ウェーブレット変換による乱流後流の解析*

石川 仁^{*1}, 木谷 勝^{*2}, 望月 修^{*2}

Analysis of a Turbulent Wake by the Wavelet Transform

Hitoshi ISHIKAWA, Masaru KIYA and Osamu MOCHIZUKI

Time histories of longitudinal velocity fluctuations in the intermediate and far regions of the turbulent wake of a two-dimensional circular cylinder are analyzed by the wavelet transform employing the antisymmetric, Mexican-hat and Morlet wavelets. Contours of the wavelet transform in the (a, b) parameter space, where a is the scale and b is the temporal location of the center of the wavelet, are found to be basically similar for the three wavelets if the a - and b -axes are properly translated. This is particularly true for the Mexican-hat wavelet and the real part of the Morlet wavelet, both of which are symmetric with respect to the location b . The contours demonstrate the periodic velocity fluctuation associated with the Kármán vortex street in the intermediate wake, the low-frequency modulation of the vortices in the vortex street, and the multi-scale structure in the far wake. The Morlet wavelet yields the most detailed multi-scale structure of the velocity fluctuations among the three wavelets.

Key Words: Fluid Dynamics, Wavelet Transform, Morlet Wavelet, Turbulent Wake, Turbulence, Kármán Vortex Street, Organized Structure

1. 緒 言

乱流研究の主要な課題の一つは、組織構造の解明である。本論文では円柱の乱流後流を取り上げる。円柱の乱流後流は、三つの領域に分けて考えることができる。円柱の近傍領域(近傍後流)で、大規模な渦が形成され、周期的に放出される。円柱直径の数倍～十数倍下流の領域(中間後流)では、放出された渦がカルマン渦列を形成し、これによる周期的速度変動には不規則な乱流成分が重畳されている。さらに下流の領域(遠方後流)においては、カルマン渦列が崩壊し十分に発達した乱流後流が形成される。近傍後流における渦の形成と放出の過程は完全に周期的ではなく、放出周波数、循環、渦核半径、その中心位置等が時間的に変動する。このような変動はカルマン渦列の揺らぎであり、中間後流および遠方後流の速度変動に、渦放出周波数に比較して周波数の低い成分(低周波非定常性と呼ぶ)を与えることになる。ウェーブレット変換はこの速度変動の階層構造をとらえるのに有効な方法である⁽¹⁾⁽²⁾。こ

の信号処理方法の大きな特徴は、さまざまなスケールの変動を、局所的な時間軸情報を失うことなく抽出できることにある。

本論文では、中間後流および遠方後流の速度変動波形に対し、ウェーブレット変換による解析を行った結果について述べる。換言すれば、ウェーブレット変換を通してみた乱流後流の速度変動の構造を明らかにする。ウェーブレット変換の一つの問題点は、これによって抽出された構造がウェーブレットの形に依存することである。本論文では、同一の速度変動波形に対し、3種類のウェーブレットを用いて解析を行い、抽出された乱流構造に及ぼすウェーブレットの影響を明らかにする。特に乱流構造のうち、ウェーブレットによって変化する構造と変化しない構造について議論する。

2. 実験装置および方法

実験には、断面が300 mm×300 mm、長さが1 005 mmの試験部をもつ吸込型風洞を使用した。主流速度が5～20 m/sのときに、主流乱れ度は0.3%以下であった。

実験に用いた円柱は、直径 $d=10$ mmの真ちゅう製である。円柱のスパンは、風洞試験部の幅と一致させてあるので、アスペクト比は30.0、拘束比は3.3%

* 原稿受付 1994年9月8日。

^{*1} 准員, 北海道大学大学院 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。^{*2} 正員, 北海道大学工学部。

図 1 座標系および記号の定義

である。なお端板は使用していない。後流の時間平均速度は、風洞壁の境界層(約 3～4 cm)を除けば良好な二次元性を保っている。

図 1 に、本論文で使用する座標系とおもな記号の定義を示す。円柱中心を座標軸の原点にとり、主流方向に x 軸、円柱のスパン方向と主流方向の両者に直角に y 軸をとる。主流の速度を U_0 、 x 方向の時間平均速度を U 、速度変動成分を u 、変動成分の rms 値を u' とする。本実験におけるレイノルズ数 $Re (= U_0 d / \nu)$ 、 ν : 動粘性係数)は 1.0×10^4 に固定した。

速度変動の測定は定温度形熱線流速計 (KANOMAX 社製) によって駆動される I 形熱線プローブで測定し、直線化器を通したあとで、10 kHz のサンプリング周波数で離散化した。離散化されたデータは磁気ディスクに記録し、ワークステーションによって解析した。

測定を行った主流方向位置は、中間後流として $x/d = 8$ 、遠方後流として $x/d = 50$ である。

3. ウェーブレット変換

時系列信号 $s(t)$ (t : 時間) のウェーブレット変換は、次式で定義される。

$$W(a, b) = \frac{1}{a^{1/2}} \int \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

$W(a, b)$ はウェーブレット係数 (以下、 W 係数と呼ぶ)、 $\phi(t)$ はウェーブレットと呼ばれる基準波形である。 a はウェーブレットのスケール、すなわち時間軸上での幅を表すパラメータであり、これを変化させることにより、信号中のさまざまなスケールの変動を抽出できる。 b は時間軸上の位置のパラメータで、これを増加させるとともにウェーブレットは解析対象とする時系列信号の時間軸に沿って平行移動していく。これにより信号中の時間軸情報を失うことなく、さまざまなスケールの変動成分を抽出できることになる。

ウェーブレット変換には、ウェーブレットの形に依

図 2 反対称ウェーブレット ($k=1$)

図 3 Mexican hat ウェーブレット

図 4 Morlet ウェーブレット ($k=6$)
(—: 実数部, ----: 虚数部)

存しない普遍的な性質と、その形に左右される個別的な性質が存在すると考えられる⁽³⁾。本論文では、3 種類のウェーブレットを用いて解析を行った。第 1 のウェーブレットは

$$\phi(T) = \sin(2T) \exp(-T^2/k^2) \dots\dots\dots (2)$$

$$T = \frac{t-b}{a} \dots\dots\dots (3)$$

によって定義される反対称ウェーブレット⁽⁴⁾である。その波形を図 2 で示す。 k はウェーブレットの減衰の強さを決めるパラメータであり、本論文では、 $k=1$ とした⁽⁴⁾。

第 2 のウェーブレットは

$$\phi(T) = (1-T^2) \exp(-|T|^2/2) \dots\dots\dots (4)$$

によって定義される Mexican hat ウェーブレットで

ある。これはガウス分布を2回微分して得られるもので、その波形を図3に示す。Higuchi⁽⁵⁾らは Mexican hat ウェーブレットを用いて、2枚の垂直平板の渦列後流の解析を行っている。

これら二つのウェーブレットはいずれも実数のみにより構成されている。これに対し第3のウェーブレットとして複素関数の Morlet のウェーブレット⁽⁶⁾を採用した。これは実数のウェーブレットに比較して、より多くの情報を抽出できる。Morlet ウェーブレットは、

$$\psi(T) = \exp(\sqrt{-1}k_\psi \cdot T) \exp(-|T|^2/2) \cdots \cdots (5)$$

によって定義される。図4に Morlet のウェーブレットの実数部と虚数部を示す。このウェーブレット変換の実数部、虚数部から実数、絶対値、位相の情報が得られる。 k_ψ はウェーブレットの中の振幅変調された正弦波の周波数を表すもので、本研究では $k_\psi=6$ とした⁽⁶⁾。

4. 実験結果および考察

以下に中間後流および遠方後流の代表的な点における、速度変動波形のウェーブレット変換による解析結果を示す。

4・1 中間後流 図5に中間後流領域の $x/d=8$ における時間平均速度 U と乱れ強さ u' の分布を示す。 $y/d=0.7$ 付近に乱れ強さの極大値がある。

図6は、乱れ強さ最大の位置の近傍($x/d=8$, $y/d=1$)における速度変動波形のパワースペクトルを示す。このスペクトルにみられる鋭いピークはカルマン渦列によるもので、ピークの周期 f_k は約300 Hzである。このピーク周波数のまわりの周波数にもエネルギーが分布していることから、この速度変動にカルマン渦列による周期成分と、不規則成分が重畳されていることがわかる。この意味で中間後流における組織構造は、カルマン渦列中の渦(カルマン渦と呼ぶ)である。

この速度変動波形に、反対称ウェーブレットによる

図5 中間後流($x/d=8$)における平均速度分布(Δ)および乱れ強さ分布($\circ$)

図6 中間後流における速度変動のパワースペクトル($x/d=8$, $y/d=1$)

図7 中間後流($x/d=8$, $y/d=1$)の速度変動のウェーブレット変換(反対称ウェーブレット)。W係数の正の値のみ表示

解析を行った結果を、ウェーブレット係数 $W(a, b)$ の等高線図の形で図 7 に示す。縦軸はスケールパラメータ a を、対数目盛で下向に方向に増加するようにとっている。対数目盛にするのは、小さいスケールの挙動をわかりやすく表現するためである。縦軸の最小のスケールを $a_{\min}=2.0\Delta t$ ($\Delta t=0.1$ ms は速度変動の離散化の時間間隔) としている。 $a_{\min}$ の大きさについては後に述べる。横軸は時間軸上のウェーブレットの中心位置 b であり、図 7 中には正の W 係数のみが示されている。最も外側の等高線は $W(a, b)=0$ に対応する。また参考のため等高線図の下側に速度変動波形を示している。

$a/\Delta t \div 11$ に、 W 係数の極大値が時間軸 (b 軸) 上に等間隔に現れている。この時間間隔は、カルマン渦列の周期 ($1/f_k$) に一致するので、 W 係数の極大値はカルマン渦に対応することがわかる。 a の大きな領域 ($a/\Delta t \geq 30$) における等高線は、カルマン渦に低周波の揺らぎ (渦の放出周波数、循環、渦核半径、中心位置などの変化) があること、この揺らぎが階層構造をもつことを示唆している。ここで揺らぎの階層構造と呼んでいるのは、例えば図 7 で横軸 $b/\Delta t=130 \sim 210$ では 3 個の渦が連続に変化しているのに対し、 $b/\Delta t=250 \sim 300$ では 2 個の渦が連続に変化しているような構造のことである。

図 7 と同一の速度変動を、Mexican hat ウェーブレットによって解析した結果を図 8 に示す。図 7 と図 8 の W 係数の分布は、ウェーブレットの形に違いにもかかわらず良好な類似性を示している。すなわち、図 8 のパターンを下側 (a の大きな方向) および左側 (b の小さな方向) に適当に移動すると、図 7 のパターン

とほぼ重なってしまう。したがって反対称ウェーブレットと Mexican hat は同一の特徴をもつ W 係数のパターンを与えるといつてよい。カルマン渦に対応するウェーブレット係数の極大値は、 $a/\Delta t=9$ のスケールに現れている。この a の値が図 7 のそれと異なるのは、ウェーブレットの形の違いによる。また、図 8 におけるこれらの極大値は、図 7 では W 係数が負となる b の領域に現れている。これは二つのウェーブレットの形から容易に理解することができる。

図 7 および図 8 には、それぞれ $a/\Delta t \geq 30$ および $a/\Delta t \geq 20$ のスケールにおいて、カルマン渦による周期的速度変動が低周波の揺らぎによって変調を受けていることを示す等高線のパターンが認められる。しかもこの揺らぎはスケール a について階層構造をもっていることがわかる。すでに 1 章において述べたように、カルマン渦列の揺らぎは渦の放出周期、循環、半径、中心位置等の変動が重なり合ったものと考えられる。しかし本論文では後流内の単独の固定位置での速度変動を解析しているので、この揺らぎの原因を特定することはできない。重要な点は、揺らぎが連続した 2～4 のカルマン渦にわたって発生するようにみえることである。この点は中間後流の基本的特性の一つとして、今後のさらに詳細な研究に値するものと考えられる。

図 9 は同じ速度変動を Morlet ウェーブレットによって解析した結果である。図 9 (a)～(c) はそれぞれ W 係数の実数部、絶対値および位相の等高線パターンを示す。カルマン渦に対応する等高線分布のピークは $a/\Delta t \div 30$ に極めて明確に現れている。絶対値の等高線は速度変動のエネルギー分布を表すと解釈できる

図 8 中間後流 ($x/d=8$, $y/d=1$) の速度変動のウェーブレット変換 (Mexican hat ウェーブレット)

図 9 中間後流($x/d=8$, $y/d=1$)の速度変動のウェーブレット変換
(Morlet ウェーブレット) [(a)実数部, (b)絶対値, (c)位相]

が, これは図 9 (b)にみられるように $a/\Delta t \div 30$ にピークをもつ分布を示している。このことは中間後流において最も大きなエネルギーをもつ構造はカルマン渦であることに対応する。

Morlet ウェーブレットの特徴は, 反対称および Mexican hat ウェーブレットに比較して, スケール a に関する分岐構造がより明確に現れることである [図 9 (a), (c)]。Morlet ウェーブレットの実数部は中心(図 4 の $T=0$)に関して対称であるから, その W 係数の等高線分布を, もう一つの対称ウェーブレットである Mexican hat ウェーブレットと比較してみる。

図 10 中間後流における速度変動のパワースペクトル
($x/d=8$, $y/d=0$)

図8の $a/\Delta t=9$ が図9の $a/\Delta t=30$ と一致するように両者を縦軸に平行に移動するとカルマン渦に対応するピークはほとんど完全に一致する。またこれよりスケール a の大きな領域および小さな領域の等高線のパターンも大局的によく対応しており, Morlet ウェーブレットに対する等高線分布は, Mexican hat ウェーブレットに対するその内部構造を表現しているように見える。したがって速度変動のスケールの階層構造を調べるには, 本論文で調べた3種類のウェーブレットのうちで Morlet のウェーブレットが最適であるといつてよい。

ここでスケール a の最小値 $a_{\min}$ にふれておく。反対称および Mexican hat ウェーブレットでは $a_{\min}/\Delta t=2.0$, Morlet ウェーブレットでは $a_{\min}/\Delta t=5.0$ である。 $a=a_{\min}$ のとき, 反対称および Mexican hat ウェーブレットでは, 一つのウェーブレットをそれぞれ約8点および16点の離散点で近似していることになる。また Morlet ウェーブレットでは振幅変調された一つの正弦波を約5点の離散点で近似している(ウェーブレット全体では約30点)。この離散データ数はウェーブレットの形を近似するには十分な精度をもっている。

図10に中間後流の後流中心($x/d=8$, $y/d=0$)にお

図11 中間後流($x/d=8$, $y/d=0$)の速度変動のウェーブレット変換 (Mexican hat ウェーブレット)

図12 中間後流($x/d=8$, $y/d=0$)の速度変動のウェーブレット変換 (Morlet ウェーブレット) [(a)実数部, (b)絶対値]

ける速度変動のパワースペクトルを示す。このスペクトルには、カルマン渦列の上下の渦を通過を示すピーク(周波数 $2f_k$)がある。これに対応して Mexican hat ウェーブレット変換の等高線のパターン(図 11)にも、 $a/\Delta t=5$ のスケールにほぼ等間隔に並んだ極大値の列が認められる。また $2f_k$ を中心とする周波数領域に含まれる速度変動エネルギーが、より外側の位置($x/d=8$, $y/d=1$)のそれ(図 6)に比較して、相対的に増加するために、 $5 < a/\Delta t < 20$ における等高線の分岐状態は、図 11 のほうが図 8 よりも複雑になっている。しかし、 $a/\Delta t \geq 30$ のスケールの等高線の構造は、二つの点の速度変動の間で大きな違いはない。ここには示していないが、上述の特性は反対称ウェーブレットについても同様であった。

図 12 は図 11 と同じ中間後流中心の速度変動に Morlet のウェーブレットを適用した結果である。ここには実数部、絶対値の分布のみを示してある。実数部[図 12(a)] には、 $2f_k$ の周波数に対応する $a/\Delta t \div 15$

のスケールの等高線のピークが極めて明りょうに現れているとともに、 f_k の周波数に対応する $a/\Delta t \div 30$ の等高線のピークも認められる。後者は Mexican hat ウェーブレットでははっきりしなかったものである。図 9 と同様に後流内の速度変動のスケールの階層構造が、Morlet ウェーブレットによってより詳細に表現されている。ウェーブレット変換の絶対値[図 12(b)] の分布は、 $a/\Delta t \div 15, 30 \sim 40, 60 \sim 80$, および $120 \sim 150$ の四つのスケールの領域に極大値があることを示している。これらはカルマン渦の周波数 f_k を基準にすれば、それぞれ約 $2f_k$, f_k , $f_k/2$, および $f_k/4$ の周波数に対応する。

4・2 遠方後流 図 13 に遠方後流に属する位置 $x/d=50$ における平均速度、および乱れの分布を示す。この領域の平均速度は、Schlichting⁽⁷⁾ による解と良好な一致を示す。乱れ強さの相似性(遠方後流における相似性)は、平均速度ほど良好ではなかった。なお、遠方後流の平均速度分布、乱れの相似性に関する研究は Wagnanski⁽⁸⁾ ら、Cimbara⁽⁹⁾ らによって行われているが、これらの研究は $x/d > 150$ の領域についてのものであるため、本研究における $x/d=50$ の結果と比較することは困難であった。この位置における速度変動のパワースペクトルは明確なピークをもたないので、中間後流にみられたカルマン渦列はここでは崩壊しているように見える。しかし、この領域でもカルマン渦列の影響が残っている可能性があるので、外層領域の速度変動の解析を行った。後流の外層領域 $y/d=4$ における速度変動波形に、反対称ウェーブレットおよび Morlet ウェーブレットによる解析を行った結果を図 14 および図 15 に示す。図 14 の等高線のパターンに

図 13 遠方後流($x/d=50$)における平均速度分布(Δ) および乱れ強さ分布($\circ$)

図 14 遠方後流($x/d=50$, $y/d=4$)の速度変動のウェーブレット変換 (反対称ウェーブレット)

図 15 遠方後流($x/d=50$, $y/d=4$)の速度変動のウェーブレット変換 (Morlet ウェーブレット) [(a)実数部, (b)絶対値]

は、いかなるスケール a においても周期的に現れる極大値は存在しない。このことはパワースペクトルに特定のピークがないことに対応する。しかし Morlet ウェーブレット変換の実数部 [図 15(a)] の等高線分布を詳細にみると、 $a/\Delta t=20\sim30$ のスケールの範囲に、かなり周期的に実数部の正の領域が出現している。これに対応して、絶対値の分布 [図 15(b)] にも $a/\Delta t=20\sim30$ に極大値が現れている。このことは遠方後流の外層領域においてはカルマン渦列の速度変動の名残がありうることを示唆している。Mexican hat ウェーブレットにはこのような特性は認められないので、Morlet ウェーブレットはより詳細に速度変動の階層構造を表現できるといってよい。また Morlet ウェーブレット変換の実数部 [図 15(b)] には、 $a/\Delta t=60\sim80$ の範囲に極大値がみられる。このスケールの範囲における極大値は、中間後流中心の速度変動 [図 12(b)] にも現れている。したがって、ウェーブレット変換は中間後流と遠方後流の関係を調べるための有力な方法となりうる可能性がある。なお、Wynanski⁽⁸⁾ ら、Cimbala⁽⁹⁾ らの研究では、遠方後流での速度分布の不安定に基づく渦列の形成が示されている。 $a/\Delta t=60\sim80$ に対応する極大値 [図 15(b)] がこのような不安定

性と関係があるかどうかは、今後の興味深い課題である。

5. 結 論

本論文では円柱の乱流後流(中間後流および遠方後流)の代表的な数点における速度変動を、反対称ウェーブレット、Mexican hat ウェーブレットおよび Morlet ウェーブレットの 3 種類のウェーブレット変換によって解析した。そのおもな結果を要約すれば、次のとおりである。

- (1) カルマン渦列のような大きなエネルギーをもつ組織構造は、いずれのウェーブレットによっても明確に抽出できる。この構造に対応するウェーブレット変換のパターンはほぼ同一である。
- (2) カルマン渦列の周期よりもはるかに時間スケールの大きな変動についても、反対称ウェーブレット、および Mexican hat ウェーブレットによる変換のパターンは、時間スケールおよび時間軸の適当な平行移動によってほぼ重ね合わせることができる。したがって時間スケールの大きな流れの構造についても、これら二つのウェーブレットはほぼ共通のパターンを与える。

(3) Morlet ウェーブレット変換の実数部は(2)の時間スケールの大きな構造のさらに詳細な内部構造を与えることができる。このことは Mexican hat ウェーブレットとの比較において特に明りょうである。

(4) Morlet ウェーブレットは、他の二つのウェーブレットに比較して、速度変動の広い時間スケールにわたる階層構造を、より明確に表現できる。

(5) 本論文で対象とした乱流後流中の速度変動波形の解析には、3種類のウェーブレットのうちで Morlet ウェーブレットが最適である。

文 献

(1) Bacry, E., Arnéodo, A., Frisch, U., Gagne, Y. and

Hopfinger, E. *Turbulence and Coherent Structures*, Lesieur, O. and Metais, O. eds., (1990), 203, Kluwer Academic Publisher.

(2) Yamada, M. and Ohkitani, K., *Prog. Theor. Phys.*, **83** (1990), 819.

(3) 大田黒, 数理科学, 354(1992), 12-23.

(4) 飯田・萩原・小河原, 機論, **59**-563, B(1993), 2117.

(5) Higuchi, H., Lewalle, J. and Crane, P., *Phys. Fluids*, **6** (1994).

(6) Farge, M., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**(1992), 395.

(7) *Schlichting, Boundary-Layer Theory*, 7th Ed. (1979), 733, McGRAW-HILL BOOK COMPANY.

(8) Wygnanski, I., Champagne, F. and Marashi, B., *J. Fluid Mech.*, **168**(1986), 31.

(9) Cimbala, J. M., Nagib, H. M. and Roshko, A., *J. Fluid Mech.*, **190**(1988), 265.