境界適合格子による単一上昇気泡の数値解析*

高木 周^{*1}, 松本 洋一郎^{*1}, 黄 華 雄^{*2}Numerical Analysis of a Single Rising Bubble
Using Boundary-Fitted Coordinate System

Shu TAKAGI, Yoichiro MATSUMOTO and Huaxiong HUANG

A numerical method is developed to simulate the unsteady axisymmetric flow with a free surface. The method is based on a finite-volume solution of the equations on an orthogonal curvilinear coordinate system. A new iteration technique is used for the boundary condition of the free surface to stabilize the solution. The method is applied to simulate an unsteady motion of a single deformed bubble rising through a quiescent liquid. The numerical results show quantitatively good agreement with those of experiments and calculations of others. In the present study, the transitional phenomena of the initially spherical bubble in reaching the steady state are investigated. It is known experimentally that the rising bubble begins to show an unsteady three-dimensional (spiral or zigzag) motion beyond certain critical Reynolds and Weber numbers. Our numerical results of the axisymmetric flow show unsteady shape oscillations in the parameter range of the three-dimensional motions.

Key Words: Bubble, Numerical Analysis, Free Surface Flow, Orthogonal Curvilinear Coordinate, Deformation, Unsteady Motion, Zigzag Motion

1. 結 言

境界形状の変化を伴う流れは、流体機械を始め、工学上重要となるさまざまな場所で見受けられる。これらの流れの数値解析を考えた場合、特に、自由界面を伴う流れは、解の一部として界面の形状が決定されるため、その扱いが困難となり、数値的にも不安定なものとなる。本研究では、このような自由界面を有する流れを安定かつ精度よく解く手法を開発し、液体中を上昇する単独気泡に関して非定常計算を行うことを目的としている。

液体中を上昇する変形気泡に関する研究は、古くから行われてきた⁽¹⁾。数値計算によるものの多くは、ポテンシャル流れの近似を用いており、境界積分法等によって上昇気泡の解析が行われている⁽²⁾。これは、自由界面をもつ気泡では、気泡表面での速度のスリップを許すため、変形が大きくなりえない限りは、ポテンシャル流れの解がよい近似になることによっている。しかし、上昇気泡の示す複雑な挙動、らせん運動やジグ

ザグ運動、非定常な軸対称運動等には、気泡後部のはく離域の存在が重要であると考えられ、それらの現象をシミュレートするには、ナビエ・ストークス(NS)方程式を直接解くことが本質的であると考えられる。

NS方程式を用いて、上昇気泡の変形を数値的に解いた代表的研究として、Ryskin-Leal⁽³⁾(以下R&L)がある。彼らは、直交曲線座標系において、渦度・流れ関数表示したNS方程式を用い、上昇気泡の定常解を求めた。この手法は、実験結果とよく一致する数値解を与えるが、定常解の計算に限られる。上昇気泡の非定常計算としては、他にUnverdi-Tryggvason⁽⁴⁾、富山ら⁽⁵⁾、西原ら⁽⁶⁾等がある。これらの手法は、計算格子として矩形の固定格子を用いているため、複数の気泡を含む系を計算するのに適する。しかし、気液界面が格子を横切って移動するため、計算セル内での界面の位置を何らかの方法で追跡し、さらに気液界面における境界条件を、計算格子点状に分配しなければならない。これらの操作は、補間による平滑化を伴い、気液界面での渦度の生成やはく離、表面張力に強くかわりのある気液界面の曲率を計算する精度を落とす。また、Unverdiら⁽⁴⁾、富山ら⁽⁵⁾の手法では、気相と液相の密度比が数十倍程度の場合までしか取扱えない。実

* 原稿受付 平成6年9月29日。

^{*1} 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。^{*2} Simon Fraser University (Burnaby B. C. Canada V5A 1S6)。

際に大気圧下で液体中に存在する気泡を考えた場合、気液間の密度比は1000倍程度であり、これらの手法を用いた際、非定常力の支配的な場での計算結果への密度比の影響については明らかでない。

本研究では、気液間密度比が十分大きい気泡の非定常挙動に関して、界面の曲率を精度よく評価するため、物体適合格子を用いた数値計算手法を開発し、計算結果の比較・検討を行った。

2. おもな記号

- ν : 動粘度
- σ : 表面張力
- μ : 粘性係数
- g : 重力の加速度
- d_e : 球相当径(同体積をもつ球形気泡の直径)
- ξ, η : 計算座標
- x : 物理座標(重力方向)
- r : 物理座標(半径方向)
- t : 物理空間での時間
- τ : 計算空間での時間
- p : 圧力
- p_0 : 気泡内部の圧力
- $\chi(\xi), \chi(\eta)$: 気液界面の主曲率
- u_ξ, u_η : 計算空間速度成分
- U, V : カートesian速度成分
- h_ξ, h_η : スケール因数
- 添字
- s : 気液界面での値
- $s-1$: 気液界面より1グリッド離れた点での値

3. 数値計算法

3.1 仮定 数値計算を行う際に、気相と液相に対して、以下のことを仮定した。

(1) 気液界面の表面張力は、一定とする。液体が純粋で、界面活性剤や、界面に付着する不純物が含まれていない場合である。不純物を含む液体中の気泡は、剛体球のように振る舞うことが実験的に報告されており、その場合には、界面で表面張力が一定でないだけでなく、接線応力0の条件も満たさない。

(2) 気液界面および流れ場を、軸対称とする。

(3) 液相は、非圧縮ニュートン流体とする。

(4) 液相の密度および粘性は、気相と比べ十分大きいとする。これは、界面での気相の動圧および粘性応力が、液相のものに対して無視し得ることを表している。常温・常圧で液体中に存在する気泡の多くがこの条件を満たす。

(5) 上昇する気泡の体積は、一定とする。現実の流れでは、重力の影響により鉛直方向に静圧の分布をもつため、上昇する気泡の体積は一定ではない。また、静止状態で存在している球形気泡に比べ、一定速度 U で上昇している球形気泡には、動圧の影響により全体として $\delta p = 1/4 \rho U^2$ の内部圧力の低下がある。しかし、これらの量は、大気圧下での気泡の体積変化を考えた場合、本計算の対象とする時間スケール(速度零で無限流体中に置かれた気泡が、終端速度に到達する程度の時間)では、大きな影響はない。

3.2 計算アルゴリズム

(1) 気泡に関して適当な初期条件を設定する。本計算では、球形気泡が速度零で無限流体中に放置されている状態を初期条件として与えた。

(2) 気泡界面が、計算格子の境界に一致するように直交格子を形成する。形成された格子と座標系の定義を図1に示す。

(3) 与えられた境界条件、形成された格子のもとで、直交曲線座標系で表記されたNS方程式をSIMPLER法を用いて解く。

(4) (3)で求めた界面の移動速度に従い、自由表面上の格子点をラグランジュ的に移動させる。

(5) (2)~(4)の操作を時間進行させ繰り返す。

3.3 格子形成法 本計算では、各時間ステップごとに気泡の形状に合せ、Duraiswamiら⁽⁷⁾の方法により、直交格子を形成する。物理空間上の点 (x, y) は、直交曲線座標系 (ξ, η) で、ラプラス方程式を満たすとすると、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$f = \frac{h_\eta}{h_\xi}, \quad h_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2},$$

$$h_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2}$$

図1 格子と座標系

このラプラス方程式を、境界で直交条件

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

を満たすように解き、直交格子を形成する。関数 f は、ひずみ関数と呼ばれ、次の関係を満たす⁽⁷⁾。

$$f = M \frac{A(\xi)}{B(\eta)}, \int_0^1 \frac{d\xi}{A(\xi)} = 1, \int_0^1 \frac{d\eta}{B(\eta)} = 1 \quad (4)$$

ここで、 M は、物理空間の等角モジュールであり、 $A(\xi)$ 、 $B(\eta)$ は、上の拘束条件を満たす任意の正値関数である。一般に境界適合格子を用いた場合、物体の形状および流れ場の特性に合わせて、格子密度の調節を行えるのが望ましいが、本手法では、この調節を関数 $A(\xi)$ 、 $B(\eta)$ によってこれを行う。本計算では、気泡近傍により多くの格子点を集めるために $A(\xi)$ 、 $B(\eta)$ として次の関数を用いている。

$$A(\xi) = 1.0, B(\eta) = \frac{2}{(3-2\eta)} \quad (5)$$

$A(\xi) = B(\eta) = 1.0$ としたときとの比較を図 2 に示す。

各時間ステップごとに行う格子の切り直しに際し重要になるのが、気液界面の決定方法である。ここでは、計算アルゴリズムの(4)で、格子点をラグランジェ的に移動させたあと、各点を通過するような三次スプラインを計算し、そのスプライン上で格子点を動かし、直交条件を満たすようにする。

3・4 支配方程式 速度と圧力を基礎変数とした曲線座標系による数値計算を考えた場合、用いる速度成分として、カーテシアン成分と、座標線の方向に関連づけて定義される反変・共変系の成分とが考えられる。通常、反変・共変系の成分を用いた場合、空間的に変化する基底の情報を伴うために、その表記が複雑となるという欠点をもつ。しかし、座標線に関連づけて速度成分が定義されるため、コントロールボリュームによる定式化に適し、また自由界面を境界にもつ流れや移動境界をもつ流れ等に対する境界条件の取扱いに適している。

ここでは、Rastogi⁽⁸⁾、Huang ら⁽⁹⁾ の手法に従い、

図 2 格子密度の制御

カーテシアン成分より次式(6)で変換される反変・共変系の速度成分によって、NS 方程式を表記する。

$$u_\xi = \frac{1}{h_\xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} U + \frac{\partial r}{\partial \xi} V \right),$$

$$u_\eta = \frac{1}{h_\eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} U + \frac{\partial r}{\partial \eta} V \right) \quad (6)$$

この成分は、その速度ベクトルの大きさが、物理空間での速度ベクトルの大きさと等しくなるように、座標変換後スケールリングされており、一般曲線座標系のテンソル解析において、物理成分と呼ばれているものである。ここでは、直交曲線座標系による解析を行っているため、速度の反変物理成分と共変物理成分は、同一のものとなり上式で定義される。

3・4・1 連続の式

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta r u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi r u_\eta) \right] = 0 \quad (7)$$

3・4・2 ξ 方向運動量保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\xi}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta r u_\xi^2) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi r u_\xi u_\eta) \right] \\ = \nu \frac{1}{h_\xi h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta r}{h_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi r}{h_\eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right) \right] \\ - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} g + S_\xi \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_\xi = \frac{u_\eta^2}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial \theta_\eta}{\partial \xi} - \frac{u_\xi u_\eta}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \\ - \nu \frac{1}{r^2 h_\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{u_\xi}{h_\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{u_\eta}{h_\eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \\ + \nu \left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\eta}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) \right] \\ + \nu \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) \\ - \nu \frac{1}{h_\xi^2 h_\eta^2} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \left(u_\xi \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + u_\eta \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

3・4・3 η 方向運動量保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta r u_\xi u_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi r u_\eta^2) \right] \\ = \nu \frac{1}{h_\xi h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta r}{h_\xi} \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi r}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) \right] \\ - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} g + S_\eta \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 S_η は、式(9)の S_ξ において ξ と η を入れ替えたものである。

3・5 時間微分項

本計算では、格子の移動を伴

うために、物理空間での時間微分項は、計算空間での時間微分項と格子の移動に伴う項とに分離される。この項は、反変・共変系のベクトルを用いた場合、スカラー量あるいは速度のカーチアン成分に対して現れる項に加え、基底の時空間的变化を表す項が付加されることになる。 ξ 方向の速度 u_ξ について、計算式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\xi}{\partial t} = & \frac{\partial u_\xi}{\partial r} + u_\eta \left(\frac{1}{h_\xi} r_\xi \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h_\xi} x_\xi \right) \\ & - \frac{\partial x}{\partial \tau} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(r_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - r_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) \right] \\ & - \frac{\partial r}{\partial \tau} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(-x_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) \right] \\ & - \frac{\partial x}{\partial \tau} \left[\frac{u_\eta}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{r_\eta}{h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + \frac{r_\xi}{h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) \right] \\ & - \frac{\partial r}{\partial \tau} \left[\frac{u_\eta}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{x_\eta}{h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + \frac{x_\xi}{h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) \right] \dots \dots (11) \end{aligned}$$

ここで、

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, r_\xi = \frac{\partial r}{\partial \xi}, r_\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta}$$

この式において、右辺、第3、第4項は、格子移動に伴う成分の変化量を表し、速度のカーチアン成分を用いた場合にも、現れる項である。右辺第2項は、基底の時空間的变化(時間微分項)を、第5、第6項は、格子移動に伴う基底の空間的变化を表し、これらの項は、反変、共変系のベクトルを用いているために現れる項である。

3・6 境界条件 気泡表面では以下の境界条件が課される。

3・6・1 接線方向応力条件 気液界面は、自由界面としているので、界面でせん断応力なしの条件として次式が与えられる。

$$\frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\xi}{h_\xi} \right) + \frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h_\eta} \right) = 0 \dots \dots \dots (12)$$

3・6・2 法線方向応力条件 気液界面での法線方向応力の釣合式は、気液界面での液相側の圧力と気泡内部の圧力、法線方向粘性応力、表面張力によって次のように表される。

$$-p + 2\mu e_{\eta\eta} = -p_0 + \sigma(x_{(\xi)} + x_{(\phi)}) \dots \dots \dots (13)$$

ここで、

$$e_{\eta\eta} = \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\xi}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right) : \text{変形速度} \dots \dots \dots (14)$$

主曲率は、R&Lに従い、界面に接する方向に離散化を行い、以下のように計算した。

$$\begin{aligned} x_{(\xi)} &= \frac{1}{h_\eta^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right), \\ x_{(\phi)} &= -\frac{1}{r h_\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

3・7 境界条件の取扱い 上述の境界条件および

気泡体積一定の条件より、気泡表面での速度2成分(u_ξ, u_η)と気泡内圧力 p_0 を決定する。この際、用いる境界条件と、その条件から決定される変数の間にはいくつかの組合せが考えられるが、その組合せの選定を誤ると、数値的不安定を招く。本計算では、(1)接線応力=0の条件より接線方向速度 u_ξ 、(2)法線応力の釣合式より法線方向速度成分 u_η 、(3)気泡体積一定の条件より気泡内部の圧力 p_0 を計算した。また、遠方境界に関しては、気泡半径の25倍の距離に図1に示した境界をとり、接線方向速度、法線方向速度ともに零の境界条件を課した。遠方境界も気泡とともに移動させるため、領域の広さは一定に保たれている。領域の広さに関しては、気泡半径の15、25、40倍をとった場合について調べた。その結果 Re 数10以下では、15倍の領域では不十分なことがわかったため、25倍とした。25倍と40倍との計算結果の相違は、 Re 数20のときに上昇速度にして1%以下である。

気泡表面での境界条件の(2)の法線応力の釣合式に関しては、自由表面の移動に伴う計算において、数値的不安定を生み出す要因を考察し、それを取り除く緩和計算手法を適用した。以下、この緩和方法について説明する。

法線方向応力条件の式(13)において、左辺第1項が気泡表面の液体の圧力、第2項が法線方向粘性応力である。法線速度成分 u_η は、この式の左辺第2項の $\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}$ より決定されるが、粘性が小さい場合には数値的不安定を生み出す。これは、法線応力の式(13)において圧力と粘性応力の比が大きく異なることにより、反復計算過程における微小な圧力変化が、 u_η に大きな変化となって現れるためによる。この問題を解決するためには、反復計算過程での圧力の変化と粘性応力の変化が同程度になるように調整する必要がある。そこで実際の計算では、 u_η を計算するのに次式を用いる。

$$\begin{aligned} -p + 2\mu e_{\eta\eta} + \frac{2}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \\ = -p_0 + \sigma(x_{(\xi)} + x_{(\phi)}) + \frac{2}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{2}{h_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}$ は、反復計算中での圧力と粘性応力の変化量が、同程度になるように調整している緩和変数であり、この項の導入により数値計算を安定化させることができる。

次に気泡内部の圧力 p_0 の決定法について述べる。気泡内部の圧力は、気泡体積を一定に保つように決定される。式(16)を、離散化すると n 回めの反復計算における気泡界面での法線方向速度 ($u_{\eta n}^n$) は、 $n-1$ 回めの

反復計算における値 ($u_{\eta s}^{n-1}$)等を用いて圧力の一次式として次のように表される。

$$u_{\eta s}^n = C_1 p_0 + C_2 \dots (17)$$

ここで、

$$C_1 = -\frac{h_{\eta} \Delta \eta}{2(1+\mu)} \dots (18)$$

$$C_2 = \frac{h_{\eta} \Delta \eta}{2(1+\mu)} \left[p + \sigma(x_{(\xi)} + x_{(\phi)}) - \frac{u_{\xi}}{h_{\xi} h_{\eta}} \frac{\partial h_{\eta}}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1+\mu} (\mu u_{\eta s-1}^n + u_{\eta s-1}^{n-1}) \dots (19)$$

気泡の体積を一定に保つためには、この速度を気泡表面全体にわたって積分を行い、気泡界面からの流出量を零にすればよい。したがって、

$$\int_S u_{\eta s}^n ds = \sum_i u_{\eta s i}^n \cdot \Delta S_i = 0 \dots (20)$$

($\Delta S_i = r h_{\xi i} \Delta \xi$: 面積要素)

が、体積一定の条件となり、式(17)を用いると

$$p_0 = \frac{\sum_i (C_1 \Delta S)_i}{\sum_i (C_2 \Delta S)_i} \dots (21)$$

と計算される。

以上で気泡の体積が一定となるように内部圧力が決定されたわけであるが、実際には、数値誤差の蓄積で各時間ステップごとにわずかに気泡の体積が変化する(体積比で 10^{-4} 程度)。ここでは、この誤差を取り除くために、各時間ステップごとに、次のように初期体積への微小修正を行う。

$$r_s = r_s \times \sqrt{\frac{(\text{初期体積})}{(\text{その時刻での体積})}} \dots (22)$$

以上によって決定された界面上の格子点での接線方向、垂直方向速度成分をカーチアン成分に変換した後、式(23)に従い、格子点をラグランジェ的に移動させ、その後、格子を切り直す。

$$x_s^{n+1} = x_s^n + \Delta t U_s^n, y_s^{n+1} = y_s^n + \Delta t V_s^n \dots (23)$$

4. 計算結果および考察

一般に定常状態にある上昇気泡は、次に示す無次元数によって整理される。

$$\text{Morton 数: } Mo = \frac{g \mu^4}{\rho \sigma^3},$$

$$\text{Eötvös 数: } Eo = \frac{g d_e^2 \rho}{\sigma}$$

$$\text{Reynolds 数: } Re = \frac{\rho d_e U}{\mu},$$

$$\text{Weber 数: } We = \frac{\rho U^2 d_e}{\sigma}$$

Mo 数と Eo 数, あるいは, Re 数と We 数の組によって、現象は整理されるが、終端速度は測定(計算)結果として得られる値であるため、多くの場合、パラメータとして、 Mo 数と Eo 数が選ばれる。特に Mo 数は、

物性値のみによって無次元化されているため、同一の液体を用いることの多い実験では、データの処理に都合がよい。これに対し、 $R\&L$ は、計算アルゴリズム上の理由から、 Re 数と We 数をパラメータとして、計算結果を整理した。ここでは、計算結果の信頼性が高いとされている $R\&L$ との比較、および他者の実験結果との比較の両方を考え、上記四つの無次元数を適宜用いた。また、時間 (t) については、単位についているものを除き、気泡半径と終端速度を用いて無次元化している。ただし、本計算において定常解の存在しないものについては、 $R\&L$ による定常解の上昇速度を終端速度として用いた。

4.1 計算精度 計算結果の、格子点数、時間ステップ依存性を調べるために、格子点数や時間ステップを変化させ、計算を行った。計算条件は、 $Hnat$ ら⁽¹⁰⁾の実験結果より選び、気泡体積 $9.4 \times 10^{-7} \text{ m}^3$ 、液相の密度 $8.76 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ 、液相の粘性係数 0.118 kg/ms 、表面張力 $3.22 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ とした。この条件のもとで、気泡は終端速度 0.215 m/s で上昇し、 Mo 数 0.065 、 Eo 数 39.4 、 Re 数 19.4 、 We 数 15.3 となる。時間ステップ依存性を図 3 (a) に示す。図 3 (a) よりこの計算の場合、時間ステップ $5.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ で十分な精度が出る事が確かめられる。この時間ステップは、気泡半径と終端速度で無次元化を行うと無次元時間ステップ 0.018 に相当する。実際の計算では、無次元時間ステップが約 0.01 となるようにした。格子点数依存性については、速度変動の大きい部分の拡大図 [図 3 (b)] より、 30×30 の場合には、誤差を含んでいるのがわかる。この誤差は実際には、速度の絶対値に対しては、非常に小さな値であり、 30×30 の格子点数でも十分な精度が出ていると考えられるが、ここでは、格子点数 40×40 を用いて実際の計算を行った。

変形の大きい他の条件 (Re 数約 50 、Weber 数約 15) で格子点数 60×60 と 30×30 のときの、速度場の比較を、図 4 に示す。図 4 から、 30×30 で気泡形状および流れ場が精度よく計算されているのがわかる。

4.2 計算結果の比較 ここでは、本手法による計算結果と、他者の実験結果および計算結果との比較を行い、本手法による計算結果の信頼性を調べる。計算は、 Re 数約 $2 \sim 200$ 、 We 数約 $0 \sim 20$ の範囲で静止流体中を上昇する気泡に関して行った。表 1 に計算条件および比較されたデータと、本計算により得られた終端速度を比較データの終端速度で割った値を記した。

Case 1 は、 $Hnat$ ら⁽¹⁰⁾、Case 2 は、 $Bhaga$ ら⁽¹¹⁾ の実験結果と、Case 3 は $R\&L$ 、Case 4 は、 $Takagi$ ら⁽¹²⁾ の計算結果との比較である。本計算を行った Re 数、

We 数の範囲で、比較できる実験データは、比較的低 Re 数のものしか見あたらないため、高 Re 数については、R&L と Takagi ら⁽¹²⁾ の計算結果を選んだ。R&L, Takagi ら⁽¹²⁾ の計算手法は、気泡の形状に関して、気液界面での法線応力の釣り合い式に対する表面張力の効果を考慮に入れた反復計算法であり、上昇気泡の定常解のみを求めるものである。これらの手法で Case 3 は、 $Re=100$, $We=10$ の場合に、Case 4 は、 $Re=200$, $We=4$ の場合にあたる。

Case 1~4 について定常状態での気泡の形状の比較を図 5 に示した。局所的な曲率にやや違いがあるが、全体的な形状はよく一致している。表 1 より上昇速度に関しても、本計算と他者の結果との差は、最大でも 5% 程度であり、正確に計算されているのがわかる。ここに示した以外にも、R&L との比較を行ったところ、上昇速度の差は、計算を行ったほとんどの場合で 3% 以内であり、最大でも 5% 程度であった。

4.3 気泡の形状と上昇速度 R&L によると、 Re 数 0~200, We 数 $O(5) \sim O(20)$ で定常状態にある上昇気泡の形状は、大きく次の二つの形に分類される。

Type 1: 気泡の後方よどみ点近傍がくぼんだ、あるいは平らで上に凸形の形状。低 Re 数 [$Re < O(50)$] のときに相当する。

Type 2: 気泡の前方よどみ点近傍がくぼんだ、あるいは平らで下に凸形の形状。高 Re 数 [$Re > O(50)$] のときに相当する。

Type 1 から Type 2 への遷移域は、 Re 数約 50 で気泡が上昇するときで、このとき気泡は、だ円体形となる。

このパラメータの範囲において、初期状態で速度零で無限流体中に放置された気泡の重心速度の変化を調べた。その結果、これらタイプの異なる気泡は、定常状態への漸近過程に違いがあることがわかった。特に Type 2 の気泡は、高 Re 数、高 We 数のときには、R&L が計算している定常解が存在せず、気泡が形状

振動を伴い、上昇速度を変化させる結果が得られた。ここでは、Type 2 で定常状態への漸近挙動の存在するものを Type 2-1 (減衰振動型)、しないものを Type 2-2 (振動形) とさらに分類した。それぞれの Type についてその形状の例とパラメータの範囲を図 6 に示す。ただし、Type 1 と Type 2-1 の境界を判断するのは難しく、図 6 ではおよそその境界を示した。

それぞれの場合について代表的な計算例を図 7 に示す。終端速度への漸近過程に違いがあるのがわかる。Type 1 で比較の変形が大きい場合には、図 7 (a) のように重心の上昇速度が一度終端速度を超えるが、その後緩やかに減少し、終端速度へと達する。上昇速度が一度終端速度を超えるのは、初期状態で球形であった気泡が、定常状態への形状と変化する際に、形状の変化の速さに対して、気泡の加速運動が速いために起きるものである。すなわち、まだ球形に近い、抗力の小さいうちに上昇速度が最大に達し、その後変形が大きくなるに従い、抗力が増し、定常状態へと達する。したがって、これは、Type 2 のように気泡の形状振動により引き起こされるものとは異なる。

Type 2 の下に凸形の気泡が、上昇速度の振動を伴う理由は以下のように考えられる。すべての気泡は、静止状態からの加速初期で速度が小さいため、粘性の影響を強く受け、粘性支配形の形状、すなわち上に凸形 (Type 1) の形状をしている。その後、上昇速度の増加に伴い、Type 1 のときには、そのまま Type 1 の形を保ったまま、定常的な状態へと遷移していくが、Type 2 のときには、Type 1 から Type 2 への形の遷

表 1 計算条件と終端速度の他者との比較

Case	Eo	$\log Mo$	Compared Data	Velocity divided by Compared Data
1	39.4	-1.19	H&B ⁽¹⁰⁾	1.005
2	116	2.93	B&W ⁽¹¹⁾	0.962
3	17.0	-4.77	R&L	0.944
4	1.77	-7.75	TP&M ⁽¹²⁾	1.014

(a) 時間ステップ依存性 (b) 格子点数依存性

図 3 計算結果の検証

(a) 60×60 (b) 30×30

図 4 気泡形状および流れ場の格子点数依存性

図 5 他の実験および計算結果との比較

移が起こる。この遷移の過程は、一度に滑らかに行われず、気泡の前方よどみ点付近に小さな形状振動をもたらす。この形状振動は非常に小さく、図 7 (b) の $t=5 \sim 20$ の間で気泡の前方よどみ点付近の曲率が周期的に変化しているが、図 7 (b) からは判断しにくいほどである。しかし、この振動は、気泡の抗力を変化させ、図 7 (b) の上昇速度の振動をもたらす。Type 2-1 の場合は、その後粘性の影響で、気泡の前方よどみ点付近の振動が抑えられ、定常状態へと達する。これに対し、Type 2-2 の場合には、初期の前方よどみ点付近の形状振動が成長し [図 7 (c) の $t=5 \sim 20$]、やがて、全体的な大きな形状振動へと変化する。そして、図 7 (c) の $t=25 \sim 40$ のように、Type 1 と Type 2 の形状を交互に取りながら抗力を大きく変化させ、上昇速度を振動させる。本計算では、動圧の変化に対して、体積変化が十分小さいことを仮定しているが、ここでは、形状振動が起きる図 7 (c) の条件に関して、この仮定を評価しておく。図 7 (c) の条件は、動粘度が水の 3 倍のシリコンオイル中を球相当径 $3 \times 10^{-3} \text{ m}$ の気泡が上昇速度 0.2 m/s で上昇する場合の計算に相当するが、この場合動圧は、 $O(10) [\text{N/m}^2]$ となる。大気圧が $O(10^5) [\text{N/m}^2]$ であることを考慮すると形状振動が体積変化に与える影響は無視できると考えられる。

Tsuge ら⁽¹³⁾ の上昇気泡の実験によると、図 7 (c) の条件のもとで、気泡は三次元的な運動(らせん(ジグ

図 6 Type 別の気泡の形状とパラメータの関係

ザグ)運動)をすると報告されている。本計算は、軸対称に限られているため、このような三次元運動を計算することはできないが、実験において三次元的な運動が観測されるパラメータの範囲と、本計算において気泡の形状振動の減衰が起きない範囲とは、ほぼ一致している。すなわち、気泡の三次元運動と気泡の形状振動の成長とは、密接な関連があると考えられる。これは、伴流の周期的変動と、気泡の前方付近の形状振動との相互作用によってジグザグ運動が引き起こされると提案した Saffman⁽¹⁴⁾ の知見を支持するものである。

以上は、 $We > O(5)$ の、変形の大きい気泡に関してであったが、変形の小さい $We < O(5)$ の気泡の場合は、大きな形状振動は現れない。特に、気泡がほぼ球形である場合 [$We < O(2)$] は、 Re 数によらず、気泡の加速度は単調減少し、終端速度へと滑らかに漸近する。図 8 に $Re=100$, $We=0.04$ ときの上昇速度の時間的な変化と $t=60$ での形状を示す。

5. 結 言

静止流体中を上昇する気泡に関して非定常計算を行う手法を開発し、計算結果の比較・検討を行った。

本手法の特徴として以下のことが挙げられる。

(1) 自由界面での渦度の生成や離、表面張力に密接に関連している気液界面の曲率を、精度よく扱うために境界適合格子を用いた。さらに、自由界面のもつ数値的不安定を取り除くため、気液界面での法線方向応力条件に、粘性応力の寄与を考慮に入れた緩和法を開発した。その結果として、自由界面を有する上昇気泡の非定常計算に成功し、比較的少ない格子点数で、実験結果と定量的によく一致する結果を得ることができた。

また上昇気泡の計算より、以下の結論を得た。

(2) 気泡 Reynolds 数 $0 \sim 200$, Weber 数 $0 \sim 20$ で上昇する気泡の定常状態への遷移過程は、減衰形、減衰振動形、振動形の三つの形に分類できる。

(3) 従来までの実験において気泡の三次元運動が観測される条件と、本計算において軸対称の定常解の

図 7 気泡の変形と上昇速度の非定常変化

図 8 ほぼ球形の気泡の上昇速度の変化

存在しない領域とが、ほぼ一致する。したがって、軸対称な形状振動の不安定が上昇気泡の三次元運動を引き起こしていると考えられる。

本研究の一部は、著者の一人(高木)が、Johns Hopkins 大学、A. Prosperetti 教授のもとに 1 年間滞在したときに行われたものである。Johns Hopkins 大学、A. Prosperetti 教授と H. N. Oguz 博士の助言に対し、記して感謝の意を表する。

文 献

- (1) Hartunian, R. A. and Sears, W. R., *J. Fluid Mech.*, **3** (1957), 27.
- (2) Oguz, H. N. and Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, **257** (1993), 111.
- (3) Ryskin, G. and Leal, L. G., *J. Fluid Mech.*, **148**(1984), 19.
- (4) Unverdi, S. O. and Tryggvason, G., *J. Comput. Phys.*, **100**(1992), 25.
- (5) 富山・宋・南川・坂口, 機論, **57**-539, B(1991), 2167.
- (6) 西原・木枝・功刀, 機論, **59**-562, B(1993), 126.
- (7) Duraiswami, R. and Prosperetti, A., *J. Comput. Phys.*, **98**(1992), 254.
- (8) Rastogi, A. K., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **106** (1984), 262.
- (9) Huang, H., Oguz, H. and Prosperetti, A., Submitted to *J. Comput. Phys.*, (1993).
- (10) Hnat, J. G. and Buckmaster, J. D., *Phys. Fluids*, **19** (1976), 182.
- (11) Bhaga, D. and Weber, M. E., *J. Fluid Mech.*, **105**(1981), 61.
- (12) Takagi, S., Prosperetti, A. and Matsumoto, Y., *Phys. Fluids*, **6**(1994), 3186.
- (13) Tsuge, H. and Hibino, S., *J. Chem. Eng. Jpn.*, **10**-1(1977), 66.
- (14) Saffman, P. G., *J. Fluid Mech.*, **1**(1956), 249.