R_{et} &= (1 + 2\sqrt{Pr}) R_e \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

4.2 k_t -方程式のモデル化 温度乱れ強さ k_t に対する輸送方程式は、次式のように記述される。

$$\frac{Dk_t}{Dt} = D_t + T_t + P_t - \epsilon_t \quad (17)$$

ここで、 $D_t = \alpha k_{t,jj}$ は分子拡散項、 $T_t = -(\overline{u_j t^2/2})_{,j}$ は乱流拡散項、 $P_t = -\overline{u_j t} \overline{T}_{,j}$ は生成項、 $\epsilon_t = \alpha \overline{t_{,j} t_{,j}}$ は散逸項をそれぞれ表す。式(17)でモデル化の必要な項は、乱流拡散項 T_t のみである。乱流拡散項に対するモデルとしては、こう配拡散型モデルが最も多用されている。しかし、こう配拡散型モデルのみでは壁近傍での k_t のDNSにより明らかにされた挙動を再現できないことが最近の研究で分かっている⁽¹³⁾。これは、こう配拡散型モデルを通して表現される乱流拡散が、厳密な乱流拡散に比べて高波数領域の渦運動に基づく拡散に依存しているため(このことは、こう配拡散型モデルが分子のオーダーの拡散と同型でモデル化されていることから容易に理解できる)、低波数渦の支配的な遷移層中での乱流拡散が過小評価されることが主な原因である。従って、低波数渦の運動を考慮した乱流拡散項モデルが重要となってくる。

本研究では、低波数渦の運動からの寄与は、Hattoriら⁽¹³⁾が提案した以下のようなモデルで再現する。

$$T_t = [(\alpha_t/\sigma_h) k_{t,j} + C_t(\sqrt{k} k_t f_{wt} e_j)]_{,j} \quad (18)$$

ここで、 e_j は単位ベクトル、 $\sigma_h = 1.8/f_h$ 、 $C_t = 0.05$ である。モデル関数 f_h 、 f_{wt} は次式で表される。

$$f_h = \left(\frac{R + C_m}{2R} \right) \left\{ 1 + \frac{2.5}{Pr} \exp \left[- \left(\frac{\tilde{R}_t}{150} \right)^{1/4} \right] \right\} \quad (19)$$

$$f_{wt} = (1 - f_{w1})^2 f_{w1}^{1/4} \quad (20)$$

モデル関数 f_h の右辺の括弧内(R の関数部)は、厳密な乱流拡散項の持つオーダー [$T_t \sim O(u' t^2/\ell)$ 、 ℓ : 積分スケール] と、こう配拡散型モデルで表現される乱流拡散項のオーダー [$(\alpha_t/\sigma_h) k_{t,j} \sim O(\alpha_t/\sigma_h \cdot t^2/\ell^2)$] を比較した結果、 $\alpha_t/\sigma_h \sim O(u'\ell) \sim \nu_t$ かつ $\alpha_t \sim \nu_t 2R/(R + C_m)$ よりその必要性が示唆されたために導入した。

以上をまとめると、本研究で提案する k_t -方程式モデルは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{Dk_t}{Dt} &= \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_h} \right) k_{t,j} + C_t(\sqrt{k} k_t f_{wt} e_j) \right]_{,j} \\ &\quad + P_t - \epsilon_t \end{aligned} \quad (21)$$

表2 $k_t\text{-}\tilde{\varepsilon}_t$ モデルのモデル定数とモデル関数

C_λ	C_m	σ_h	C_t	σ_ϕ	C_{P1}	C_{P2}	C_{D1}	C_{D2}^*	C_{D3}^*	C_τ	f_λ	
0.10	$0.2 / Pr^{1/4}$	$1.8 / f_h$	0.05	1.8	0.9	0.77	1.0	0.9	0.045	1.0	$1 - \exp(-6.5 \times 10^{-4} R_{e_t}^{1/4} R_e^{7/4})$	
f_h					f_{wt}		f_{P1}	f_{P2}	f_{D1}	f_{D2}^*		
$\left(\frac{R+C_m}{2R}\right) \left\{ 1 + \frac{2.5}{Pr} \exp \left[- \left(\frac{\tilde{R}_t}{150} \right)^{1/4} \right] \right\}$					$(1-f_{w1})^2 f_{w1}^{1/4}$		1.0	1.0	1.0	$\frac{1}{C_{D2}^*} (C_{e2} f_2 - 1) [1 - \exp(-R_e^2)]$		
											f_{D3}^*	
											$[R_{e_t} = (1 + 2\sqrt{Pr}) R_e]$	

4.3 $\tilde{\varepsilon}_t$ -方程式のモデル化 本研究では、温度乱れ強さの散逸率 ε_t については、 ε_t そのものではなく、次式で定義する“等方的” ε_t (以後 $\tilde{\varepsilon}_t$ で表す) を介して求める。これは、 ε を用いるのと同様、 $\tilde{\varepsilon}_t$ を用いる方が数値計算の安定性(収束性)が増すためである⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_t &= \varepsilon_t - 2\alpha(\sqrt{\Delta k_{t,j}})^2 : \sqrt{\Delta k_{t,j}} \geq 0 \\ \tilde{\varepsilon}_t &= \varepsilon_t : \sqrt{\Delta k_{t,j}} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

ここで、 $\Delta k_t = k_t - k_{tw}$ である。

$\tilde{\varepsilon}_t$ -方程式は、技術計算で現在最もよく用いられている Nagano-Kim モデル⁽¹⁾をベースにモデル化を行う。以下に、本研究で採用する $\tilde{\varepsilon}_t$ -方程式の基本形⁽¹⁾を示す。

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\varepsilon}_t}{D\tau} &= \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_\phi} \right) \tilde{\varepsilon}_{t,j} \right] + \tilde{\varepsilon}_t \left(C_{P1} f_{P1} \frac{P_t}{k_t} + C_{P2} f_{P2} \frac{P_k}{k} \right) \\ &\quad - \tilde{\varepsilon}_t \left(C_{D1} f_{D1} \frac{\varepsilon_t}{k_t} + C_{D2} f_{D2} \frac{\varepsilon}{k} \right) + (1-f_\lambda) \alpha \alpha_t (\bar{T}_{jk})^2 \\ &\quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

先に述べたように、本研究では、散逸渦の持つ特性を $k_t\text{-}\tilde{\varepsilon}_t$ モデルに反映させることを試みる。そこで、最初に式(23)を構成する各項の持つ時間スケールがどのように表されているのかを調べる。

輸送方程式は、輸送される物理量(ここでは $\tilde{\varepsilon}_t$) が様々なスケールの渦運動を通じてどのように変化するかを表すものである。そのために、これまでも温度乱れの散逸の輸送方程式中の Source 項と Sink 項は、 $\tilde{\varepsilon}_t \times (\text{時間スケール})^{-1}$ に比例する形でモデル化されている^{(1)~(6)}。そこで、渦運動を支配する時間スケールを基に輸送方程式中の各項を分類すると、以下の3種類の運動で主に構成されることが分かる。

- (i) 平均速度勾配や平均温度勾配に起因する比較的ゆっくりした運動(乱流諸量の生成に寄与)
- (ii) エネルギーを最も多く含む渦による比較的動きの速い運動
- (iii) 散逸渦による非常に動きの速い運動

最初に、(i) の運動を支配する時間スケールについて考える。平均速度こう配と平均温度こう配は、流体塊の変形作用を通じて乱れを生成する役割を担っている。つまり、輸送方程式中の生成項を支配する運動がこれである。この運動を記述する時間スケールとしては、例えばせん断速度パラメータ $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ [$S_{ij} = (\bar{U}_{ij} + \bar{U}_{ji})/2$]

で表現される $\tau_U = 1/S$ が考えられる。しかし、乱れの生成は、平均場と変動場の間でのエネルギーのやりとりが生成項 P_k と P_t を介して行われることで生じるため、乱れの生成の時間スケールとしては生成項 P_k と P_t を直接用いて表現するのが物理的にもより妥当であると思われる。つまり、(i) の運動を支配する時間スケールは次式のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_U &= \frac{1}{P_k/k} = \left(\frac{-\bar{u}_i \bar{u}_j}{k} \bar{U}_{ij} \right)^{-1} \\ \tau_T &= \frac{1}{P_t/k_t} = \left(\frac{-\bar{u}_j \bar{t}}{k_t} \bar{T}_{j,j} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式(24)は、明らかに、輸送方程式(23)中の生成項の時間スケールとして用いられている。

次に、(ii) の運動を支配する時間スケールについて考える。この運動の時間スケールは、 k または k_t のスペクトル分布が最大値を示す波数域の渦が持つ代表時間であり、一般に次式で表される。

$$\tau_u = k/\varepsilon, \quad \tau_t = k_t/\varepsilon_t \dots\dots\dots (25)$$

なお、(ii) の渦運動(エネルギー保有渦の運動)は、新たに乱れを生成することはほとんどなく、カスケード機構を通じて更に小さなスケールの渦にエネルギーを伝達するため、(ii) の運動は乱流諸量を減少(Sink)する方向に作用することが知られている。従って、式(23)の輸送方程式もそのようにモデル化がされている。

最後に、(iii) の運動について考える。平均場から供給されたエネルギーは、その大部分がエネルギー保有渦に集められ、渦の伸縮作用を通してより小さな渦(散逸渦)にエネルギーが供給される。この散逸渦は、エネルギー保有渦に比べて渦の回転が非常に速く、大きなせん断速度を有する。従って、散逸渦の持つ時間スケールは、エネルギー保有渦に比べてより短くなる。過去に提案されたほとんどのモデルでは、エネルギー保有渦の持つ時間スケールでこのような渦運動の時間スケールも表現していた。しかし、壁のごく近くではエネルギー保有渦よりも小さな渦が存在(散逸支配領域)すること、また、場の非相似性が強い場合($Pr \gg 1$ または $Pr \ll 1$)、一方の場の散逸渦ともう一方の場のエネルギー保有渦が同じオーダーになることが考えられるため、散逸渦の時間スケールの考慮はモデルの構築において重要である。

散逸渦を代表する時間スケールとしては、速度場に対しては次の Kolmogorov 時間スケールが一般に用いられる。

$$\tau_{\eta u} = \sqrt{\nu/\varepsilon} \dots\dots\dots (26)$$

同様に、温度場の散逸渦時間スケールとして次式が定義できる。

$$\tau_{\eta t} = \sqrt{\alpha/\varepsilon_t} \cdot \sqrt{k_t/k} = \sqrt{R/Pr} \cdot \tau_{\eta u} \dots\dots\dots (27)$$

なお、Kolmogorov スケールと同様に微小渦の長さスケールとしてよく用いられる速度場と温度場の Taylor マイクロスケール $\lambda = \sqrt{\nu k/\varepsilon}$ 及び $\lambda_t = \sqrt{\alpha k_t/\varepsilon_t}$ は、 $\lambda = \sqrt{k} \tau_{\eta u}$ 、 $\lambda_t = \sqrt{k} \tau_{\eta t}$ のように式 (26)、(27) の散逸渦時間スケールと結びついている。

本研究では、速度場と温度場の両方の散逸渦の影響を表す時間スケールとして、より小さいスケールの方に重きが置かれる次の調和平均の混合時間スケール $\tau_{\eta m}$ を用いる。

$$\frac{1}{\tau_{\eta m}} = \frac{1}{\tau_{\eta u}} + \frac{C_\tau}{\tau_{\eta t}} = \frac{1}{\tau_{\eta u}} \left(1 + C_\tau \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \dots\dots (28)$$

ここで、 C_τ は重み定数である。ただし、式 (28) で表されるスケールの散逸は、次式のように ε_t -方程式 (23) の消滅項 $C_{D2} f_{D2} \varepsilon_t/k$ に含めてモデル化する。(この方法は、式 (23) のモデル形をそのまま利用できるため、既存の数値解析コードを変更することなく予測性能の向上を計ることを可能にする。)

$$C_{D2} f_{D2} = C_{D2}^* f_{D2}^* \left[1 + C_{D3}^* f_{D3}^* \sqrt{R_t} \left(1 + C_\tau \sqrt{\frac{Pr}{R}} \right) \right] \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $C_{D2}^* = 0.9$ (標準値)^{(1)~(6)}、 $C_{D3}^* = 0.045$ 、 $C_\tau = 1.0$ 、 $f_{D3}^* = f_{w1}$ とした。なお、 f_{D2}^* は、自由乱流の漸近挙動の再現を考慮すると、次式のように拘束される [文献 (2) 参照]。

$$f_{D2}^* = \frac{1}{C_{D2}^*} (C_{e2} f_2 - 1) [1 - \exp(-R_e^2)] \dots\dots (30)$$

ここで、式 (30) の右辺最終項にある減衰関数は、壁面漸近挙動 $\varepsilon_t \propto x_2^2$ を再現するには式 (23) 中の分子拡散項 $\alpha \varepsilon_{t,22}$ と散逸項 $C_{D1} f_{D1} \varepsilon_t/k_t$ の壁面上での釣合を保証しなくてはならず⁽¹⁴⁾、そのためにもう一方の散逸項 $C_{D2} f_{D2} \varepsilon_t/k$ は高次の漸近挙動を持たなくてはならないことから導入した。以上で得られた k_t - ε_t モデルのモデル定数とモデル関数を表 2 にまとめて示した。モデル定数の大部分は、既存モデル^{(1)~(6)(13)} と基本的に同じである。

5. 数値解法

本研究では、まず、乱流諸量が DNS より定量的に

求められている二次元のチャンネル流 (内部発熱のある場合⁽¹⁵⁾ 及び壁面熱流束一定の場合⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾) に本モデルを適用し、モデルの有効性を確認する。次に、乱流プラントル数 Pr_t についての考察と任意の Pr 数における熱伝達率 (すなわちヌセルト数 Nu) の変化を調べるために、円管内流れの解析を行って実験結果と比較する。

本研究で用いる数値解法及び格子設定については、Hattori ら⁽⁴⁾ と同じである。ただし、格子点数は、低 Pr 数の計算では 201 点とし、高 Pr 数の計算では、壁のごく近くで温度場が発達することから更に細かい格子点が必要であることを考慮して、1001 点とした⁽⁵⁾。

6. 結果及び考察

6.1 内部発熱を伴うチャンネル乱流 図 1~3 は、内部発熱を伴うチャンネル乱流の計算結果を Kim-Moin の DNS⁽¹⁵⁾ ($Re_\tau = 180$) と比較して表したものである。計算値は、3 種類の Pr 数に対し、平均温度分布 $\bar{T}^+$ 、乱流熱流束 $-u_2^+ t^+$ 、温度乱れ強さ $\sqrt{k_t^+}$ 共に DNS によく一致しており、本モデルによる乱流諸量の予測精度の高さが示されている。

6.2 壁面熱流束一定のチャンネル乱流 次に、壁面熱流束が一定のチャンネル乱流の場合について見てみる。比較には、Kasagi らの空気流の DNS⁽¹⁶⁾ ($Re_\tau = 150$ 、

図1 平均温度分布 (内部発熱あり)

図2 乱流熱流束分布 (内部発熱あり)

図3 温度乱れ強さ分布 (内部発熱あり)

図4 平均温度分布 (壁面熱流束一定)

図5 乱流熱流束分布 (壁面熱流束一定)

図6 散逸率 \$\epsilon_t\$ の分布 (壁面熱流束一定)

図7 高 \$Pr\$ 数流体の平均温度分布

$Pr = 0.71$) と Kasagi-Ohtsubo の液体金属流の DNS⁽¹⁷⁾ ($Re_\tau = 150$, $Pr = 0.025$) を用いた。平均温度分布を見ると (図4), 本モデルは低 Pr 数流体の予測にも有効であることが窺える。また, 乱流熱流束の分布も (図5), 液体金属で最大値が若干小さくなっているが, 全体としてはプラントル数によらず DNS とよく一致している。図6は, 散逸率 ϵ_t の分布を表す。本モデルは, 遷移層中で若干の過剰予測傾向を示すものの, 壁面での値は DNS に比較的よく一致する。これは, $\epsilon_t \propto x_2^+$ の壁面漸近挙動が正しく再現されるためである^{*3}。

6.3 高プラントル数流体の解析 図7は, チャンネル流れに対する $Pr = 95$ のテクニカルオイルの予測結果を表す。図から明らかなように, 高 Pr 数流体では, $x_2^+ < 10$ の壁のごく近傍で温度分布は大きく変化する。本モデルの予測値は, 実験結果に比べて温度分布の変化の仕方が若干弱い, チャンネル中心での予測結果と実験値との一致から, 壁面摩擦温度 t_f あるいは壁面での温度勾配の予測が十分高い精度で得られていることが知れる。このことは, 次に示す熱伝達率の計算を行う上で, 特に重要なことである。

6.4 熱 (及び物質) 伝達率の予測 任意の Pr 数 (またはシュミット数 Sc) に対する円管内乱流熱伝達率 Nu [または物質伝達率 (シャーウッド数 Sh)] の予測結果を, 図8に示す。本モデルから得られる値は, 低 Pr 数から高 Pr 数まで, 実験値及び実験式にかなりよく一致するのが分かる。これは, 本モデルが比較的広範囲の Pr 数 (または Sc 数) 流体に対し適用可能であることを示すものである。

6.5 乱流プラントル数 チャンネル流れに対する乱流プラントル数 Pr_t の計算結果を, 図9, 10に示す。モデルから得られる Pr_t は, モデル化した ν_t と α_t の妥当性を知る重要な要素である。空気流の場合, 本モデ

^{*3}最近, Hattori ら⁽¹³⁾は空気流の ϵ_t については, DNS とほぼ完璧に一致する解が得られる ϵ_t -方程式を提案している。ただし, Pr 数効果等については, まだ組み込まれていない。

ルとDNSは、よく一致する傾向を示す。一般に低 Pr 数流体の持つ Pr_t の挙動は、遷移層よりも外側の領域で Pr 数の減少に伴い Pr_t が増加することが確認されている⁽¹⁸⁾。本モデルから予測された Pr_t の挙動は、この傾向をよく表している。一方、高 Pr 数の場合(図10)、比較に用いる実験及びDNSデータがないため定量的な比較はできないが、最近の Kays⁽¹⁹⁾の Pr_t に対する考察によると、高 Pr 数流体は壁近く ($x_2^+ < 10$) で Pr_t の増大が必要であることを示している。このことから、本モデルの高 Pr 数における Pr_t の持つ傾向は、図7の $Pr = 95$ の予測結果の妥当性も考慮すると、正

しい方向にあると言える。

7. 結 言

本研究では、DNS データベースを基に、新たな温度場2方程式モデル(k_t - ε_t モデル)の構築を行った。提案した k_t - ε_t モデルは、温度場の散逸渦のスケールを考慮することにより、モデルの普遍性を高めている。更に、エネルギー保有渦とより小さな散逸渦のスケールを考慮することで、壁近くの乱流諸量の予測値の挙動を改善し、また、種々の Pr 数流体 ($0.01 < Pr < 10^4$) に対する熱伝達率の予測を十分満足のいく精度で行うことができた。

本研究の一部は、文部省科学研究費補助金重点領域研究(1)(No.05240103)の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Nagano, Y. and Kim, C., *Trans ASME, J. Heat Transf.*, **110**, (1988), 583-589.
- (2) Youssef, M. S., Nagano, Y. and Tagawa, M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**, (1992), 3095-3104.
- (3) Sommer, T. P., So, R. M. C. and Lai, Y. G., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**, (1992), 3375-3387.
- (4) Hattori, H., Nagano, Y. and Tagawa, M., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, (eds., W. Rodi and F. Martelli), (1993), 43-52, Elsevier.
- (5) Sato, H., Shimada, M. and Nagano, Y., *Proc. 10th International Heat Transfer Conference*, Brighton, **2**, (1994), 443-448.
- (6) 安倍・長野・近藤, 機論, **60**-573, (1994), 1743-1750.
- (7) Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd ed., (1976), 342-347, Cambridge University Press.
- (8) Rodi, W. and Mansour, N. N., *J. Fluid Mech.*, **250**, (1993), 509-529.
- (9) 島田・長野, 第7回数値流体力学シンポジウム, (1993), 307-310.
- (10) Batchelor, G. K., *J. Fluid Mech.*, **5**, (1959), 113-133.
- (11) Obukhov, A. M., *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Geogr. and Geophys. Ser.*, **13**, (1949), 58.
- (12) 飯田・笠木, 機論, **59**-567, B(1993), 3359-3364.
- (13) Hattori, H. and Nagano, Y., *Proc. 4th ASME/JSME Thermal Engineering Joint Conf.*, Hawaii, (1995), to appear.
- (14) 河村・羽田, 第29回日本伝熱シンポジウム講義集, (1992), 380-382.
- (15) Kim, J. and Moin, P., *Turbulent Shear Flows 6* (ed. F. Durst et al.), (1989), 85-96, Springer-Verlag.
- (16) Kasagi, N., Tomita, Y. and Kuroda, A., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **114**, (1992), 598-606.
- (17) Kasagi, N. and Ohtsubo, Y., *Turbulent Shear Flows 8* (ed. F. Durst et al.), (1992), 97-119, Springer-Verlag.
- (18) Reynolds, A. J., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **18**, (1975), 1055-1069.
- (19) Kays, W. M., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **116**, (1994), 284-295.

図8 任意の Pr に対する Nu の分布(円管内乱流)

図9 乱流プラントル数(低 Pr の場合)

図10 乱流プラントル数(高 Pr の場合)