超流動ヘリウムにおける境界面付近の
量子渦の運動と流れ場の影響*米 陀 英 毅^{*1}, 坪 田 誠^{*2}Dynamics of Quantized Vortices near a Boundary Surface
under an Applied Field in Superfluid Helium

Hideki YONEDA and Makoto TSUBOTA

The flow of superfluid helium (helium II) above a critical velocity enters a turbulent state with a dense tangle of quantized vortices. Although very little is known about the mechanism of the transition, it is widely accepted that the transition is influenced by the roughness of the boundary surface. Thus in this paper, we numerically study three-dimensional dynamics of interactive quantized vortices near a pinning site under an applied flow in order to investigate the effect of the surface roughness. First, the conditions under which vortices are attracted to a pinning site are discussed. Secondly, we discuss the finite capacity of a pinning site, and the critical depinning velocity for pinned vortices. Thirdly, the critical depinning velocity under thermal counterflow is compared with some experimental results, and the agreement is found to be very good.

Key Words: Cryogenics, Superfluid Helium, Superfluid Turbulence, Quantized Vortex, Pinning Site, Normal Fluid

1. 緒 言

近年、極限環境下における流体现象の研究が注目を集めている。極限環境の典型的な一例が極低温である。今世紀初頭のヘリウム液化によって開かれた極低温の世界では、液体ヘリウムの超流動に代表されるように、常温とは著しく異なる流体现象が数多く見出されている⁽¹⁾。従来より低温流体は低温環境実現のための冷媒として広く用いられているが、近年、超伝導応用や宇宙開発などを中心に、その需要はますます増加してきた。

極低温流体现象の中でも最も劇的なものが、液体ヘリウムの超流動現象である。この現象は2.17 K以下でボーズ粒子である⁴He原子が大量に運動量最低状態に落ち込むボーズ・アインシュタイン凝縮に起因しており、量子効果が巨視的に現れたものである。超流動ヘ

リウム(ヘリウムII)は非粘性で、熱伝導性が非常に良いなどの特性をもつため、それを冷媒とした冷却システムの開発が進められてきた。

超流動ヘリウムの層流状態における流動特性は、それが非粘性の超流体(ボーズ凝縮体)と粘性をもつ常流体(フォノン、ロトン等の素励起の集団)の混合状態であるとする二流体モデルにより、良く記述される。しかし、その超流動状態も、わずかな流速による管内流動で超流動乱流に遷移してしまう。超流動乱流とは、超流動ヘリウムに特有の量子渦糸が高密度に成長し複雑にからみあった状態であり、もはや超流動の特性は失われている。この量子渦糸が乱流遷移において重要な役割を演じているのだが、その臨界速度の決定要因は、未だに不明である。乱流遷移の臨界速度の解明、及びその自在な制御は、超流動ヘリウムの特性を生かした有効利用の道を開くための重要課題である。

量子渦糸は、ボーズ凝縮系を記述する量子力学的波動関数の空間座標に関する一価性のため、循環が $\kappa = h/m_4$ に量子化された超流体の渦であり、渦芯の半径は約 $1\text{\AA}$ という原子のオーダーである。この細い渦芯ゆえ、量子渦糸に対する平滑な壁面は存在せず、壁に端

* 1994年8月18日 第72期全国大会および第4回ASME/JSME熱工学合同会議において講演、原稿受付 1994年12月16日。

^{*1} 学生員、東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 正員、東北大学流体科学研究所。

を発する量子渦糸はその凹凸を乗り越えつつ、動くことになる。そうした運動を通じて、壁面あらしが、超流動乱流に向けての渦糸密度の成長過程に関与するはずである。事実、乱流遷移臨界速度の壁面あらし依存性も報告されている⁽²⁾。

しかし、二流体モデルは量子渦や壁面あらしの効果を顕に含まないため、それだけでは超流動乱流遷移の過程を記述できない。そこで、著者ら^{(3)~(5)}は、以前より、量子渦の三次元相互作用運動の数値解析的研究を行い、その様々な動的特性を明らかにしてきた。その中で、壁面あらしの効果を調べるべく、平面上に置かれた半球状突起による複数の量子渦のピンニング（捕獲）の研究を行った^{(4),(5)}。本研究では、実際の管内流を想定して、超流動、常流動速度場を印加し数値解析を行った。また、得られた結果をYarmchuk⁽⁶⁾らによる熱カウター流の実験結果と比較し、本数値計算の妥当性を確認した。

2. 記号

- a_0 : 渦糸の芯の半径
 - b : 半球状突起の半径
 - D : 平行平板の間隔
 - h : プランク定数
 - l : 点 s を端点とする線素の長さ
 - m_4 : ^4He 原子の質量
 - $\hat{n}$: 境界面の法線方向の単位ベクトル
 - s : 渦糸上の点の位置ベクトル
 - t : 時間
 - v : 速度場
 - α, α' : 相互摩擦係数
 - κ : 量子化された循環
 - ξ : 渦糸に沿った長さ
 - ρ : 密度
- 添字
- a : 印加場
 - b : 境界壁を考慮した修正速度場
 - n : 常流体
 - s : 超流体
 - w : 無限媒質中の速度場

3. 基礎方程式と数値計算法

渦糸上の点の位置ベクトルを $s(\xi, t)$ とする。この渦糸が流体中のある点 r に作る超流動速度場はBiot-Savartの法則から次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$v_s(r, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(s_1 - r) \times ds_1}{|s_1 - r|^3} \quad (1)$$

ここで、 L は渦糸に沿った線積分、 s_1 は渦糸上の点である。 $r = s$ として渦糸上での速度場を考えると、式(1)は $s_1 = s$ で発散する。これを避けるため式(1)を $s_1 = s$ 近傍とそれ以外の寄与とに分割する。さらに境界壁に関する修正超流動速度場 $v_{s,b}$ 、印加超流動速度場 $v_{s,a}$ を加える。今、渦糸の芯が非常に細いためその慣性が無視できるので、点 s の移動速度は次のように書ける⁽⁷⁾。

$$\dot{s}_0 = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{ds}{d\xi} \times \frac{d^2 s}{d\xi^2} \ln \left(\frac{2(l+l_-)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int_L' \frac{(s_1 - s) \times ds_1}{|s_1 - s|^3} + v_{s,b} + v_{s,a} \quad (2)$$

右辺第一項は点 s 近傍の局所的自己誘導場であり、第二項は点 s 近傍以外の部分及び他の渦糸から生じる非局所的誘導場である。ここで、積分記号の $'$ は $s_1 = s$ の近傍を除くことを示し、 $\dot{s}_0$ の添字0は量子渦糸と常流体との摩擦を含まないことを意味する。 $v_{s,b}$ は、超流体に対する境界条件 $(v_{s,b} + v_{s,w}) \cdot \hat{n} = 0$ を満足するものとして決定される。ここで、 $v_{s,w}$ は無限媒質中の速度場である。平面境界がある場合、鏡像渦の寄与が $v_{s,b}$ となる。平面境界上に半球状突起がある場合は、図1の極座標表示を用い、 z' 軸上 s_1 の距離にある渦糸の線素 ds_1 によって流体中の任意の点 $r(r, \theta, \phi)$ に生じる速度ポテンシャル

$$d\Phi_b = \frac{\kappa}{4\pi} ds_{\perp} \frac{b \sin \phi}{s_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b^2}{s_1 r} \right]^n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{n+1} \quad (3)$$

から導かれる速度場を $v_{s,b}$ に加えればよい。ここで、 b は突起の半径、 P_n^m はLegendre陪関数である。

有限温度では、量子渦糸と常流体の間に相互摩擦力

図1 突起による速度ポテンシャル式(3)を計算するための座標系

が働き、これを考慮した運動方程式は次式で与えられる。

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \alpha \frac{ds}{d\xi} \times (v_n - \dot{s}_0) - \alpha' \frac{ds}{d\xi} \times \left[\frac{ds}{d\xi} \times (v_n - \dot{s}_0) \right] \quad (4)$$

ここで、 α および α' は温度に依存した相互摩擦係数である。

本研究では、超流動ヘリウムは、 $z=0$ および $z=D$ に置かれた無限大の平行二平板の間にあるとする。簡単のため、 v_n は二次元ポアゼユ流れとし、突起の存在を考慮して、次のように表した。

$$v_n(z) = \frac{6 \langle v_n \rangle}{D^2} z(D-z) \left(1 - \exp \frac{b-r}{b} \right) \quad (5)$$

ここで、 $\langle v_n \rangle$ は v_n の平均値であり、 r は突起の中心からの距離である。これにより、 v_n は、境界面上でその大きさが0となり、また突起付近での速度の減衰が表現できる。

数値計算は、渦糸上に配置した離散点を式(4)に従って動かすことで行い、また、離散点の間隔が変化する場合は点を挿入、または除去することで精度を保った。また、 $D = 2 \times 10^{-3} \text{cm}$ 、突起の半径を $b = 10^{-4} \text{cm}$ とした。相互摩擦係数は、第4章、第5章では $\alpha = 0.1$ 、 $\alpha' = 0$ とし、第6章では温度に応じて変化させた。本研究では、渦度が z 軸正方向を向いた渦糸群の運動を扱う。渦度が互いに逆方向を向いた渦糸のピンニングは坪田ら⁽⁴⁾により研究され、渦糸は突起上に蓄積されないことが判明している。

4. 半球状突起による量子渦糸の捕獲

本章では、半球状突起が印加流れ場中で量子渦糸を捕獲する条件を調べる。

図2 突起近傍の1本の渦糸の運動 ($v_{s,a} = 0 \text{cm/s}$)

最初に最も簡単な例として、突起近傍に直立した1本の渦糸を考える。突起による速度場は、渦糸を突起中心に時計回りに回転させる。その際、相互摩擦力は突起の中心方向を向き、その結果、渦糸は螺旋を描いて突起に衝突する。その後、渦糸は突起表面を駆け上がり、最終的に突起の頂上に直立し、平衡状態に達する(図2)。この場合、渦糸は突起からの距離の如何によらず、最終的には突起に捕獲される。この過程に超流動速度場が印加されると渦糸は印加場に沿って押し流され、突起の中心からある臨界距離以内を通過するものだけが突起に衝突する(図3)。

一般には、管内に多数の渦糸が存在し、それらの間には相互作用が働いている。2本の無限に長い渦糸が渦度を互いに平行にして置かれた場合、両者は互いを結ぶ中点の回りを回転し、さらに相互摩擦力によりその相対距離が増大する。即ち、有効斥力が働くことになる。従って、既に渦糸を捕獲した突起に、別の渦糸が引き込まれるか否かは自明ではない。そこで、1本および2本の渦糸を捕獲した突起に他の渦糸が衝突する条件を調べる。突起外の直線状渦糸の初期位置を種々変えて計算を行い、渦糸が突起に衝突する領域を見出した。また、 0.1cm/s の超流動速度場を印加した場合の領域変形も確認した。

計算結果を図4、図5に示す。○が衝突する場合、×が衝突しない場合の初期位置を示す。また、原点を中心とする円(図4では実線の円)は突起を表し、●は突起上に既に存在する渦糸を表す。●は、図4では突起の頂上に1本の渦が直立した配置、図5では図6のような2本の渦の配置を意味し、ともに印加速度場が無い場合の平衡状態である⁽⁴⁾。図4、図5ともに、突起に衝突す

図3 突起近傍の1本の渦糸の運動 ($v_{s,a} = 0.1 \text{cm/s}$)

る渦糸の初期位置領域は閉じていることが分かる。速度場がない場合、その領域は、図4では破線の円内（この円内から出発した渦糸のみが突起に衝突する）となり、図5(a)では原点に関して対称になる。そして、この領域に y 軸負方向の超流動速度場を印加すると、図4、および図5(b)に示す様に、領域は変形し、双方とも第一、第四象限の領域は広がり、第二、第三象限の領域は狭くなる。第一、第四象限の領域拡大は、そこから出発した渦糸が、突起上の渦糸から受ける非局所的誘導場のため、いったん y 軸正方向に移動するものの、その後、印加場の影響で突起へと押しやられ、その結果、突起への衝突が容易になるからである。他方、第二、第三

図4 1本の渦糸を捕獲した突起近傍の渦糸の初期位置

図5 2本の渦糸を捕獲した突起近傍の渦糸の初期位置 ((a) $v_{s,a} = 0 \text{ cm/s}$, (b) $v_{s,a} = 0.1 \text{ cm/s}$)

象限の領域縮小は、突起外の渦糸に作用する非局所的誘導場、印加場が、ともにそれを y 軸負方向へと押しやる（突起から遠ざける）ため、突起への衝突が困難になるからである。このような領域変形は突起上に3本以上の渦糸が存在する場合も同じ傾向を示すと推測される。

このように、突起上の渦糸の数や印加速度場による制限は伴うものの、突起は複数の渦糸を引き込み得ることが明らかとなった。

5. 半球状突起上の量子渦糸の運動

前章のように、渦糸が突起に次々と引き込まれると、突起上の渦糸の数は次第に増加していく。しかし、渦糸間には有効斥力が働くので、突起は無限に渦糸を捕獲し得るものではない。突起上の渦糸の運動、特に、渦糸に対するピンニング容量（何本の渦糸を捕獲できるか）については著者ら^{(4),(5)}が調べており、その主要な結果は以下のとおりである。

突起上の渦糸の数が1本の時、それは突起の頂上に直立し、2本の場合は図6の形状で静止する。3～5本の時、渦糸は他の渦糸からの非局所的誘導場に従い回転するが、相互摩擦力の作用により、その回転運動は減衰し、やがて平衡状態に達し、静止する（図7）。突起上の渦糸の平衡状態の形状は、渦糸自身が歪むことによって生じる自己誘導場と他の速度場（他の渦糸から受ける非局所的誘導場および印加速度場）との釣り合いにより決定され、初期条件に依存しない。渦糸の自己誘導場は、歪みとともに大きくなり、突起上の渦糸に関しては、頂上近傍に立つものより突起の下部付近に位置するものほど弓なりに歪み、自己誘導場は大き

図6 突起上の2本の渦糸の平衡状態

い。突起上の渦糸の数が増し、個々の渦糸が受ける速度場が増大すると、それに対抗して大きな自己誘導場を確保するには、渦糸は突起の下部に移動しなければならない。突起上の渦糸が5本以下の場合にはそれが可能だが、6本になると、そのうちの1本は他の渦糸からの非局所的誘導場と釣り合うだけの自己誘導場を突起上で確保できず突起から離脱してしまう(図8)。これから、渦糸の捕獲に関する突起の容量は5本となる。この容量は、 $a_0 \ll b \ll D$ である限り、突起の半径 b には極めて弱い依存性しか示さない。

本研究では、突起上の渦糸が1~5本の場合に超流動速度場を印加し、それぞれの臨界離脱速度(突起から渦糸が離脱する時の印加超流動速度)を調べた(図9)。図9において、○が離脱する場合、×が離脱しない場合を表す。この臨界離脱速度の渦糸数に対する依存性は次のように理解できる。突起上に1本の渦糸がある場合は、印加速度場のみに対して自己誘導場が生じる(図10)。2本の場合、そのうちの1本は、相手の渦糸からの非局所的誘導場と印加場の和に対して自己誘導場をもつ(図11)。その結果、向かって右側の渦糸については、1本の場合よりも自己誘導場は大きくなり、渦糸は突起の下部に位置する。このため、突起上の渦糸が1本より、2本のほうが臨界離脱速度が小さくなる。また、図9から、3本、4本、5本と増えるにつれて臨界離脱速度は増加していることが分かる。3~5本の場合は、超流動速度場が加わると、渦糸は図12のように相対位置をほぼ一定に保ちながら突起上で回転する。この時、他の渦糸からの非局所的誘導場は、その対称な配置のため渦糸を回転させる方向に働く。そして、1本の渦糸に着目すると、他の渦糸からの非局所的誘導場

図8 突起上の6本の渦糸の運動

図9 突起上の渦糸の数と臨界離脱速度の関係

図7 突起上の3本の渦糸の運動

図10 印加場下における、突起上の1本の渦糸の平衡状態 ($v_{s,a} = 0.1 \text{ cm/s}$)

と印加場とが同じ方向を向く瞬間もあれば、全く逆方向を向く瞬間もでてくる。これが、渦糸が2本以下の場合と異なる点で、渦糸は静止せずに回転し続けることにより、印加場の影響を緩衝している。また、この非局所的誘導場は渦糸の数が増えるに従い増加し、やがて、相対的に印加場よりも支配的になる。その結果、渦糸は突起からの離脱が困難になる。これが、渦糸の数に伴い、臨界離脱速度が増加する理由である。

6. 熱カウンター流における量子渦糸の臨界離脱速度

渦糸が原子のオーダー程度の量子渦糸の個々の運動

図11 印加場下における、突起上の2本の渦糸の平衡状態 ($v_{s,a} = 0.1 \text{ cm/s}$)

図12 印加場下における、突起上の5本の渦糸の運動 ($v_{s,a} = 0.3 \text{ cm/s}$)

を実験的に追跡することは極めて困難である。従って、前章までに述べた運動の詳細を、実験により直接検証することはできない。しかし、超流動ヘリウムに特有の熱カウンター流を利用し、臨界離脱速度の温度依存性の観測は行われている⁽⁶⁾。熱カウンター流とは、超流動ヘリウムを満たした閉じた水路の端を熱すると、超流体と常流体が逆向きに流れ、熱平衡を保とうとする現象である(図13)。水路の片側は閉じているため、その正味の質量流束は次式を満たす。

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s = 0 \quad (6)$$

この熱カウンター流を想定して、臨界離脱速度を求め、実験結果と比較する。温度変化は式(4)における α と、式(6)における ρ_s 、 ρ_n を変化させることにより取り入れた。突起上の渦糸の数は1本とし、初期形状として突起の頂上に直立している。また、水路の高さ D の実験条件との違いは、動的スケーリングを表す次式を用いて換算した⁽⁸⁾。

$$v = \frac{D^*}{D} v^* \quad (7)$$

この式により、管径 D^* に対する臨界速度が v^* であれば、管径 D の臨界速度が v で与えられる。結果を図14に示す。○が計算値、●が実験値であるが、両者の一致はおおむね良い。これらは、前章までの計算結果の妥当性を裏付けている。

図13 熱カウンター流

図14 臨界離脱速度の温度依存性

7. 結 言

本研究では、超流動乱流遷移に大きな影響を及ぼす量子渦のピンニングに関して、超流動速度場、常流動速度場を加えて数値計算を行った。

- (1) 突起上に渦糸が1本および2本ある場合について、他の1本の渦糸がその突起に衝突する初期位置の領域、および超流動速度場印加によるその領域の変化について調べた。
- (2) 渦糸の捕獲に関する突起の容量は5本であり、突起の半径にはほとんど依存しない。また、突起上に1～5本の渦糸がある場合、超流動速度場の臨界離脱速度を調べ、その渦糸の本数に対する依存性の機構を明らかにした。
- (3) 熱カウンター流を想定し、超流動、常流動速度場の臨界離脱速度を調べた。その結果は実験結果と良く一致し、本数値計算の妥当性を支持している。

終わりに臨み、図面作成に当たり、本研究所 三浦紀重技官の助力を、および原稿作成に当たり、浅野泉事務補佐員の助力を得たので、謝意を表する。本研究の数値計算は、東北大学流体科学研究所スーパーコンピュータセンターのCRAY Y-MP8を用いて行われた。

文 献

- (1) 坪田, ターボ機械, **21**-5 (1993), 314.
- (2) Hegde, S.G., and Glaberson, W.I., Phys. Rev.Lett., **45**-3 (1980), 190.
- (3) 坪田・前川, 機論, **59**-560, B(1993), 1012.
- (4) Tsubota, M. and Maekawa, S., Phys. Rev., **B47**-18 (1993), 12040.
- (5) Tsubota, M., Phys. Rev., **B50**-1 (1994), 579.
- (6) Yarmchuk, E.J. and Glaberson, W.I., J. Low Temp. Phys., **36** (1979), 381.
- (7) Schwarz, K.W., Phys. Rev., **B31**-9 (1985), 5782.
- (8) Schwarz, K.W., Phys. Rev., **B38**-4 (1988), 2398.