周期的加熱時における無限平板中の非フーリエ温度応答*

唐 大 偉^{*1}, 荒 木 信 幸^{*1}Non-Fourier Temperature Response in a Finite Medium
under Oscillatory Heating

DaWei TANG and Nobuyuki ARAKI

The present work investigates analytically non-Fourier effects in an infinite plate as a finite medium subjected to a periodic heat flux using the hyperbolic heat conduction model. By comparing the results of the temperature profiles with those obtained from the Fourier parabolic heat conduction equation, the transition condition between the 'parabolic' and 'hyperbolic' behavior at the front and rear surfaces is obtained. The phase difference between the front and the rear surface after temperature wave propagation through the medium is also calculated numerically as a function of the relaxation Fourier number.

Key Words: Non-Fourier Heat Conduction, Oscillatory Heating, Infinite Plate

1. 緒 言

近年, レーザによる高速加熱やマイクロ波による高周波数加熱が金属の表面溶融⁽¹⁾, セラミックスの焼結⁽²⁾などの各方面で利用されている。この場合, 高速化がますます進み, 古典のフーリエ熱拡散理論では正確さが不足し, そのため非フーリエ理論が工学および実際問題でも徐々に注目されるものとなってきた。

フーリエモデルは熱の伝ばは無限の速度をもつとして考えられているが, 実際の現象は有限であると予測されている。このパラドックスを排除するために, Cattaneo⁽³⁾とVernotte⁽⁴⁾は次のような熱流束に対して時間に依存している緩和モデルを提案した。

$$q = -\lambda \nabla T - \tau_0 \frac{\partial q}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)とエネルギー保存則を用いることにより非フーリエの双曲形熱伝導方程式が導出される。すなわち

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

この双曲形方程式に対する解析は種々境界の条件の下

で行われている。例えば, 有限媒質におけるパルス状熱流束^{(5)~(9)}やステップ状表面温度変化⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾などがあるが, 周期的な加熱についての検討はこれまでなかった。

本研究では非フーリエ双曲形熱伝導方程式に対し加熱流束が周期的に変動する境界条件の下での解析解を求めて, 有限媒質中の温度伝ばの非フーリエ効果を検討する。すなわち, 得られた解析解を用いて, 有限媒質の前面と背面の温度応答を種々の $\tau_0 \omega$ で計算し, 通常のフーリエの放物形熱伝導方程式の計算結果と比較する。その結果を用いて, 温度応答はどのような条件から「放物形」で扱うことができるのかなどの条件を求めようとするものである。

記 号

a : 熱拡散率

c : 比熱容量

Fo : フーリエ数 $= at/L^2$

Fo_1 : 熱流の周波数基準のフーリエ数 $= a/\omega L^2$

L : 試料厚さ

q : 熱流束

$\bar{q}$: q のラプラス変換

$\text{Re}[\]$: 留数

* 原稿受付 1995年2月16日。

*¹ 正員, 静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

T : 温度
 $\bar{T}$: T のラプラス変換
 t : 時間
 V : 無次元温度
 Ve : Vernotte 数 $= a\tau_0/L^2$
 X : 無次元距離 $= x/L$
 x : 距離
 φ : 位相
 $\Delta\phi$: 無次元位相差 $= (\varphi_F - \varphi_R)/2\pi F\phi_1$
 λ : 熱伝導率
 ρ : 密度
 τ_0 : 熱緩和時間
 ω : 周期的加熱の周波数
 添 字
 F : 前面
 R : 裏面

2. 解 析

有限媒質として厚さ L で、一定な物性値をもつ無限平板を考える。表面を周期的に加熱する以外は断熱境界とする。一様な温度 $T(x, 0) = 0$ に維持された媒質を、時間 $t = 0$ から、表面 $x = 0$ において周波数 ω と振幅 q_0 の周期的な熱流束で一様に加熱する。非フーリエ熱伝導方程式 (2) は次の一次元の形となる。

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3)$$

境界条件および初期条件は次式で表される。

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial x} T(0, t) = \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} q(0, t) + q(0, t) \quad (4 \cdot a)$$

$$q(0, t) = q_0 e^{i\omega t} \quad (4 \cdot b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T(L, t) = 0 \quad (4 \cdot c)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} T(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0 \quad (5)$$

非フーリエ方程式 (3) をラプラス変換して初期条件 (5) を考慮すると方程式は

$$a \bar{T}'' - (s + \tau_0 s^2) \bar{T} = 0 \quad (6)$$

となり、境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{T}(0, s) = -\frac{q_0}{\lambda} (1 + \tau_0 s) \bar{q}(s) \quad (7 \cdot a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{T}(L, s) = 0 \quad (7 \cdot b)$$

ここで

$$\bar{T}(x, s) = L[T(x, t)]$$

$$\bar{q}(s) = \frac{1}{q_0} L[q(0, t)]$$

条件 (7) により式 (6) の解は

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, s) &= \frac{q_0}{\rho c L} \frac{L\sqrt{(1 + \tau_0 s)/a} \cosh r(x - L)}{\sqrt{s} \sinh rL} \bar{q}(s) \\ &\dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる、ここで $r = \sqrt{(s + \tau_0 s^2)/a}$

便宜上、次の関数を導入して整理する。

$$F_1(s) = \frac{L\sqrt{(1 + \tau_0 s)/a} \cosh r(x - L)}{\sqrt{s} \sinh rL} \quad (9 \cdot a)$$

$$F_2(s) = \bar{q}(s) \quad (9 \cdot b)$$

$$F(s) = F_1(s) F_2(s) \quad (9 \cdot c)$$

$$f(x, t) = L^{-1}[F(s)] \quad (10 \cdot a)$$

$$f_1(x, t) = L^{-1}[F_1(s)] \quad (10 \cdot b)$$

$$f_2(x, t) = L^{-1}[F_2(s)] \quad (10 \cdot c)$$

次に、温度応答を式 (8) の逆ラプラス変換により求めると次式のようにになる。

$$T(x, t) = \frac{q_0}{\rho c L} L^{-1}[F(s)] = \frac{q_0}{\rho c L} f(x, t) \quad (11)$$

ラプラス変換の特性により

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_1(x, t) * f_2(x, t) \\ &= \int_0^t f_1(x, t') f_2(x, t - t') dt' \quad (12) \end{aligned}$$

となるが、ここで、 $f_1(x, t)$ はコーシー留数定理を用いて求め (付録参照)、 $f_2(x, t)$ は式 (9)、(10) により求められる。この場合、 $f_1(x, t)$ は次に示す β の値により異なった値を示す。

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 - 4n^2 \pi^2 \tau_0 a / L^2}, \quad \beta_1 = \sqrt{4n^2 \pi^2 \tau_0 a / L^2 - 1} \\ n &= 1, 2, \dots \quad (13) \end{aligned}$$

つまり、 n を大きくするにつれて β の値が実数から虚数に変わるが、その点を $n = N$ としたとき $f_1(x, t)$ の級数の計算を次式のように分けて行う。

β が実数の範囲においては (以下 $\beta = \text{real}$ と表示)

$$f_1(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{1 + \beta}{\beta} e^{-\frac{t}{2\tau_0}(1 - \beta)} - \frac{1 - \beta}{\beta} e^{-\frac{t}{2\tau_0}(1 + \beta)} \right), \quad (14 \cdot a)$$

β が虚数の範囲においては (以下 $\beta = \beta_1 i$ と表示)

$$f_1(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left(\cos \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} + \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} \right), \quad (14 \cdot b)$$

$$f_2(x, t) = L^{-1}[\bar{q}(s)] = \frac{q(0, t)}{q_0} = e^{i\omega t} \dots\dots\dots (15)$$

式(12)は式(14)と式(15)から次式のようになる。

$$f(x, t) = \int_0^t \left[1 + \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{1+\beta}{\beta} e^{-\frac{t'}{2\tau_0}(1-\beta)} - \frac{1-\beta}{\beta} e^{-\frac{t'}{2\tau_0}(1+\beta)} \right) \right] e^{i\omega(t-t')} dt', \quad \beta = \text{real のとき} \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$f(x, t) = \int_0^t \left[1 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t'}{2\tau_0}} \left(\cos \frac{\beta_1 t'}{2\tau_0} + \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{\beta_1 t'}{2\tau_0} \right) \right] e^{i\omega(t-t')} dt', \quad \beta = \beta_1 i \text{ のとき} \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

式(16)の積分を直接計算することにより、有限媒質中の非フーリエ温度波を得ることができる。物理的意味のある解(実数解)を選択し、次の無次元関数を導入する。

$$V(X, Fo) = \frac{T(X, Fo)}{q_0/\rho c \omega L}, \quad X = \frac{x}{L} \dots\dots\dots (17\cdot a)$$

$$Fo = \frac{at}{L^2}, \quad Fo_1 = \frac{a}{\omega L^2}, \quad Ve^2 = \frac{a\tau_0}{L^2} \dots\dots\dots (17\cdot b)$$

ただし、 Fo はフーリエ数で、 Ve は熱緩和時間を表示する Vernotte 数で、 X は有限媒質の無次元厚さである。

結局、有限媒質中規格化された温度応答は次式で表される。

$$V(X, Fo) = \sin \frac{Fo}{Fo_1} + \sum_{n=1}^N \cos(n\pi X) \left[\frac{(1+\beta)/\beta}{\xi_-^2 + 1} \left(\zeta_- \cos \frac{Fo}{Fo_1} + \sin \frac{Fo}{Fo_1} - \zeta_- e^{-\zeta_- \frac{Fo}{Fo_1}} \right) - \frac{(1-\beta)/\beta}{\xi_+^2 + 1} \left(\zeta_+ \cos \frac{Fo}{Fo_1} + \sin \frac{Fo}{Fo_1} - \zeta_+ e^{-\zeta_+ \frac{Fo}{Fo_1}} \right) \right], \quad \beta = \text{real のとき} \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$V(X, Fo)$$

$$= \sin \frac{Fo}{Fo_1} + \frac{2Ve^2}{Fo_1} \sum_{n=N}^{\infty} \cos(n\pi X) \left[\begin{aligned} & \frac{\cos \frac{Fo}{Fo_1} - \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{Fo}{Fo_1}}{1 + \xi_+^2} \left[1 + e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \left(\xi_+ \sin \frac{\xi_+ Fo}{2Ve^2} - \cos \frac{\xi_+ Fo}{2Ve^2} \right) \right] \\ & + \frac{\cos \frac{Fo}{Fo_1} + \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{Fo}{Fo_1}}{1 + \xi_-^2} \left[1 + e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \left(\xi_- \sin \frac{\xi_- Fo}{2Ve^2} - \cos \frac{\xi_- Fo}{2Ve^2} \right) \right] \\ & + \frac{\sin \frac{Fo}{Fo_1} + \frac{1}{\beta_1} \cos \frac{Fo}{Fo_1}}{1 + \xi_+^2} \left[\xi_+ - e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \left(\sin \frac{\xi_+ Fo}{2Ve^2} + \xi_+ \cos \frac{\xi_+ Fo}{2Ve^2} \right) \right] \\ & - \frac{\sin \frac{Fo}{Fo_1} - \frac{1}{\beta_1} \cos \frac{Fo}{Fo_1}}{1 + \xi_-^2} \left[\xi_- - e^{-\frac{Fo}{2Ve^2}} \left(\sin \frac{\xi_- Fo}{2Ve^2} + \xi_- \cos \frac{\xi_- Fo}{2Ve^2} \right) \right] \end{aligned} \right], \quad \beta = \beta_1 i \text{ のとき} \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

ただし

$$\xi_{\pm} = (1 \pm \beta) \frac{Fo_1}{2Ve^2}, \quad \xi_{\pm} = \beta_1 \pm \frac{2Ve^2}{Fo_1} \dots\dots\dots (19)$$

フーリエ熱伝導に対する解は、 $\tau_0 \rightarrow 0$ または $Ve \rightarrow 0$ と置くことにより求められる。この結果の式とフーリエの放物形方程式から求めた式とを比較して、この非フーリエの解析解が合理的かどうかの検討ができる。フーリエの熱伝導となる条件により以下の関係が得られる。

$$\zeta_- = [1 - \sqrt{1 - (2n\pi Ve)^2}] \frac{Fo_1}{2Ve^2} = \{1 - [1 - 2n^2\pi^2 Ve^2 + 2n^2\pi^2 Ve^2 O(Ve^2)]\} \frac{Fo_1}{2Ve^2} = n^2\pi^2 Fo_1 \dots\dots\dots (20\cdot a)$$

$$(1+\beta)/\beta = 2, (1-\beta)/\beta = 0 \dots\dots\dots (20\cdot b)$$

式(20)を式(18)に代入することにより次式のようになる。

$$V(X, Fo) = \sin \frac{Fo}{Fo_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi X)}{(n^2\pi^2 Fo_1)^2 + 1} \left(n^2\pi^2 Fo_1 \cos \frac{Fo}{Fo_1} + \sin \frac{Fo}{Fo_1} - n^2\pi^2 Fo_1 e^{-n^2\pi^2 Fo} \right) \dots\dots\dots (21)$$

式(21)はフーリエの放物形方程式からも求めることができる。つまり、式(18)の非フーリエ解は、 $\tau_0 \rightarrow 0$ と置くことによってフーリエの熱伝導方程式から求めた解と一致し、超関数のうえで境界条件を満足する。

Fig. 1 Temperature responses at the front surface with various value of $\tau_0\omega$ for $F_{01}=0.25$

Fig. 2 Temperature responses at the rear surface with various value of $\tau_0\omega$ for $F_{01}=0.25$

3. 計算結果

前面 $x=0$ を周期的に加熱する場合における厚さ L の有限媒質中の非フーリエ効果を検討するために、解析解(18)を用いて具体的な計算を行う。

図1と図2には周波数に基づくフーリエ数を $F_{01}=0.25$ としたときの周期的加熱に対する無限平板の前面と背面の非フーリエの温度応答を示してある。横軸はフーリエ数 Fo で、パラメータは Ve , あるいは $Ve^2/F_{01}=\tau_0\omega$ である。図1, 2中には式(21)による同じ条件下のフーリエの温度応答も示し、非フーリエのそれと比較できるようにしてある。その比較により周期的温度応答が $\tau_0\omega$ の減少とともに「双曲形」から「放物形」へと近づき、近似的に「放物形」とみなせる条件がわかる。図1により前面と背面では

$$Ve^2/F_{01}=\tau_0\omega \leq 0.02 \dots \dots \dots (22)$$

のときに、双曲形と放物形の方程式についての計算結果が1%以内でほぼ一致する。換言すれば、不等式 $\tau_0\omega > 0.02$ の範囲では、フーリエの温度応答と非フーリエ

Fig. 3 Phase difference between the front and the rear surface as a function of Vernotte number

の温度応答とを区別する必要がある。熱緩和時間 τ_0 は、一般的金属材料について $10^{-6} \sim 10^{-12}$ s の程度の値をとると予測される。したがって、 $\tau_0=10^{-6}$ のとき式(22)によって、周期的加熱の周波数は、 10^4 Hz 以上の領域では非フーリエ熱伝導則を使用する必要がある。

周期的加熱による温度応答においては、前面と背面の周期的温度波の位相差を求めておくことは重要である。しかし、位相差を陽に表現する解析式を求めることは難しいので、数値計算により行う。図3に $F_{01}=0.25$ のときの Vernotte 数 Ve に対する前面と背面との位相差を示す。図3中にはフーリエの結果も含めた。縦軸は無次元の位相差 $\Delta\phi=(\phi_F-\phi_R)/2\pi F_{01}$ である。温度応答の形がひずんでいるので位相差は必ずしも一定でない。したがってここでは第1極小点の時間差 $(\phi_F-\phi_R)$ から求めた値を例として示した。 Ve が大きくなるにつれて形のひずみは大きくなり位相差としての表現は難しくなる。図3により $Ve \rightarrow 0$ のとき、非フーリエとフーリエの位相差は一致することがわかる。 Vernotte 数の増加とともに非フーリエ効果が明らかになり、位相差は増加する。逆の見方をすればフーリエ熱伝導理論による位相差は非フーリエ効果における極小値を与えることになる。つまり、非フーリエ効果により温度伝ばの相対速度は遅くなることを示している。

4. 結 論

無限平板に対する非フーリエ双曲形熱伝導方程式の解析解を加熱流束が周期的に変動する境界条件の下で求めて、非フーリエ効果を検討した。加熱流束の変動周波数と熱緩和時間の積 $\tau_0\omega$ が大きくなるにつれて、非フーリエの効果は著しくなる。無限平板における加熱前面と背面で、 $\tau_0\omega \leq 0.02$ のとき、非フーリエ効果は1%以下となり無視することができる。非フーリエ効果

が著しくなるにつれて、前面と背面との位相差は増加する。

本研究に対し有意義な討論をいただいた静岡大学 野田直剛教授、清水扇丈講師に感謝申し上げる。

[付 録]

コーシーの留数定理を用いて式(9)の逆ラプラス変換を行う。式(9)から

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\cosh r(x-L)}{\frac{\sqrt{s}}{L\sqrt{(1+\tau_0 s)/a}} \sinh rL} = \frac{1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{s + \tau_0 s^2}{a} \right) (x-L)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{s + \tau_0 s^2}{a} \right)^2 (x-L)^4 + \dots}{s + \frac{1}{3!} s^2 L^2 \left(\frac{1 + \tau_0 s}{a} \right) + \frac{1}{5!} s^3 L^4 \left(\frac{1 + \tau_0 s}{a} \right)^2 + \dots} \quad (23)$$

逆ラプラス変換とコーシーの留数定理により、 $F_1(s)$ の原関数を次式のように表す。

$$f_1(x, t) = L^{-1}[F_1(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \frac{A(s)}{B(s)} ds = \sum_{n=1}^M \operatorname{Re} \left[\frac{A(s)}{B(s)} e^{st}, s_n \right] \quad (24)$$

ただし $s_1, \dots, s_n$ は $F_1(s)$ の極である。

$B(s)=0$ と置くと、次のように極が得られる。

$$s_1 = 0, \quad (25 \cdot a)$$

$$s'_n = \begin{cases} -\frac{1}{2\tau_0}(1+\beta), & \beta = \text{real} \\ -\frac{1}{2\tau_0}(1+\beta_1 i), & \beta = \beta_1 i \end{cases} \quad (25 \cdot b)$$

$$s''_n = \begin{cases} -\frac{1}{2\tau_0}(1-\beta) & \beta = \text{real} \\ -\frac{1}{2\tau_0}(1-\beta_1 i) & \beta = \beta_1 i \end{cases} \quad (25 \cdot c)$$

ここで β は式(13)で表される。この極は全部第1階極であるので、留数は次のように計算することができる。

(1) s_1 の場合

$$\operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s_1] = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} e^{s_1 t} = 1 \quad (26)$$

(2) s'_n の場合

$$\operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s'_n] = \frac{A(s'_n)}{B'(s'_n)} e^{s'_n t} = \begin{cases} -\frac{1-\beta}{\beta} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-\frac{t}{2\tau_0}(1+\beta)\right], & \beta = \text{real} \\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left(\cos \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} + \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} \right), & \beta = \beta_1 i \end{cases} \quad (27)$$

(3) s''_n の場合

$$\operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s''_n] = \frac{A(s''_n)}{B'(s''_n)} e^{s''_n t}$$

$$= \begin{cases} \frac{1+\beta}{\beta} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-\frac{t}{2\tau_0}(1-\beta)\right], & \beta = \text{real} \\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} + \frac{1}{\beta_1} \sin \frac{\beta_1 t}{2\tau_0} \right], & \beta = \beta_1 i \end{cases} \quad (28)$$

式(24)と式(26)~(28)により、 $F_1(s)$ の逆変換が次のように得られる。

$$f_1(x, t) = \operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s_1] + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s'_n] + \operatorname{Re}[e^{st} F_1(s), s''_n] \} \quad (29)$$

文 献

- (1) B. R. Appleton, B. R. Cellar, G. K. *Laser and Electron-Beam Interactions with Solids*, (1982), Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- (2) Sutton, W. H., ほか2名, *Microwave Proc. Mater. Symp.* MRS, Pittsburgh, **124** (1988), 33.
- (3) Cattaneo, C., *C. R. Acad. Sci.*, **247** (1958), 431.
- (4) Vernotte, P., *C. R. Acad. Sci.*, **246** (1958), 3154.
- (5) Ozisik, M. N. and Vick, B., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **27** (1984), 1845.
- (6) Frankel, J. I., ほか2名, *J. Appl. Phys.*, **58** (1985), 3340.
- (7) Glass, D. E., ほか2名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **28** (1985), 1823.
- (8) Glass, D. E., ほか3名, *J. Appl. Phys.*, **59** (1986), 1861.
- (9) Gembarovic, J. and Majernik, V., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **31** (1988), 1073.
- (10) Taitel, Y., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15** (1972), 369.
- (11) Garey, G. F. and Tsai, M., *Numer. Heat Transf.*, **5** (1982), 309.