特異値分解を用いた放射伝熱負荷逆問題の解法*

工藤 一彦*, 黒田 明慈*¹, Arm EID*²
斉藤 龍彦*², 小熊 正人*³

Solution of the Inverse Radiative Load Problem Using the Singular Value Decomposition Technique

Kazuhiko KUDO, Akiyoshi KURODA, Arm EID,
Tatsuhiko SAITO and Masahito OGUMA

A method is developed to solve inverse radiative load problems within multi-dimensional systems with arbitrary shapes. The energy equations for each gas and wall element are expressed in a matrix form, and the inverse matrix is obtained by the singular value decomposition method to estimate the temperature and heat load distributions within the gas region from the profiles of the heat flux and the temperature of the wall elements. From these analyses, the method is shown to give stable results for the radiative inverse load problems when the condition number of the matrix is reduced to an appropriate lower value by setting some singular values to 0.

Key Words: Numerical Analysis, Thermal Radiation, Heat Transfer, Inverse Problem, Singular Value Decomposition, Monte Carlo Method

1. 緒 言

従来の放射伝熱問題の解析では、主として系内の発熱量分布および光学物性値分布を与えて、ガス中温度と壁面熱流束の分布を求めることが行われてきた。この種の問題は、原因となる量を与え、その結果となる量を求めることから順問題と呼ばれている。しかしながら、放射伝熱の解析を必要とする加熱炉、ボイラ等の機器における実際の設計あるいは運転の場では、被加熱物あるいは炉壁への熱流束条件やガス温度等の目標条件がまず与えられ、これを満足し、かつ(1)最小の燃料消費となる火炉内発熱量分布(バーナの配置および各バーナの負荷)、あるいは(2)最小の大きさとなる炉形状を求めることが要求される。また、火炉解析を行うためには、(3)炉内の光学物性値の分布を壁面熱流束等の測定しやすい量から推定することも必要となってくる。これらは前述の順問題の解法に必要な入力の中のいくつかが欠落している問題で、逆問

題と総称され、上述の各問題の番号に対応して、下記のように名称が付けられている⁽¹⁾⁽²⁾。

- (1) 負荷逆問題
- (2) 境界/領域逆問題
- (3) 物性値逆問題

これまで放射伝熱に関する逆問題は、主として(3)の系内の光学物性値を求める問題が試みられてきた⁽³⁾が、大部分は順問題を条件を変えて繰返し解くことで逆問題を解いており、逆問題を直接解くことは、求める定数を一つに絞ったような問題に限定されている⁽⁴⁾。また、上述の分類の(1)、(2)のカテゴリーの放射逆問題は、火炉の設計、運転に重要な問題であるが、これまでほとんど手がつけられていなかった。

本報は、これらのうちの(1)の負荷逆問題を対象として、多次元放射問題に流れによるエンタルピー輸送が重畳している非線形系での順問題と逆問題を行列を用いて定式化し、次にその解法を検討し、その妥当性を示したものである。本報では実際の解析では簡単のため、流れのない二次元の正方形の系を取扱ったが、本手法は容易に流れのある三次元任意形状系に拡張可能である。

本報で用いた手法は、まず対象系の順問題を1回モンテカルロ法で解き、この結果を用いて系内の各要素

* 原稿受付 平成6年9月28日。

*¹ 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。*² 北海道大学大学院。*³ 石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒235 横浜市磯子区中原町1)。

間の放射熱交換に関する線形の連立方程式を立て、これの係数行列の逆行列を求めることで、逆問題を解こうとするものである。しかしながら逆問題のつねとして、この問題でも不適切性⁽⁵⁾によって解が激しい振動を伴ったり、式の数より未知数が多かったりするため、通常の逆行列を求める手法は使用できない。そこで本報では、逆問題における解の相対誤差増加の原因である大きな条件数の低減に有効な特異値分解法^{(6)~(9)}を使用し、逆行列を求めることを試みた。

本報ではこの手法の妥当性検討のため、まず二次元の系内で発熱量分布を任意に与えて順問題として解いて壁面熱流束分布を求め、この壁面熱流束分布から本手法を用いて、逆に最初に与えた発熱量分布が求まることを確認した。次に本手法が放射伝熱系での最適化に適用できることを示す一例として、二次元系で壁面熱流束を一様にするのに必要な系内の発熱量分布を求め、その実用性を示した。

2. 記 号

C_p : ガスの定圧比熱 J/(kg・K)

G : ガスの質量流量 kg/s

K : ガスの吸収係数 m^{-1}

Rd : READ 値

Q_g : ガス中発熱密度 W/m³

Q_w : 壁面熱流束 W/m²

T : 温度 K

ΔS : 壁要素面積 m²

ΔV : ガス要素体積 m³

ϵ : 壁面放射率

σ : ステファン・ボルツマン定数 W/(K⁴・m²)

添 字

g : ガス要素

in: 流入

out: 流出

w : 壁

up: 上流側要素

3. 放射負荷逆問題の定式化

一般的に考えるために、流れによるエンタルピー輸送の重畳した系での放射伝熱を考える。系は射出・吸収・散乱性の灰色ガスと、これを囲む灰色体の固体壁で構成されているものとする。また系内に灰色の物体があってもかまわない。この系および系内の物体の形状は任意に与えることができる。以下これら固体壁と物体をまとめて壁と呼ぶことにする。また系内のガスおよび壁面の光学物性値は任意の分布が与えられる。

後述のサンプル計算は二次元系での結果を例示してあるが、本手法は三次元系にも問題なく適用可能である。系内のガスと壁をそれぞれ適当な大きさの解析要素に分割すると、これら各要素に対するエネルギー平衡を考えることにより、このような系でのガスと壁要素に対するエネルギー式をそれぞれ式(1)、(2)のように求めることができる。ここでガス要素の分割数を m 、壁要素の分割数を n とする。

$$\begin{aligned} & 4K_{gi}\sigma T_{gi}^4\Delta V_{gi} + C_{pi}G_{out,i}T_{gi} \\ &= \sum_{gj=1}^m Rd(g_j \rightarrow g_i)4K_{gj}\sigma T_{gj}^4\Delta V_{gj} \\ &+ \sum_{wj=1}^n Rd(w_j \rightarrow g_i)\epsilon_{wj}\sigma T_{wj}^4\Delta S_{wj} \\ &+ C_{pup,i}G_{in,i}T_{g,up,i} + Q_{gi}\Delta V_{gi} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_{wi}\sigma T_{wi}^4\Delta S_{wi} + Q_{wi}\Delta S_{wi} \\ &= \sum_{gj=1}^m Rd(g_j \rightarrow w_i)4K_{gj}\sigma T_{gj}^4\Delta V_{gj} \\ &+ \sum_{wj=1}^n Rd(w_j \rightarrow w_i)\epsilon_{wj}\sigma T_{wj}^4\Delta S_{wj} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで各式の左辺は各要素から出ていくエネルギー、右辺は入ってくるエネルギーを表す。式(1)左辺第1項はガス要素からの放射エネルギーの射出、第2項は流れに乗って持ち去られるエンタルピーを示す。右辺第1項は温度 T_{gj} のガス要素 g_j (自分自身の要素 g_i も含む)から射出された放射エネルギーのうち、ガス要素 g_i で吸収した分を表す。ここで $Rd(g_j \rightarrow g_i)$ は READ 値と呼ばれ、要素 g_j から射出された放射エネルギーのうち要素 g_i が吸収する割合を表す。この値は今回対象としているような射出・吸収・散乱性の灰色ガスと灰色体からなる三次元任意形状の分布定数系において、モンテカルロ法を用いて求めることができる⁽¹⁰⁾。式(1)右辺第2項は温度 T_{wj} の各壁要素から射出され、ガス要素 g_i に吸収された放射エネルギーの合計である。右辺第3項は、このガス要素に流入する流体に乗って運び込まれるエンタルピー、第4項はこのガス要素内での発熱である。式(2)の左辺第1項は、壁要素 w_i の射出放射エネルギー量を示す。第2項はこの壁要素への正味流入エネルギー量(平衡状態を考えているので、この壁から系外への除熱量に等しい)を示す。右辺第1項は全ガス要素からこの壁要素 w_i への放射伝熱量、第2項は壁要素 w_j (自分自身の要素 w_i も含む)からこの壁要素 w_i への放射伝熱量の合計を示す。これらの式はガス要素に関する式(1)が m 本、壁要素に関する式(2)が n 本成立する。ここで光学物性値 K_g 、 ϵ_{wg} の分布、系の形状と要素分割 ΔV 、 ΔS が与えられると READ 値 (Rd) は、前述のようにモンテカルロ法によって一意に定めることができ

る⁽¹⁰⁾。したがってこのほかに系内の G 、および C_p の分布が与えられると、式(1)、(2)内の未知変数はおのおの m 個の T_g 、 Q_g 、および n 個の T_w 、 Q_w の $2(m+n)$ 個となる。したがってこれらの未知変数のうち $(m+n)$ 個を入力としてその値を与えてやれば、未知変数と式の数が一致して、理論上は解を得ることができる。また入力条件が不足して未知変数の数が式の数を上回っている場合には、解に自由度が生じるが、この場合はガス中全発熱量最小あるいは最高温度最小等の制約条件をつけることにより、最適解を求めることが理論上は可能である。

従来の放射伝熱解析では、上に述べた系の形状、系内の物性値分布、質量流量分布のほかに、ガス中の発熱量分布 Q_g を m 個と、 n 個の壁面温度 T_w を与えることにより、 m 個のガス温度 T_g と n 個の壁面熱流束 Q_w を求めていた。また断熱壁等の熱流束の与えられた壁要素については、 T_w のかわりに Q_w を与えて T_w を求めていた。この従来の解析は、原因となる発熱源の発熱密度 Q_g とこれを受ける面の条件を定める T_w を与えて、結果となる T_g 、 Q_w を求めるということで、順問題のカテゴリーに入る。この問題は行列を用いることにより、式(1)、(2)より、下式のように定式化できる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad \text{..... (3)}$$

ここで A 、 B 、 C 、 D はそれぞれ $m \times m$ 、 $m \times n$ 、 $n \times m$ 、 $n \times n$ の行列である。また T_a 、 T_b 、 F 、 G はそれぞれ要素が m 、 n 、 m 、 n 個のベクトルである。これらの行列とベクトルの成分(各行列、ベクトル名の小文字で表す)はそれぞれ以下の式で表される。ただし j は列、 i は行を示す。

$$a_{ji} = \{1 - Rd(g_i \rightarrow g_i)\} 4K_{g,i} \sigma \Delta V_{g,i} \quad (i=j) \quad \text{..... (4)}$$

$$a_{ji} = -Rd(g_j \rightarrow g_i) 4K_{g,j} \sigma \Delta V_{g,j} \quad (i \neq j) \quad \text{..... (5)}$$

$$b_{ji} = -Rd(w_j \rightarrow g_i) \epsilon_{w,j} \sigma \Delta S_{w,j} \quad \text{..... (6)}$$

$$c_{ji} = -Rd(g_j \rightarrow w_i) 4K_{g,j} \sigma \Delta V_{g,j} \quad \text{..... (7)}$$

$$d_{ji} = \{1 - Rd(w_i \rightarrow w_i)\} \epsilon_{w,i} \sigma \Delta S_{w,i} \quad (i=j) \quad \text{..... (8)}$$

$$d_{ji} = -Rd(w_j \rightarrow w_i) \epsilon_{w,j} \sigma \Delta S_{w,j} \quad (i \neq j) \quad \text{..... (9)}$$

$$t_{a,i} = T_{g,i}^4 \quad \text{..... (10)}$$

$$t_{b,i} = T_{w,i}^4 \quad \text{..... (11)}$$

$$f_i = -C_{p,i} G_{out,i} T_{g,i} + C_{p,up,i} G_{in,i} T_{g,up,i} + Q_{g,i} \Delta V_{g,i} \quad \text{..... (12)}$$

$$g_i = -Q_{w,i} \Delta S_{w,i} \quad \text{..... (13)}$$

上述の順問題は、与えられた系の形状と物性値分布よりモンテカルロ法で Rd の値を求めることで、式(3)中の A 、 B 、 C 、 D の行列が定まり、壁温分布 T_w とガス中発熱量分布 Q_g を入力とし、 T_g の初期値を

仮定することで、 T_b 、 F のベクトルを定めることができる。これより A の逆行列 A^{-1} を用いることで、

$$(T_a) = (A)^{-1} \{-(B)(T_b) + (F)\} \quad \text{..... (14)}$$

のようにベクトル T_a が求まり、式(10)より T_g の新しい値を求めることができる。これを式(12)中の T_g に入れることで F を修正し、式(14)の演算を繰返すことで、ガス温度分布 T_g の値を求めることができる。これを

$$(G) = (C D) \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} \quad \text{..... (15)}$$

の T_a に入れてベクトル G を求めることにより、式(13)より壁面熱流束分布 Q_w を求めることができる。このような順問題の場合、 A の逆行列はLU分解法等普通の方法で容易に求めることができる。また流れのない場合[式(12)の $G_{out} = G_{in} = 0$]には、式(14)の右辺の F 中に T_g が含まれなくなるので、上述の T_g を収束させるための繰返し算は不用となり、式(14)を1回解くことで T_g を求めることができる。

これに対し前述の負荷逆問題は、結果である Q_w と条件 T_w を与え、原因である Q_g と T_g を求める問題である。通常ガス要素数 m のほうが壁要素数 n より大きいので、このままでは式の数より未知数の数が多くなり、そのままでは解けない。したがって系内で明らかに発熱していない、あるいはバーナが配置されていないガス要素の Q_g を零と置くことで未知数の数を減らし、未知数 T_g と Q_g の数の合計を、式の数 $(m+n)$ に等しくする。あるいは一部のバーナ火炎内の発熱量分布がわかっていれば、その値を与えてもよい。このようにすると、 $Q_{g,i}$ の値が与えられたガス要素に関する $(m-n)$ 個のエネルギー式と、 $Q_{g,i}$ が未知数であるガス要素に関する n 個のエネルギー式は、式(3)中の各行を入れ替えることで、前者を、

$$(A'' B'') \begin{bmatrix} T'_a \\ T''_a \\ T_b \end{bmatrix} = (F'') \quad \text{..... (16)}$$

後者を

$$(A' B') \begin{bmatrix} T'_a \\ T''_a \\ T_b \end{bmatrix} = (F') \quad \text{..... (17)}$$

とまとめると、 A' 、 B' 、 T'_a 、 F' がそれぞれ A 、 B 、 T_a 、 F の上半の n 行に、また A'' 、 B'' 、 T''_a 、 F'' が下半の $(m-n)$ 行にくるようにすることができ、式(3)は下式のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_a \\ T''_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' \\ F'' \\ G \end{bmatrix} \quad \text{..... (18)}$$

A' , B' , A'' , B'' はそれぞれ $n \times m$, $n \times n$, $(m-n) \times m$, $(m-n) \times n$ の行列であり, T_a , T_a'' , F' , F'' はそれぞれ要素数 n , $(m-n)$, n , $(m-n)$ のベクトルである。ここで, T_a , T_a'' , F' が未知数を含むベクトルである。また F'' は式(12)からわかるように, 未知数 T_g を含むが, 前述のように下記の繰返し算の途中の T_g の値を入れることにより, その値を求めることができる。式(18)において A'' と C からなる $m \times m$ の正方行列の逆行列を求めることができれば, これを用いて式(19)が得られ, その F'' に含まれる T_g に T_g の初期値を入れ, この式の演算を繰返し行って収束させることにより, 逆問題の解として T_g の値を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} T_a' \\ T_a'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' \\ C \end{bmatrix}^{-1} \left\{ - \begin{bmatrix} B'' \\ D \end{bmatrix} (T_b) + \begin{bmatrix} F' \\ G \end{bmatrix} \right\} \quad \cdots (19)$$

Q_g はこの T_g を T_a , T_a'' に入れることで,

$$(F') = (A'B') \begin{bmatrix} T_a' \\ T_a'' \\ T_b \end{bmatrix} \quad \cdots (20)$$

より求めることができる。

ここで問題となるのが, 式(19)中の A'' と C で構成される $m \times m$ の行列の逆行列である。結果から原因をもとめる逆問題のつねとして, 通常の方法でこの逆行列を求めて式(19)を解くと, その解はひどい振動解となる場合が多いことが知られている。そこで本報では, このような条件でも安定な解を求められる逆行列の解法として特異値分解法^{(6)~(9)}(概要は付録参照)を用い, その放射伝熱負荷逆問題に対する適用性を検討した。

4. 解析結果と検討

4.1 負荷逆問題解析 本節では順問題の結果を入力として逆問題を解き, その結果と順問題の入力を比較することで逆問題解法の妥当性を検討する。

図1のような $10m \times 10m$ の二次元の灰色ガス領域(吸収係数 0.1 m^{-1})の周囲を, 放射率 0.8, 温度 300 K

の灰色体の壁が囲んでいる系を考える。簡単のために流れはないものとし, ガスは放射平衡にあるものとする。要素分割は図1に示すようにガスを 10×10 の100要素に, また壁を一边10個ずつの40要素に分割し, ガス中のハッチングした3要素で $1 \times 10^5 \text{ W/m}^3$ の発熱密度で発熱し, 他の要素では発熱零とする。この条件下でモンテカルロ法により式(4)から式(9)中の R_d の値を求める。この際, 各要素から射出するエネルギー粒子数は10000個とした。これは順問題の解の誤差を2.5%以内におさめるのに必要な粒子数である。またこの程度の誤差を有する壁面熱流束の解を以下の逆問題の入力として用いても, 後述のように逆問題の解は非常に高い精度で求まることが示される。これを用いて式(14), (15)より求めた順問題の解である T_g と Q_w の分布を図2, 3に示す。図2は図1に示した系での10行10列のガス要素の温度分布である。また図3は, 図1の左上の頂点から右回りに付けた1から40の壁要素番号順に, 壁要素の熱流束を示したもので, 上の行から, 左から右に1~10, 11~20, 21~30, 31~40番の順で表示してある。

次にこれの逆問題を解くに当たり, 未知数の数をエネルギー式の数 $140 (= 100 + 40)$ に合わせるため, 40個の壁温 T_w と, 順問題で求められた図3の Q_w の解40個の合わせて80個のほかに, 図1中の0を付けた60個のガス要素の発熱密度 Q_g を零と置くことで, 未知数

図1 解析対象系

.5699E+03	.5955E+03	.6373E+03	.6624E+03	.6963E+03	.7195E+03	.6899E+03	.6306E+03	.5997E+03	.5727E+03
.5982E+03	.6239E+03	.6767E+03	.7276E+03	.7660E+03	.7899E+04	.7215E+03	.6744E+03	.6242E+03	.5900E+03
.5886E+03	.6284E+03	.7045E+03	.7489E+04	.7661E+03	.7762E+03	.7525E+03	.6827E+03	.6385E+03	.6034E+03
.5863E+03	.6134E+03	.6620E+03	.7106E+03	.7163E+03	.7485E+03	.7488E+04	.7124E+03	.6353E+03	.5961E+03
.5753E+03	.6032E+03	.6336E+03	.6557E+03	.6803E+03	.6905E+03	.7233E+03	.6744E+03	.6117E+03	.5824E+03
.5493E+03	.5764E+03	.6116E+03	.6231E+03	.6399E+03	.6335E+03	.6456E+03	.6286E+03	.6022E+03	.5762E+03
.5454E+03	.5632E+03	.5844E+03	.5986E+03	.6107E+03	.6072E+03	.5978E+03	.5827E+03	.5656E+03	.5413E+03
.5317E+03	.5323E+03	.5614E+03	.5647E+03	.5878E+03	.5842E+03	.5711E+03	.5541E+03	.5509E+03	.5321E+03
.5044E+03	.5308E+03	.5445E+03	.5515E+03	.5547E+03	.5572E+03	.5411E+03	.5434E+03	.5406E+03	.5129E+03
.5002E+03	.5087E+03	.5263E+03	.5150E+03	.5296E+03	.5224E+03	.5340E+03	.5172E+03	.5182E+03	.5087E+03

図2 順問題で求めたガス要素温度分布(単位: K)

.5797E+04	.7617E+04	.9974E+04	.1349E+05	.1614E+05	.1724E+05	.1439E+05	.1071E+05	.8139E+04	.5977E+04
.7194E+04	.8954E+04	.9638E+04	.9905E+04	.8771E+04	.7745E+04	.6305E+04	.5393E+04	.4457E+04	.3214E+04
.4021E+04	.5047E+04	.5504E+04	.5800E+04	.5941E+04	.5644E+04	.5817E+04	.5039E+04	.4514E+04	.3841E+04
.3365E+04	.3861E+04	.4871E+04	.5940E+04	.7003E+04	.7911E+04	.9136E+04	.9539E+04	.8745E+04	.7410E+04

図3 順問題で求めた壁要素熱流束分布(単位: W/m²)

.5698E+03	.5956E+03	.6373E+03	.6622E+03	.6955E+03	.7189E+03	.6891E+03	.6301E+03	.5993E+03	.5726E+03
.5982E+03	.6244E+03	.6759E+03	.7288E+03	.7669E+03	.7226E+03	.6753E+03	.6251E+03	.5897E+03	.5897E+03
.5883E+03	.6301E+03	.7022E+03	.7489E+04	.7667E+03	.7770E+03	.7527E+03	.6803E+03	.6396E+03	.6029E+03
.5861E+03	.6141E+03	.6623E+03	.7098E+03	.7165E+03	.7485E+03	.7485E+03	.7112E+03	.6363E+03	.5959E+03
.5752E+03	.6032E+03	.6336E+03	.6557E+03	.6803E+03	.6905E+03	.7233E+03	.6744E+03	.6117E+03	.5824E+03
.5493E+03	.5764E+03	.6116E+03	.6231E+03	.6398E+03	.6335E+03	.6456E+03	.6286E+03	.6022E+03	.5761E+03
.5454E+03	.5632E+03	.5844E+03	.5986E+03	.6107E+03	.6072E+03	.5978E+03	.5827E+03	.5656E+03	.5413E+03
.5170E+03	.5323E+03	.5614E+03	.5647E+03	.5878E+03	.5842E+03	.5712E+03	.5541E+03	.5509E+03	.5321E+03
.5044E+03	.5307E+03	.5445E+03	.5515E+03	.5547E+03	.5572E+03	.5411E+03	.5434E+03	.5407E+03	.5129E+03
.5002E+03	.5087E+03	.5263E+03	.5150E+03	.5296E+03	.5224E+03	.5340E+03	.5172E+03	.5182E+03	.5087E+03

図 4 逆問題で求めたガス要素温度分布(単位: K)

-.1157E+01	.1324E+01	.1999E+01	-.5828E+01	-.2499E+02	-.1741E+02	-.2131E+02	-.1147E+02	-.7611E+01	-.2100E+01
.1858E+00	.9902E+01	-.1922E+02	.4113E+02	.3375E+02	.1000E+06	.3501E+02	.2281E+02	.1981E+02	-.4376E+01
-.5232E+01	.3705E+02	-.7082E+02	.9997E+05	.2140E+02	.3060E+02	.6547E+01	-.6531E+02	.2533E+02	-.9931E+01
-.2797E+01	.1454E+02	.7575E+01	-.2663E+02	.7056E+01	.1472E+01	.1000E+06	-.3627E+02	.2237E+02	-.4160E+01
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

図 5 逆問題で求めたガス要素発熱密度分布(単位: W/m³)

の数を 100 個のガス要素温度 T_g と, 40 個のガス要素の発熱密度 Q_g の合計 140 個とすることができる。これらの値を与えられた変数と前述の R_d の値を用いることにより, 式(19), (20)より逆問題の解として, 図 4, 5 のように T_g と Q_g の分布を求めることができる。今回の問題では付録の式(21)で定義された条件数は 1221 とあまり大きくないので, 小さな特異値のいくつかを 0 と置いて行列のランクを下げなくても, 図 4 の T_g は図 2 の順問題の解とほぼ一致し, また図 5 の下線をつけた Q_g は図 1 でハッチングした 3 要素の位置でほぼ 1×10^6 W/m³, その他の要素でほぼ 0 となり, 壁面の温度と熱流束分布からガス中の温度分布と発熱密度分布を推定できることが示された。

ここで逆問題の入力変数として, 上記の解析では式の数と未知数の数を一致させるために 60 個のガス要素の Q_g の値を 0 と与えたが, この Q_g を与えるガス要素数を減らすと, 付録の最後に述べたように, 与えられた入力条件を満足する解の中でベクトル T_g^* のスペクトルノルム(この場合はベクトル T_g^* の二乗和)最小の解が得られるはずである。逆問題の入力として Q_g の値を k ($k < 60$) 個与えると, 方程式数が 140 に対して未知数の数が 100 個の T_g と $(100 - k)$ 個の Q_g の合計 $(200 - k)$ 個となる。このままだと式(19)右辺の逆行行列の元となる A' と C で構成される行列が $(40 + k)$ 行 100 列となつて, 正方行列とならないので, 付録の最後に述べるように, この下に $(60 - k)$ 行 100 列の 0 行列を付加して特異値分解法で逆行行列を求める。ここで Q_g を与えるガス要素数が k 個の場合, 逆行行列を求める対象となる 100×100 の行列は, 下 $(60 - k)$ 行が 0 行列であるのでその最大のランクは $(40 + k)$ である。したがって特異値分解で得られた 100 個の特異値のうち最大で $(40 + k)$ 個が零でない値となるはずであ

図 6 発熱密度逆算値分布に与える発熱密度を与えるガス要素数の影響

るが, 各種の誤差のために実際はこれ以上の特異値が零でない値をもつ。そこで本報では, この行列のランク数を越えた個数の特異値を零と置いて逆行行列を求めた。図 6 に, 逆問題において Q_g の値を与えるガス要素数 k を 60 個から 20 個と減少させたときの, 図 1 の系における上から 4 行めのガス要素の水平方向断面における発熱密度分布の解の比較を示す。これより入力として与える情報量の減少に従って, 次第に逆問題の解が振動的になることがわかる。したがってこのような場合には, できるだけガス要素中の情報を入力として与え, 未知数の数が方程式の数を大幅に上回らないようにする必要があることがわかる。

本解析にはパーソナルコンピュータ NEC PC-9821 Ap(i 486 DX 2, 66 MHz)と MS-FORTRAN Ver. 5 を使用し, 順問題を解くのに 7 min, 逆問題を解くのに 20 s かかった。

4.2 均一壁面熱流束問題解析 4.1 節の Q_g を与えるガス要素数が零の場合の解法を利用することにより, 任意の壁面熱流束と壁温の分布を与え, ベクトル T_g^* の二乗和が最小の条件下でこれを実現するに必要な発熱密度分布を求めることが可能となる。簡単な

図 7 壁面熱流束一様時のガス中発熱密度分布逆算値
(条件数=119)

図 8 壁面熱流束一様時のガス中発熱密度分布逆算値
(条件数=8)

ため、図 1 の系で $T_w=300\text{ K}$, $Q_w=1\times 10^4\text{ W/m}^2$ 一定(均一熱流束)の条件を与えて、未知数が方程式の数より多い逆問題を解いた例を以下に述べる。本節の問題は、4・1 節で $k=0$ の場合であるので、逆行列を求める対象となる 100×100 の行列は、下 60 行が 0 行列であり、その最大のランクは 40 である。したがって理論上は 40 個の非 0 の特異値をすべて使用して逆行列を求めればよいはずであるが、本節の逆問題ではこのようにすると、図 7 に示すガス中発熱密度分布の解析結果に示すように振動的な解となる。これに対し、条件数が 8 を超える小さい特異値を零として、上記の行列のランクを 36 に減少させると、図 8 に示すように比較的滑らかな解を得ることができる。この際必要なランク数は、物理的に妥当な解が得られるように、問題により変える必要がある。逆に、図 8 の Q_g の値を順問題の入力として壁面熱流束 Q_w の分布を求めると、 $\pm 1\%$ 以内で一様熱流束 $Q_w=1\times 10^4\text{ W/m}^2$ の条件を満たしていることが求められた。本解析は上記環境でやはり 20 s かかった。

5. 結 言

(1) 放射伝熱における順問題と負荷逆問題を行列を用いて定式化した。

(2) 壁面の熱流束と温度および一部のガス要素の発熱密度の分布が入力して与えられた負荷逆問題を、特異値分解法を用いて解くことで、これら入力条件を満たす系内のガス中発熱密度分布と温度分布を推定できることを示した。

(3) 壁面の熱流束と温度の分布のみを与え、これを満たす系内のガス中発熱密度と温度の分布を求める負荷逆問題において、条件数の大きい特異値を零と置くことで、安定な解が得られることを示した。

[付 録]

特異値分解法^{(6)~(9)}は、正方行列 K を

$$(K)=(U)(W)(V)^T \dots\dots\dots (21)$$

の形の三つの行列の積に分解するもので、 U , V は正規直交行列、 W は対角要素 w_i 以外は零の対角行列で、 w_i は行列 K^TK の固有値の非負の平方根からなっており、行列 K の特異値と呼ばれる。行列 K が式 (21) のように分解されると、その逆行列は U , V が正規直交であることを利用して、

$$(K)^{-1}=(V)(1/W)(U)^T \dots\dots\dots (22)$$

のように求められる。ここで、 $1/W$ は対角行列で、その対角線上の成分は、 $1/w_i$ からなっている。したがって、下式で定義される行列 K の条件数 $\text{cond}(K)$ が大きな値をとると、

$$\text{cond}(K)=\frac{w_{i,\max}}{w_{i,\min}} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) の $1/w_i$ の一部に非常に大きな値が入り、逆問題における入力および Rd の値のわずかな誤差が、逆問題の解の中で拡大され、大きく振動する解等、物理的に有意でない解が得られるようになる。放射伝熱問題においては、発熱源と受熱面が離れていると、発熱源における変化が受熱面に伝わりにくくなるため、条件数が大きくなる場合がしばしば生じ、逆問題の解が大きく振動する原因となる。したがって、条件数が大きくなる原因となっている $w_{i,\max}/w_i$ の値が大きい $1/w_i$ の項を、式 (22) においていくつか零と置いて逆行列を求めるべき行列のランクを下げると、上記のような逆問題における振動解の発生を防止できる。

また逆問題において、未知数の数を式の数と合せるために必要な数の入力条件の値を与えることができればよいが、それができない場合には、未知数の数が式

の数を上回り、逆行列を求めるべき行列が正方行列にならず、列数が行数を上回ることになる。このような場合には、行列の下部に 0 行列を補って正方行列として逆行列を求め、また入力変数ベクトルの要素数の不足分も 0 を補うことで、逆問題の解を得ることができ。この問題は、式の数より未知数の数が多いので解に自由度があるが、上記のような解法で得られる解は、解ベクトルのスペクトルノルムが最小となる解が一意的に求まる。逆問題の解の安定化のために、上記のように条件数が大きくなる原因となる特異値を 0 と置いて行列のランクを下げた場合も、未知数の数が式の数を上回ることになり、得られた解は同様にスペクトルノルム最小の解となる。

文 献

- (1) 久保, 逆問題, (1992), 5, 培風館.
- (2) 日本機械学会編, 逆問題のコンピュータアナリシス, (1991), 3, コロナ社.
- (3) Zabaras, N., ほか 2 名編, *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, (1993), 267, ASME.
- (4) Subramanian, S. and Mengüç, M. P., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 34-1 (1991), 253.
- (5) 文献(2)の 35 ページ.
- (6) 文献(1)の 37 ページ.
- (7) 文献(2)の 41 ページ.
- (8) 柳井・竹内, 射影行列一般行列特異値分解, (1983), 111, 東京大学出版会.
- (9) Press, W. H., ほか 3 名, *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd ed., (1992), 51, Cambridge Univ. Press.
- (10) 谷口・ほか 4 名, パソコン活用モンテカルロ法による放射伝熱解析, (1994), 103, コロナ社.