空間的に発達する混合層の大規模渦構造とその制御*

宮内 敏雄^{*1}, 店橋 護^{*1}
徳田 仁^{*2}, 鈴木 基啓^{*3}Control of Large-Scale Structures
in Spatially Developing Mixing LayersToshio MIYAUCHI, Mamoru TANAHASHI,
Shinobu TOKUDA and Motohiro SUZUKI

Direct numerical simulations of spatially developing mixing layers were conducted to clarify the effect of phase difference of inflow disturbances on the growth of mixing layers. The disturbances consist of the fundamental and subharmonic modes of the most unstable wave based on linear stability analysis, and the energy transfer between mean flow, fundamental and subharmonic modes was examined. The results show that it is possible to control the development of mixing layers by controlling phase difference between two modes. The phase difference determines energy transfer in the regions downstream of the roll-up location where energy is transferred from fundamental to mean flow, and upstream of the pairing location where the energy is transferred from mean flow to subharmonic. This mechanism causes the enhancement and suppression of the growth rate of mixing layers. The phase difference which produces the slowest development of a mixing layer is about $11/16\pi$.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Direct Numerical Simulation, Shear Flow, Mixing Layer, Large Scale Structure, Turbulence Control

1. 緒 論

速度の異なる 2 つの平行流から形成される乱流混合層は、燃焼器における燃料と空気の混合など多くの工業装置において観察され、その流体力学的特性を解明することは工学上非常に重要な課題となっている。この乱流混合層中にある程度秩序を持った大規模渦構造が存在することが、Brown と Roshko の混合層の実験⁽¹⁾により明らかにされて以来、多くの実験的および数値的研究が行われてきた⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

特に、乱流混合層の制御に関しては、その重要性から渦輪との干渉による制御⁽⁷⁾や周期的じょう乱による大規模渦の合体特性の制御⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾など多くの研究が行われており、大規模渦構造を操作することにより乱流混合層の制御が効果的になされることが期待されている。しかし、直接数値計算を用いて周期的じょう乱の付加による混合層の制御を明らかにするには、適切な流入・流出境界条件が必要となる。流入・流出境界条件が適切でない場合、混合層内の渦運動が境界条件

により大きな影響を受けるため、周期的じょう乱の付加による混合層の制御機構の詳細を明らかにすることはできない。

そこで、本研究では、著者らが開発した適切な流入・流出境界条件⁽¹¹⁾を用いて空間的に発達する 2 次元混合層の直接数値計算を行い、流入面において付加した基本波と低調波の重ね合わせからなる周期的じょう乱の初期位相差が混合層の発達に与える影響およびその発達の促進・抑制機構を明らかにすることを目的としている。

2. 記 号

- A_f : 基本波成分の振幅
- A_s : 低調波成分の振幅
- E : 全変動エネルギー
- E_f : 基本波成分のエネルギー
- E_s : 低調波成分のエネルギー
- E_{diff} : 基本波と低調波成分以外のエネルギー
- f_f : 基本波成分の周波数
- f_s : 低調波成分の周波数
- k_y : y 方向の波数
- p : 圧力

* 1994 年 11 月 9 日 第 7 回計算力学講演会において講演、原稿受付 1995 年 1 月 12 日。

*¹ 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*² 正員、船舶技術研究所 (〒181 三鷹市新川 6-38-1)。

*³ 東京工業大学大学院。

- R : 混合層の速度比 $(= (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2))$
 Re : レイノルズ数 $(= \Delta U \delta_0 / \nu)$
 u : x 方向の速度成分
 v : y 方向の速度成分
 u_i : x_i 方向の速度成分
 u'_{in} : 周期的じょう乱の x 方向の速度成分
 U : 混合層の平均速度 $(= (U_1 + U_2)/2)$
 U_1 : 高速側主流速度
 U_2 : 低速側主流速度
 t : 無次元時間
 x : 無次元空間座標
 y : 無次元空間座標
 x_i : 無次元空間座標
 $x_{\theta max}$: 運動量厚さの第 1 ピーク位置
 δ_0 : 初期渦度厚さ (代表長さ)
 ΔU : 主流速度差 (代表速度) $(= U_1 - U_2)$
 $\Delta \Phi$: 初期位相差 $(= 2\Phi_s - \Phi_f)$
 Φ_f : 基本波成分の位相
 Φ_s : 低調波成分の位相
 ν : 動粘性係数
 θ : 運動量厚さ
 ω : 渦度

記号

- $-$: 時間平均
 $'$: 変動成分
 $\sim$: 基本波成分
 $\approx$: 低調波成分
 $"$: 基本波および低調波成分を除いた変動成分

3. 基礎方程式および計算方法

3・1 基礎方程式 基礎方程式は、以下に示す 2 次元非定常非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および連続の式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、各変数は、代表長さとして初期渦度厚さ δ_0 、代表速度として主流速度差 ΔU を用いて無次元化されている。

3・2 計算方法⁽¹¹⁾ 流れ方向の離散化は、対流項に 5 次精度風上差分⁽¹²⁾、圧力項と粘性項に 4 次精度中心差分を適用して行った。また、流れに垂直方向の離散化に関しては、Free-slip 境界条件を課し、流れ方向の速度成分 u および圧力 p を cos 級数展開、垂直方向の速度成分 v を sin 級数展開してスペクトル法を用いて計算を行った。対流項から生じる aliasing 誤差は、流れ方向に関しては、5 次精度風上差分によりある程度制御されており⁽¹²⁾⁽¹³⁾、垂直方向に関しては、3/2 則により完全に除去した⁽¹⁴⁾。時間積分に関しては、対流項と粘性項に 2 次精度 Adams-Bashforth 法、圧力項に 1 次精度 Backward-Euler 法を適用した。

また、圧力に対する Poisson 方程式は、垂直方向にスペクトル法を用いることにより、波数空間において解を求めた。すなわち、Poisson 方程式は、波数空間において垂直方向の波数 k_y に関して独立な常微分方程式となるため、4 次精度コンパクト差分⁽¹⁵⁾を用いて流れ方向の離散化を行った。この際、生じる対称 3 重対角行列を、不完全コレスキー分解を行い、共役勾配法で反復計算を行う ICCG 法を用いて計算を行った。

計算領域は、流れ方向に $180\delta_0$ 、垂直方向に $50\delta_0$ とした。ここで、垂直方向の計算領域は、十分な大きさが確保されており、Free-slip 境界条件によって生じる鏡像渦は混合層内の渦の発達に影響を与えない。また、 451×201 の格子点を用いて数値計算を行った。

流入速度分布は、分離板による伴流の影響を考慮に入れずにハイパボリック・タンジェント型とし、垂直方向に正規分布する周期的なじょう乱を付加した⁽¹⁶⁾。周期的なじょう乱は、振幅が等しい基本波とその第 1 低調波の重ね合わせからなっており、以下の式で表される。

$$u'_{in} = A_f \exp(-0.55y^2) \sin(2\pi f_f t + \Phi_f) + A_s \exp(-0.55y^2) \sin(2\pi f_s t + \Phi_s) \quad (3)$$

ここで、基本波としては、線形安定性理論⁽¹⁷⁾により導かれた流入平均速度分布に対して最も成長速度の速いじょう乱 (周波数 $f_f = 0.192$) を与え、振幅は $A_f = A_s = 0.01$ とした。初期位相差 $\Delta \Phi$ は表 1 に示す通りであり、速度比 $R = 0.33$ 、レイノルズ数 $Re = 400$ の場合について計算を行った。

また、速度の流出境界条件としては、以下に示す対

表 1 計算条件 (初期位相差 $\Delta \Phi$)

Case	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Delta \Phi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$9\pi/16$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$

流・粘性境界条件を適用した⁽¹¹⁾.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4)$$

流入境界および流出境界上における圧力は、対象とする流れ場において式(4)が成り立つと仮定して得られる渦度場と圧力場の関連を表す以下の近似的な圧力の輸送方程式⁽¹¹⁾を用いて与えた.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{2Re} \omega^2 \quad (5)$$

ここで、 ω は渦度を表している.

4. 計算結果および考察

図1は、初期位相差による運動量厚さの第1ピーク位置の変化を示している. ここで、運動量厚さは以下の式により定義される.

$$\theta = \frac{1}{\Delta U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_1 - \bar{u})(\bar{u} - U_2) dy \quad (6)$$

運動量厚さの第1ピーク位置はほぼ大規模渦の合体位置に対応しており、混合層の発達の指標となる. ここで、大規模渦の合体位置は低調波成分のエネルギーが最大値を示す位置である. 図1から、運動量厚さの第

図1 初期位相差による運動量厚さの第1ピーク位置の変化

1ピーク位置は流入じょう乱の位相差により大きく異なることがわかる. 特に、初期位相差 $\Delta\Phi$ が $\pi/4$ から π の範囲の場合、運動量厚さの第1ピーク位置は大きく下流方向に移動し、混合層の発達が抑制されていることがわかる. また、図1から混合層の発達が最も抑制される初期位相差はほぼ $11\pi/16$ である. 図2は、Case 5とCase 10の瞬時の渦度分布を示している. いずれのケースについても、roll-upした大規模渦が合体して下流に発達していく様子が観察される. roll-up位置は基本波成分のエネルギーが飽和する位置として定義され、Case 5とCase 10についてそれぞれ65と57である. 混合層の発達が最も遅い初期位相差 $\Delta\Phi$ が $5\pi/8$ のCase 5においても、Riley & Metcalfeの時間的に発達する混合層のシミュレーション⁽⁸⁾やYang & Karlssonの混合層の実験⁽⁹⁾において報告されたshreddingおよびtearing interactionは観察されなかった. しかし、合体位置に顕著な差が生じており、初期位相差が混合層の発達に影響を与えていることがわかる. このことから、以降では混合層の発達が最も遅い初期位相差 $\Delta\Phi$ が $5\pi/8$ のCase 5と最も速い初期位相差 $\Delta\Phi$ が $3\pi/2$ のCase 10を対象として混合層の発達の促進・抑制機構の詳細な検討を行う.

最初に、速度成分の瞬時値を次のように時間平均値と変動成分に分解して考える.

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (7)$$

図3と図4は、それぞれ図2と同時刻における変動成分の速度ベクトルおよび $-u'v'$ の分布を示している. ここで、実線は正の値を、破線は負の値を表している. 図3から、両ケースともに、大規模渦の合体に伴い、平均速度分布に対する渦構造の長軸の傾きが図5のAからBに変化している様子が観察される. また図4から、 $-u'v'$ が正の値を示す領域が渦構造の中心から見て右上と左下に、負の値を示す領域が右下と左上に現れていることがわかる. さらに、渦構造の長軸の傾き

図2 瞬時の渦度分布 (等値線間隔: 0.08)

図3 変動成分の速度ベクトル

図4 $-u'v'$ の分布 (等値線間隔: 0.01)

がAの場合には、正の領域が大きくなり、逆にBの場合には、負の領域が大きくなる⁽⁶⁾。両ケースともに、大規模渦の合体に伴い、渦構造の長軸の傾きがAからBに変化するため、合体位置の上流では正の領域が、合体位置の下流では負の領域が大きくなっている。図6は、レイノルズ応力の(1,2)成分 ($-\overline{u'v'}$) の分布を示している。上述の渦構造と $-u'v'$ の関係から、渦構造の長軸の傾きがAの領域ではレイノルズ応力の(1,2)成分は正の値を示し、Bの領域では負の値を示すことがわかる。

ここで、平均流と変動成分の間のエネルギーの輸送について考える。以下の式は、それぞれ平均流および変動成分のエネルギー輸送方程式である。

平均流のエネルギー輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) = & \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{p' u_j} + \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \overline{u_i} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{2\text{Re}} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

変動成分のエネルギー輸送方程式

図5 渦構造と $-u'v'$ の分布

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \right) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \right) = & - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{p' u_j'} + \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \overline{u_i'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{2\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式(8)および(9)中の右辺第1項は生成項であり、平均流と変動成分の間のエネルギーの輸送を表している。この生成項が正の場合には、平均流から変動成分にエネルギーが輸送され、逆に負の場合には、変動成分から平均流にエネルギーが輸送される。この生成項中で

最も支配的である項は $-\overline{u'v'}(\partial \overline{u}/\partial y)$ であり、平均速度勾配が正であることから、生成項はレイノルズ応力の(1,2)成分と同符号になる。図6から、Case 10では平均流から変動成分にエネルギーが輸送される領域が大規模渦の合体位置まで持続しているが、Case 5ではroll-up位置の下流において変動成分から平均流にエネルギーが輸送される領域が現れており、この領域では混合層の発達が抑制される。

大規模渦のroll-upおよび合体は、それぞれ基本波および低調波成分のエネルギーと密接に関連している。そこで、速度の変動成分を次のように基本波成分、低

調波成分および両成分を除いた変動成分に分解する。

$$u'_i = \tilde{u}_i + \tilde{\tilde{u}}_i + u''_i \quad (10)$$

図7と図8は、それぞれ基本波および低調波成分の速度ベクトルを示している。これらの図から、基本波成分の渦構造の傾きは大規模渦のroll-up位置の前後で、低調波成分の渦構造の傾きは合体位置の前後でそれぞれAからBに変化している様子が観察される。

式(10)のように分解した場合、 $u'_i u'_j$ は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} u'_i u'_j = & \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j + u''_i u''_j \\ & + \tilde{u}_i \tilde{\tilde{u}}_j + \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{u}_j + \tilde{u}_i u''_j + \tilde{\tilde{u}}_i u''_j + u''_i \tilde{u}_j + u''_i \tilde{\tilde{u}}_j \end{aligned} \quad (11)$$

図6 レイノルズ応力の(1,2)成分の分布 (等値線間隔: 0.002)

図7 基本波成分の速度ベクトル

図8 低調波成分の速度ベクトル

ここで、右辺の第1項から第3項は $u_i' u_j'$ の各成分を表しており、第4項以降は相互作用により生じる項である。図9と図10は、それぞれ $-u'v'$ の基本波成分(右辺第1項)および低調波成分(右辺第2項)の分布を示している。これらの図から、大規模渦のroll-up位置および合体位置の前後におけるそれぞれの成分の渦構造の傾きの変化に伴い、正の領域が支配的な状態から負の領域が支配的な状態へと変化していることがわかる。式(11)で表される $u_i' u_j'$ に時間平均操作を施すことにより、図6にその(1,2)成分を示したレイノルズ応力が得られ、次のように表される。

$$\overline{u_i' u_j'} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j'} + \overline{u_i' u_j'} \quad (12)$$

このように時間平均操作を施すことにより成分間の相互作用により生じるレイノルズ応力はゼロとなり、レイノルズ応力は各周波数成分のレイノルズ応力の線形和として表される。図11と図12は、それぞれ式(12)の右辺第1項の基本波成分および第2項の低調波成分のレイノルズ応力の(1,2)成分の分布を示している。いずれのケースについても、基本波成分のレイノルズ応力の(1,2)成分は大規模渦のroll-up位置の前後で、低調波成分のレイノルズ応力の(1,2)成分は合体位置の前後で正から負に変化している。これは、上述の渦構造

と瞬時の $-u'v'$ の関係から、基本波、低調波成分ともに渦構造の長軸の傾きがAの領域ではレイノルズ応力の(1,2)成分は正の値を示し、Bの領域では負の値を示すためである。

図13と図14は次のように定義される全変動成分、基本波成分および低調波成分のエネルギーを示している⁽⁹⁾。

$$E = \frac{1}{\Delta U^2 \delta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) dy \quad (13)$$

$$E_f = \frac{1}{\Delta U^2 \delta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2}) dy \quad (14)$$

$$E_s = \frac{1}{\Delta U^2 \delta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\overline{\tilde{\tilde{u}}^2} + \overline{\tilde{\tilde{v}}^2}) dy \quad (15)$$

また、基本波成分と低調波成分以外のエネルギーは次のように定義される。

$$E_{diff} = E - E_f - E_s \quad (16)$$

両ケースともに大規模渦のroll-upに伴い基本波成分のエネルギーは飽和する。しかし、低調波成分のエネルギーの発達は初期位相差によって大きく異なり、低調波成分のエネルギーが飽和する位置(合体位置)は図1に示したように初期位相差によって制御することができる。ここで、平均流と基本波成分および平均流と

図9 $-u'v'$ の基本波成分の分布(等値線間隔:0.002)

図10 $-u'v'$ の低調波成分の分布(等値線間隔:0.01)

図 1 1 基本波成分のレイノルズ応力の(1,2)成分の分布 (等値線間隔: 0.002)

図 1 2 低調波成分のレイノルズ応力の(1,2)成分の分布 (等値線間隔: 0.002)

図 1 3 全変動エネルギー, 基本波成分及び低調波成分のエネルギーの発達 (Case 5)

図 1 4 全変動エネルギー, 基本波成分及び低調波成分のエネルギーの発達 (Case 10)

低調波成分の間のエネルギーの輸送について考える。エネルギーの輸送方向は、平均流と変動成分の間の輸送と同様に各成分のレイノルズ応力の(1,2)成分の符号により決定される。図 1 1 において、いずれのケースについても、基本波成分のエネルギーの飽和に伴い(図 1 3 と図 1 4), 大規模渦のroll-up位置の下流においてエネルギーが基本波成分から平均流に輸送される領域が観察されるが、Case 5ではCase 10と比較してこの領域が広い。また、図 1 2 からCase 5では、Case 10と比較して大規模渦の合体位置の上流における平均流から低調波成分へのエネルギー輸送がより下流において

行われていることがわかる。大規模渦の合体は図 1 3 と図 1 4 に示したように低調波成分のエネルギーの飽和に伴って起こるため、これが合体の遅れる原因となっている。

また、図 6 のCase 5において観察される大規模渦のroll-up位置の下流における変動成分から平均流にエネルギーが輸送される領域は、これら2つの効果が要因となって生じている。さらに、平均流と基本波成分および平均流と低調波成分の間のエネルギーの輸送以外に基本波成分と低調波成分の間の輸送が存在するが、両成分間のエネルギー輸送量は平均流と各成分の間の

輸送量の1/10程度であり，大規模渦のroll-upおよび合体に与える影響は小さい。

5. 結 論

流入面において付加した基本波と低調波の重ね合わせからなる周期的じょう乱の初期位相差が混合層の発達に与える影響およびその発達の促進・抑制機構を解明するために空間的に発達する2次元混合層の直接数値計算を行い，以下のような結論を得た。

- (1) 基本波と低調波の初期位相差を変化させることにより混合層の発達を制御することが可能であり，初期位相差をほぼ $11\pi/16$ とした場合に最も発達が抑制される。
- (2) 初期位相差の変化により大規模渦のroll-up位置下流の基本波成分から平均流へのエネルギー輸送領域と合体位置上流の平均流から低調波成分へのエネルギー輸送領域が影響を受けるため，混合層の発達の促進・抑制が起こる。

文 献

- (1) Brown, G. L. and Roshko, A., *J. Fluid Mech.*, **64** (1974), 775.
- (2) Winant, C. D. and Browand, F. K., *J. Fluid Mech.*, **63** (1974), 237.
- (3) Ho, C. -M. and Huang, L. S., *J. Fluid Mech.*, **119** (1982), 443.
- (4) Metcalfe, R. W., Orszag, S. A., Brachet, M. E., Menon, S. S. and Riley, I. I., *J. Fluid Mech.*, **184** (1987), 207.
- (5) Rogers, M. M. and Moser, R. D., *J. Fluid Mech.*, **247** (1993), 275.
- (6) Hussain, A. K. M. F., *J. Fluid Mech.*, **173** (1986), 303.
- (7) 前川・西岡, 機論, **58-553**, B(1992), 2659.
- (8) Riley, J. J. and Metcalfe, R. W., *AIAA paper* 80-0274.
- (9) Yang, Z. and Karlsson, S. F., *Phys. Fluids A*, **3** (1991), 2207.
- (10) Inoue, O., *J. Fluid Mech.*, **234** (1992), 553.
- (11) 宮内・店橋・鈴木, 機論, **60-571**, B(1994), 813.
- (12) Rai, M. M. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, **96** (1991), 15.
- (13) 宮内・平田・店橋, 機論, **60-574**, B(1994), 1999.
- (14) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, (1988), Springer-Verlag, 87.
- (15) Lele, S. K., *J. Comput. Phys.*, **103** (1992), 16.
- (16) Wignanski, I. and Fiedler, H. E., *J. Fluid Mech.*, **41** (1970), 327.
- (17) Michalke, A., *J. Fluid Mech.*, **23** (1965), 521.