管内気柱振動におけるストークス層内音響流流速分布の解析*

荒川 雅 裕^{*1}, 川 橋 正 昭^{*2}Velocity Profiles of Acoustic Streaming in Resulting Stokes Layer
by Acoustic Standing Wave in a Duct

Masahiro ARAKAWA and Masaaki KAWAHASHI

Acoustic streaming is generated by Reynolds stress in the sense of mean acoustic momentum flux in a sound field. In the case of an acoustic standing wave produced by an air column oscillation in a closed duct, the friction and the Reynolds stress in the resulting Stokes layer are the essentials of acoustic streaming generation in the vicinity of the duct wall. The thickness of the Stokes layer decreases with the oscillatory Reynolds number. The plane wave propagation in the duct is assumed for the case of high Reynolds number except for the thin Stokes layer adjacent to the duct wall. The velocity profiles of the streaming are estimated theoretically from the steady component of the second-order term of a perturbation expansion in which the first-order approximation is a sinusoidal oscillation of the air column with plane waves. The present paper describes theoretical analysis of the velocity profiles of the acoustic streaming in the Stokes layer by means of the matched asymptotic expansion method. The results obtained show the existence of reverse streaming in a very thin layer adjacent to the wall and the effects of thermal boundary conditions at the wall on the velocity profiles of acoustic streaming in the Stokes layer.

Key Words: Acoustic Streaming, Standing Wave, Oscillatory Flow, Stokes Layer, Perturbation Method

1. 緒 言

管内音響定在波における音響流の発生については、古くはクント管の実験に端を発する Load Rayleigh の解析⁽¹⁾にはじまり、その後多くの研究者に関心をもちたれてきた。近年になって、Lighthill による詳細な解説⁽²⁾にもあるように、改めてその現象の工学的重要性が認識されるようになった。

管内定在波によって誘起される音響流の流速の大きさや、音響流によって管内に形成される定常循環流の構造などについては、今日まで基本的には Rayleigh の解析結果がそのまま受け入れられてきており、Andrade による可視化結果⁽³⁾や最近発展してきた画像処理流速計測法を適用した音響流流速計測結果⁽⁴⁾も、間接的にそれを裏づけている。しかし、Rayleigh の解析は、竹光の解説⁽⁵⁾にもあるように境界層の概念が確立する以前のものであり、管壁近傍に形成されるストークス層内での音響流の構造については十分議論されていない。なかでも、壁近傍に音響流の反転層が存在するかどうかの問題はいまだに解決されていない。

一方、音響流が工学的問題として扱われるときの管内の波動状態の多くは、ストークス数が大きく、形成されるストークス層厚さが極めて薄くなること、衝撃波伝ばを伴う有限振幅波動状態となること、などの特徴を有している。さらに、この現象が音響定在波圧縮機や熱音響冷凍機などへの応用に関連して議論されるとき、壁近傍の音響流流速や壁温度境界条件による音響流構造の変化などが重要となる。したがって、改めてストークス層内の音響流構造や、有限振幅波動時における音響流についての解析が必要である。

著者らは、衝撃波伝ばを伴う有限振幅波動によって誘起される音響流についての数値解析⁽⁶⁾により、振幅増加による音響流構造の変化について明らかにしてきた。さらにその解析結果は、壁近傍に音響流の反転層が存在することを示している。そこで、本研究では、ストークス層内の音響流構造の詳細を明らかにし、壁近傍での音響流反転層の存在の可能性を検討するとともに、併せて壁の熱的境界条件の違いが音響流構造に与える影響を検討するため、理論解析を行った。

2. 解 析

2・1 解析モデルおよび基礎方程式 本解析では、図1(a)に示すような二次元ダクト内に音響定在波が

* 原稿受付 1994年12月13日。

*¹ 正員、埼玉大学大学院 (〒338 浦和市下大久保 255)。*² 正員、埼玉大学工学部。

図 1 計算モデルおよび座標系

生じているものとし、定在波によって誘起される音響流について解析を行う。ここで、平行平板間距離を $2h^*$ とし、壁面に平行な方向に X^* 軸、壁面に垂直な方向に Y^* 軸をとり、それぞれの方向の速度成分を U^* , V^* とする。なお、平板間 X^* 座標方向には、図 1(b) のような変動速度振幅分布 U_{1-amp} を有する定在波が生じているものと仮定する(ここで、 λ^* は定在波の波長である)。

ダクト内波動状態を表すパラメータとしては、以下に示すストークス数 s と無次元周波数 k がある⁽⁷⁾。

$$s = \frac{h^*}{(\nu^*/\omega^*)^{1/2}}, \quad k = \frac{\omega^* h^*}{a_0^*} \quad (1)$$

本論文での解析対象は、伝ば音の波長がダクト幅に比べて大きく、ダクト内の大部分の領域で平面波が伝ばし、上下壁近傍に薄いストークス層が形成される波動状態である。このような条件では、ストークス数および無次元周波数の値は、それぞれ

$$s \gg 1, \quad k < 1 \quad (2)$$

となる。したがって、この現象を支配する基礎方程式を後で述べるような無次元化を行うと、方程式中に微小パラメータ ($1/s$) が現れる。この微小パラメータによる各物理量の漸近展開を得、速度の二次の項の定常分として音響流を得る。しかし、ここでは特異摂動問題となることから、接合漸近展開法が適用される⁽⁸⁾。

なお、ストークス層厚さ δ^* は Lighthill⁽²⁾ に従い、以下の式で与えられる。

$$\delta^* = 5 \left(\frac{\nu^*}{\omega^*} \right)^{1/2} \quad (3)$$

本解析における基礎方程式は、非定常圧縮ナビエ・

ストークス方程式と連続式およびエネルギー式である。これらの方程式における速度 U^* , V^* は常温での音速 a_0^* で、時間 t^* は音波の角周波数の逆数 $1/\omega^*$ で、座標 X^* , Y^* をそれぞれ a_0^*/ω^* , h^* で、圧力は常温での大気圧、また、密度、温度は常温での各値で無次元化される。そして、無次元化された速度、圧力、密度、温度、時間、位置座標をそれぞれ U , V , P , ρ , T , t , X , Y で表すと方程式は保存系により以下のように表される。

連続式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial \rho V}{\partial Y} = 0 \quad (4)$$

運動方程式 (X 方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho U U) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial Y}(\rho U V) \\ = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{s^2} \left\{ k^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} \\ + \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{k^2}{3} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) + k \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right. \\ \left. - \frac{2k}{3} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

運動方程式 (Y 方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho U V) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial Y}(\rho V V) \\ = -\frac{1}{k\gamma} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{s^2} \left\{ k^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right\} \\ + \frac{1}{s^2} \left\{ k \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - \frac{2k}{3} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

エネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho U T) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial Y}(\rho V T) \right\} \\ = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{k} V \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \\ + \frac{1}{(\gamma-1)Prs^2} \left\{ k^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \right\} \\ + \Phi_0 \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \frac{k^2}{s^2} \mu \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (8) \end{aligned}$$

なお、 γ は比熱比であり、また、Stokes の関係が用いられている。

2.2 内部領域と外部領域における支配式

2.2.1 外部展開 初めに、ストークス層を除く領域、すなわち外部領域についての支配式を示す。 $s \gg 1$ より、微小パラメータ ε が以下のように定義される。

$$\varepsilon = \frac{1}{s} \dots\dots\dots (9)$$

ダクト内の壁近傍を除く領域は平面波伝ばの定在波状態であると仮定すれば、波動による壁面垂直方向の変動流速は零である。これより各物理量について以下のような漸近展開式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U_o(X, Y, t) &= \varepsilon U_{o,1}(X, Y, t) \\ &+ \varepsilon^2 U_{o,2}(X, Y, t) + \dots \\ V_o(X, Y, t) &= \varepsilon^2 V_{o,2}(X, Y, t) + \dots \\ \rho_o(X, Y, t) &= 1 + \varepsilon \rho_{o,1}(X, Y, t) \\ &+ \varepsilon^2 \rho_{o,2}(X, Y, t) + \dots \\ T_o(X, Y, t) &= 1 + \varepsilon T_{o,1}(X, Y, t) \\ &+ \varepsilon^2 T_{o,2}(X, Y, t) + \dots \\ P_o(X, Y, t) &= 1 + \varepsilon P_{o,1}(X, Y, t) \\ &+ \varepsilon^2 P_{o,2}(X, Y, t) + \dots \\ \mu_o(X, Y, t) &= 1 + \varepsilon \mu_{o,1}(X, Y, t) \\ &+ \varepsilon^2 \mu_{o,2}(X, Y, t) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、添字の o は外部領域を、また 1, 2 は各オーダーを示す。式(10)を式(4)~(8)に代入し、 ε^1 のオーダーについてまとめると以下の式が得られる。

連続式

$$\frac{\partial \rho_{o,1}}{\partial t} + \frac{\partial U_{o,1}}{\partial X} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

運動方程式(X 方向)

$$\frac{\partial U_{o,1}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{o,1}}{\partial X} \dots\dots\dots (12)$$

エネルギー式

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial T_{o,1}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{o,1}}{\partial t} \dots\dots\dots (13)$$

2.2.2 内部展開 壁面近傍のストークス層内の解析では、以下のような境界層座標 η が導入される。

$$\eta = \frac{Y}{1/s} = \frac{Y}{\varepsilon} \dots\dots\dots (14)$$

この座標変換により、式(14)を式(4)~(8)に代入すると、内部領域での基礎方程式が得られる。また、外部領域と同様に、内部領域についての各物理量の漸近展開が得られるが、連続式の形から、

$$O(V_i) = \varepsilon O(U_i) \dots\dots\dots (15)$$

となるため、展開式は以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_i(X, \eta, t) &= \varepsilon U_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^2 U_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \\ V_i(X, \eta, t) &= \varepsilon^2 V_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^3 V_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \\ \rho_i(X, \eta, t) &= 1 + \varepsilon \rho_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^2 \rho_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \\ T_i(X, \eta, t) &= 1 + \varepsilon T_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^2 T_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \\ P_i(X, \eta, t) &= 1 + \varepsilon P_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^2 P_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \\ \mu_i(X, \eta, t) &= 1 + \varepsilon \mu_{i,1}(X, \eta, t) \\ &+ \varepsilon^2 \mu_{i,2}(X, \eta, t) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、添字 i は内部領域での値であることを示す。これより、内部領域の基礎式に式(16)を代入すると、以下の $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ のオーダーの式が得られる。

(1) ε^1 のオーダー

連続式

$$\frac{\partial \rho_{i,1}}{\partial t} + \frac{\partial U_{i,1}}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial V_{i,1}}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

運動方程式(X 方向)

$$\frac{\partial U_{i,1}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{i,1}}{\partial X} + \frac{\partial^2 U_{i,1}}{\partial \eta^2} \dots\dots\dots (18)$$

運動方程式(η 方向)

$$0 = -\frac{1}{k\gamma} \frac{\partial P_{i,1}}{\partial \eta} \dots\dots\dots (19)$$

エネルギー方程式

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial T_{i,1}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{i,1}}{\partial t} + \frac{1}{(\gamma-1)Pr} \frac{\partial^2 T_{i,1}}{\partial \eta^2} \dots\dots\dots (20)$$

(2) ε^2 のオーダー 音響流は定常流であることから、二次のオーダーでは定常成分のみ考えると、以下の式が得られる。

連続式

$$\frac{\partial \overline{U_{i,2}}}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial \overline{V_{i,2}}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \overline{\rho_{i,1} U_{i,1}}}{\partial X} - \frac{1}{k} \frac{\partial \overline{\rho_{i,1} V_{i,1}}}{\partial \eta} \dots\dots\dots (21)$$

運動方程式(X 方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{U_{i,2}}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \overline{P_{i,2}}}{\partial X} &= \frac{\partial \overline{U_{i,1} U_{i,1}}}{\partial X} + \frac{1}{k} \frac{\partial \overline{U_{i,1} V_{i,1}}}{\partial \eta} \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\overline{\mu_{i,1}} \frac{\partial U_{i,1}}{\partial \eta} \right) \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

運動方程式(η 方向)

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \overline{P_{i,2}}}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

これらの外部展開および内部展開より各オーダーの解が

外部領域一次 → 内部領域一次 → 内部領域二次

の順で解析される。また、外部領域と内部領域の接合条件は以下のとおりである。

(外部領域での $Y=0$ の値)

= (内部領域での $\eta \rightarrow \infty$ の値)

2・2・3 ストークス層内の音響流速分布の解析

(1) 外部領域一次の解 外部領域では平面波解が得られ、定在波の速度変動成分 $U_{o,1}$ は以下のように表される。

$$U_{o,1} = \frac{A}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{it} \quad (24)$$

ここで、 A は定数とする。式(11)～(13)から、この領域での各値は以下で与えられる。

$$\rho_{o,1} = -\frac{A}{2i} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{it} \quad (25)$$

$$P_{o,1} = -\frac{\gamma A}{2i} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{it} \quad (26)$$

$$T_{o,1} = -\frac{(\gamma-1)A}{2i} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{it} \quad (27)$$

(2) 内部領域一次の解 式(19)より、以下の式が成立する。

$$P_{i,1}(X) = P_{o,1}(X) \quad (28)$$

また、各物理量を以下のようにおく。

$$U_{i,1} = u_{i,1}(X, \eta) e^{it}, \quad V_{i,1} = v_{i,1}(X, \eta) e^{it},$$

$$P_{i,1} = \tilde{P}_{i,1}(X) e^{it}, \quad \rho_{i,1} = \tilde{\rho}_{i,1}(X, \eta) e^{it},$$

$$T_{i,1} = \tilde{T}_{i,1}(X, \eta) e^{it}, \quad \mu_{i,1} = \tilde{\mu}_{i,1}(X, \eta) e^{it}$$

そして、境界条件を

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 \text{ (壁面で)} \quad u_{i,1}=0 \\ \eta \rightarrow \infty \text{ (境界層外縁で)} \quad u_{i,1}=u_{o,1} \end{array} \right\} \quad (29)$$

とすると、式(17)より、 $u_{i,1}$ は以下となる。

$$u_{i,1} = \frac{i}{\gamma} \frac{\partial \tilde{P}_{i,1}}{\partial X} (1 - e^{-i^{1/2}\eta}) \quad (30)$$

その他の物理量 $v_{i,1}$, $\tilde{\rho}_{i,1}$, $\tilde{T}_{i,1}$, $\tilde{\mu}_{i,1}$ は壁面の熱的境界条件により異なる。本研究では断熱壁条件と等温壁条件に分けて解析を行った。

(i) 断熱壁の場合

壁面上の境界条件

$$\eta=0 \text{ で, } v_{i,1}=0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_{i,1}}{\partial \eta}=0, \quad \frac{\partial \tilde{T}_{i,1}}{\partial \eta}=0 \quad (31)$$

より、各物理量は以下となる。

$$v_{i,1} = k \frac{i^{1/2}}{\gamma} \tilde{P}_{i,1} (e^{-i^{1/2}\eta} - 1) \quad (32)$$

$$\tilde{\rho}_{i,1} = \frac{1}{\gamma} \tilde{P}_{i,1} \quad (33)$$

$$\tilde{T}_{i,1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{P}_{i,1} \quad (34)$$

$$\tilde{\mu}_{i,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+3\alpha}{1+\alpha} \tilde{T}_{i,1} \equiv K_{\mu} \tilde{T}_{i,1} \quad (35)$$

ここで、粘性係数 $\tilde{\mu}_{i,1}$ は、Sutherland の式⁽⁹⁾ のテーラー展開によって導かれる。また、 $\alpha = T_c^*/T_o^*$ であり、

T_c^* は Sutherland 式の定数で 117 K, T_o^* は常温である。

(ii) 等温壁の場合

壁面上の境界条件

$$\eta=0 \text{ で, } v_{i,1}=0, \quad \tilde{\rho}_{i,1}=0, \quad \tilde{T}_{i,1}=0 \quad (36)$$

より、各物理量は以下となる。

$$v_{i,1} = k \tilde{P}_{i,1} \frac{i^{1/2}}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma-1}{Pr^{1/2}} (e^{-i^{1/2}Pr^{1/2}\eta} - 1) + e^{-i^{1/2}\eta} - 1 \right\} \quad (37)$$

$$\tilde{\rho}_{i,1} = \tilde{P}_{i,1} \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} (1 - e^{-i^{1/2}Pr^{1/2}\eta}) \right\} \quad (38)$$

$$\tilde{T}_{i,1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{P}_{i,1} (1 - e^{-i^{1/2}Pr^{1/2}\eta}) \quad (39)$$

$\tilde{\mu}_{i,1}$ は式(35)と同式で与えられる。

また、これより、 $V_{i,1}$ の大きさは $U_{i,1}$ に比べて、 k のオーダーで小さいことが考察される。

(3) 内部領域二次の解 式(23)より、 $\overline{P_{i,2}}$ は X のみの関数となるから、式(22)は $\overline{U_{i,2}}$ (以後 $\overline{U_{i,2}}$ を $\overline{U_2}$ と書く) についての以下の式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{U_2}}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial X} (\overline{U_{i,1} U_{i,1}} - \overline{U_{o,1} U_{o,1}}) \\ &+ \frac{1}{k} \frac{\partial \overline{U_{i,1} V_{i,1}}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_{i,1} \frac{\partial \overline{U_{i,1}}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

上式を境界条件

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 \text{ で, } \overline{U_2}=0 \\ \eta \rightarrow \infty \text{ で, } \frac{\partial \overline{U_2}}{\partial \eta}=0 \end{array} \right\} \quad (41)$$

について、式(40)を積分すると $\overline{U_2}$ は以下となる。

$$\overline{U_2}(X, \eta) = P_{i,1} \frac{\partial \tilde{P}_{i,1}}{\partial X} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (42)$$

ここで、 I_1, I_2, I_3 はそれぞれ式(40)の

$$\frac{\partial (\overline{U_{i,1} U_{i,1}} - \overline{U_{o,1} U_{o,1}})}{\partial X},$$

$$\frac{\partial (\overline{U_{i,1} V_{i,1}})}{\partial \eta}, \quad -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_{i,1} \frac{\partial \overline{U_{i,1}}}{\partial \eta} \right)$$

によって誘起される音響流速である。これらは断熱条件と等温条件によって異なり、以下のようになる。

(i) 断熱壁の場合

$$I_1 = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ i(e^{-i^{1/2}\eta} - 1) - i(e^{i^{3/2}\eta} - 1) + \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{2}\eta} - 1) \right\} \quad (43)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{4\gamma^2} \left\{ -i^{3/2}(e^{-i^{1/2}\eta} - 1) + i^{1/2}(e^{i^{3/2}\eta} - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-\sqrt{2}\eta} - 1) \right\} \quad (44)$$

$$I_3 = \frac{1}{4} K_{\mu} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \left\{ -i(e^{-i^{1/2}\eta} - 1) + i(e^{i^{3/2}\eta} - 1) \right\} \quad (45)$$

(ii) 等温壁の場合

I_1 は式(43)と同一。

$$I_2 = \frac{1}{4\gamma^2} \times \left[\begin{aligned} & -i^{3/2} \left(\sqrt{2} + \frac{\gamma-1}{Pr^{1/2}} i^{1/2} \right) (e^{-i^{1/2}\eta} - 1) \\ & + \left(\sqrt{2} i^{1/2} + \frac{\gamma-1}{Pr^{1/2}} \right) (e^{i^{3/2}\eta} - 1) \\ & - (e^{-\sqrt{2}\eta} - 1) \\ & + \frac{\gamma-1}{iPr} (e^{-i^{1/2}Pr^{1/2}\eta} - 1) \\ & - \frac{\gamma-1}{iPr} (e^{i^{3/2}Pr^{1/2}\eta} - 1) \\ & + \frac{\gamma-1}{Pr^{1/2}} \cdot \frac{i}{Pr^{1/2}-i} (e^{i^{1/2}(-Pr^{1/2}+i)\eta} - 1) \\ & - \frac{\gamma-1}{Pr^{1/2}} \cdot \frac{i}{Pr^{1/2}+i} (e^{i^{1/2}(-1+iPr^{1/2})\eta} - 1) \end{aligned} \right] \quad (46)$$

$$I_3 = \frac{\gamma-1}{4\gamma^2} K_\mu \left[\begin{aligned} & -i(e^{-i^{1/2}\eta} - 1) + i(e^{i^{3/2}\eta} - 1) \\ & - \frac{1}{Pr^{1/2}+i} (e^{i^{1/2}(-1+iPr^{1/2})\eta} - 1) \\ & - \frac{1}{Pr^{1/2}-i} (e^{-i^{1/2}(Pr^{1/2}-i)\eta} - 1) \end{aligned} \right] \quad (47)$$

である。これより、ストークス層外縁での音響流速 $\overline{U}_{2\infty} (= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \overline{U}_2)$ は、各条件で以下ようになる。

(i) 断熱壁の場合

$$\overline{U}_{2\infty} = -\frac{3A^2}{8} \sin 2X \quad (48)$$

(ii) 等温壁の場合

$$\overline{U}_{2\infty} = -\frac{A^2}{8} \sin 2X \left\{ 3 + \frac{2(\gamma-1)Pr^{1/2}}{1+Pr} (1-K_\mu) \right\} \quad (49)$$

3. 解析結果および考察

はじめに、本解析の近似の程度を考察するために、具体的な微小パラメータの値を検討する。本解析では平板間中心部では平面波伝ばを仮定しているため、 $k < 1$ の条件も満たされるかどうかを考察する必要がある。微小パラメータ ε , k/s はそれぞれ、

$$\varepsilon \sim \frac{h^*}{\delta^*}, \quad \frac{k}{s} \sim \frac{\delta^*}{\lambda^*} \quad (50)$$

であることから、音波の周波数に対するストークス層厚さ、および波長とストークス層厚さの比の関係を調べ、その結果を図2に示す。平板間距離は小さくとも1 cm 程度であるから数百～数千 Hz 程度の周波数であれば、 ε は0.01～0.05程度である。また、 δ^*/λ^* が 10^{-3} のオーダーであることから k は0.01～0.1程度となり、平面波伝ばの仮定が満たされる。

初めに、式(42)～(47)より得られたストークス層内

図2 周波数に対するストークス層厚さ

図3 ストークス層内の音響流速分布

(a) 断熱壁

(b) 等温壁

図4 ストークス層内の音響流速分布と I_1 , I_2 , I_3 の分布の関係

における $\overline{U}_2$ の分布が図3に示されている。なお、図3でAが断熱壁面、Bが等温壁面の場合の解析結果であり、いずれの結果も境界層外縁の値 $\overline{U}_{2\infty}$ で無次元化されている。これより、 $\overline{U}_2$ の分布で、速度の符号が壁面から境界層外縁に向かって一度変化する音響流の反転層が観察される。この分布で符号が変化する位置は $\delta/10 \sim \delta/5$ 程度であり、負方向の最大流速値は外縁での流速の $1/50 \sim 1/10$ 程度である。また、断熱壁面条件のほうが負方向の流速および負方向の流速の範囲が大きいことが観察される。一方、 $\overline{U}_2$ の最大値は等温壁面の場合のほうが大きくなり、また、最大値の Y 座標が壁面に近づいている。

しかし、いずれの分布においても負の流速値は外縁の流速値に比べて非常に小さいが、 $(\partial \overline{U}_2 / \partial \eta) / \overline{U}_{2\infty}$ は壁面上 ($\eta=0$) で負になるため、音響流の反転層構造が形成されることが考察される。

次に、反転層の発生要因および、壁面の熱的境界条件による音響流流速分布の変化要因を調べるために、ストークス層内の I_1, I_2, I_3 による流速分布を調べた。その結果が図4(a), (b)に示されている。これらの結果より、いずれの壁面温度の境界条件においても、 I_1 による流速分布は壁面から離れるほど流速は減少し、 $Y=\delta/5$ 程度で極小値となるが、 $Y=2\delta/5$ 程度で再び速度が零になることがわかる。その後、 I_1 は増加して $Y=\delta$ 程度で極大値をもち、それ以降はほぼ一定値となる。これより、 I_1 による分布は壁面近傍で負の値をもち、負の値の最大値は境界層外縁での値の $1/2$ 程度となる。

一方、 I_2 による流速分布は、壁面から離れるほど増加し、 $Y=2\delta/5$ 程度で極大となる。それ以降は $Y=\delta$ まで減少し、ストークス層外部領域ではほぼ一定となる。この結果より、 I_2 による分布では負の値の領域が存在しない。壁面の近傍では I_1, I_2 による流速がそれぞれ逆方向に生じており、これより、音響流の反転層は $\partial(\overline{U}_{i,1} \overline{U}_{i,1}) / \partial X$ によって誘起される壁面近傍での負方向流速の絶対値が $\partial(\overline{U}_{i,1} \overline{V}_{i,1}) / \partial \eta$ によって誘起される正方向流速より大きくなることが要因である。

一方、壁面温度の条件により、 I_3 による流速分布は壁面近傍で異なる。 I_3 による流速は、断熱壁面の場合では壁面近傍で正の値をもち、 $\overline{U}_2$ を加速させる方向に作用する。また、等温壁面の場合では壁面近傍ではほぼ零であるが、壁面よりストークス層外縁にいくほど負の値をとり、ほぼ一定値となる。これより、 I_3 は断熱壁面では、 $\overline{U}_2$ を加速させる効果をもつが、等温壁面では減速させる効果をもつことが考察される。また、ストークス層外縁では I_3 による流速が $\overline{U}_{2\infty}$ に占める割

(a) 断熱壁

(b) 等温壁

図5 ストークス層内の一次変動成分の振幅値と位相の変化 ($X=3\pi/4$) [Amp は振幅値, ϕ は $u_{i,1\infty}$ との位相差を示す]

図6 定在波の圧力振幅値に対する音響流流速の最大値の変化

合は等温壁面では10%程度の大きさに減速させる方向に作用するが、断熱壁面では I_3 は作用していない。これより、 $\mu_{i,1}$ による粘性項によって誘起される流速成分は、ストークス層内の音響流を考える場合には無視することができない。

音響流はストークス層内の音響運動量流束の時間平均 $\overline{U_{i,1} U_{i,1}}$, $\overline{U_{i,1} V_{i,1}}$ が空間こう配をもつことにより誘起される。このとき、これらの時間平均値の分布は速度 $U_{i,1}$, $V_{i,1}$ の大きさと位相差に依存する。特に位相差の変化により、これらの値の符号が決定されるた

図 7 定在波の速度振幅値の分布に対するストークス層外縁の音響流流速分布
($\rightarrow$ は音響流の方向を示す)

(a) $Y=0\sim 2\delta$ (等高線の間隔は 20)

(b) $Y=0\sim \delta/4$ (等高線の間隔は 0.05)

図 8 ストークス層内の流線

め、音響流の反転層の形成は各速度の位相差が重要となる。

そこで、一次の変動成分の結果からストークス層内における $u_{i,1}$, $v_{i,1}$, $T_{i,1}$ の振幅値と位相差の関係を考察した。ここで、 $u_{i,1\infty}$ を基準にとり、振幅値については $u_{i,1\infty}$ の振幅値との比を、および位相差については $u_{i,1\infty}$ からの差を考察する。ここで、ストークス層外縁の音響流流速が最大となる $X=3\pi/4$ での結果を図 5 に示す。本解析より両温度境界条件の $u_{i,1}$ は一致する。しかし、 $v_{i,1}$ の振幅値において、等温壁条件の値のほうが他方の条件の値に比べて 0.5 倍程度増加するが、 $v_{i,1}$ の位相は温度境界条件によってほとんど変化しない。このため、壁面温度の境界条件により、 $\overline{U_{i,1} V_{i,1}}$ が変化して、断熱壁の場合のほうが I_2 による流速値は小さくなる。これより、断熱壁条件での音響流流速分布のほうが、音響流の反転現象が大きく現れることが考察される。

また、 $\tilde{T}_{i,1}$ では、等温壁条件で壁面近傍の振幅が減少するが、位相が進む傾向が観察される。式(35)より、 I_3 による流速分布の変化は壁面近傍の $\mu_{i,1}$ の位相が温度境界条件によって変化することが大きな要因である。

図 6 に定在波の節部の圧力振幅値 P_{1-amp} に対するストークス層外縁での音響流流速 $\overline{U_{2\infty}}$ の最大値 $\overline{U_{2\infty max}}$ の変化を示す。図 6 には Rayleigh による解析解

$$\overline{U_{2\infty}} = -\frac{3A^2}{8} \sin 2X \dots\dots\dots (51)$$

の最大値の分布も示している。式(48)と式(51)から、断熱壁の条件では流速値は Rayleigh の解析結果と一致する。また、等温壁条件での結果は Rayleigh の解析結果に比べて、数%程度大きい流速値である。

Rayleigh によるストークス層外縁の音響流流速値においては、値の 2/3 が $\partial(\overline{U_{i,1} U_{i,1}})/\partial X$ の項から生じる値であり、残りの 1/3 が $\partial(\overline{U_{i,1} V_{i,1}})/\partial \eta$ の項から生じる値である。本解析結果ではこの 2 項の割合は Rayleigh の結果とほぼ一致する。次に、ストークス層外縁における音響流流速 $\overline{U_{2\infty}}$ の分布と平板間の定在波の速度振幅値 $u_{0,1amp}$ の分布の関係を図 7 に示す。なお、図 7 の結果はいずれも最大値で無次元化を行った。この結果より、音響流は速度の相関から計算されるため、定在波の 1/2 波長の周期的な分布をもつ。そして、 $\overline{U_{2\infty}}$ の分布は Rayleigh の解析結果と同様に定在波の腹から節部に向かう流れを示している。

なお、既報⁶⁾の数値解析では無次元ピストン速度振幅値が $\delta u = 1 \times 10^{-5}$ の場合に本解析結果とは異なる傾向が見られた。これは数値解析での音響流流速が非定常解の時間平均分として算出されているため、振幅が小さい範囲では計算精度が十分でないと考えられる。

ストークス層内の流線を図 8(a) に、壁面のごく近傍における流線を図 8(b) に示す。なお、流線は流れ関数の等高線として与えられている。 $\overline{U_2}$ の分布では壁近傍で反転層が存在するが、反転層がストークス層の厚さに比べて小さく、反転部の流速の最大値がストークス層外縁の流速値の数%であるため、図 8(b) のよう

にストークス層内での循環流の構造を形成する流れ関数の等高線の間隔は非常に小さい。これより、音響流の反転層によって誘起される循環流は、流速が小さいために形成することが困難であるが、ストークス層厚さの1/8程度の高さの構造をもつ。また、ストークス層外部領域では定在波の1/4波長おきの平板間中心軸に対象な渦構造が層内部を含めて形成されることが観察される。

4. 結 言

二次元ダクト内の定在波によって誘起される音響流速分布を、ストークス数が十分大きい場合について、壁面温度境界条件の変化を考慮して、接合漸近展開法により解析し、以下のような結果を得た。

(1) ストークス層内の音響流流速分布では、壁近傍で反転層が現れる。この構造はおもに音響運動量流束の時間平均値 $\overline{U_{i,1}} \overline{U_{i,1}}$ の Y 方向分布によって誘起される。

(2) 壁面温度境界条件により、ストークス層内の

音響流流速分布が変化し、等温壁条件では音響流の反転部の流速およびその領域が小さくなる。

(3) 一次の変動粘性係数 $\mu_{i,1}$ による定常な粘性力は、壁面温度の境界条件により、音響流に対して異なる方向に作用する。特に、壁面近傍ではその影響が大きい。

文 献

- (1) Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound*, 2(1945), 333, DOVER.
- (2) Lighthill, J., *J. Sound Vib.*, **61**-3(1978), 391.
- (3) Andrade, C., *Philos. Trans. R. Soc.*, **A230**(1932), 413.
- (4) Arroyo, M. P. and Greated, C. A., *Flow Visualization and Image Analysis*, (1993), 167, Kluwer Academic Publishers.
- (5) 竹光, *Nagare*, **12**-4(1980), 24.
- (6) 荒川・川橋, *機論*, **60**-580, B(1994), 4059.
- (7) Tijdeman, H., *J. Sound Vib.*, **39**-1(1975), 1.
- (8) Dyke, M. V., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, (1975), 75, The Parabolic Press.
- (9) 東京天文台編, *理科年表*, (1993), 448, 丸善.