応力・熱流束モデルの特徴を反映した壁乱流と自由乱流に 適用し得る温度場2方程式モデル*

安倍 賢一^{*1}, 近藤 継男^{*1}, 長野 靖尚^{*2}

A Two-Equation Heat-Transfer Model Reflecting Second-Moment Closures for Wall and Free Turbulent Flows

Ken-ichi ABE, Tsuguo KONDOH and Yasutaka NAGANO

A new two-equation heat-transfer model which incorporates some essential features of second-order modeling is proposed. The present model is applicable to heat-transfer problems in both wall and free turbulent flows not unusually deviating from the equilibrium state. Furthermore, by introducing the Kolmogorov velocity scale, the model can appropriately express the low-Reynolds-number effects in the near-wall region, and is also applicable to complex heat-transfer fields with flow separation and reattachment. The proposed model predicts quite successfully heat transfer in both wall and free turbulent flows, i.e., a homogeneous isotropic decaying flow, a homogeneous shear flow, a boundary-layer flow heated from the origin, and a boundary-layer flow subjected to a sudden change in wall thermal conditions, whereas such predictions have been almost impossible with existing two-equation heat-transfer models.

Key Words: Turbulent Flow, Heat Transfer, Two-Equation Heat-Transfer Model, Kolmogorov Scale, Wall Turbulent Flow, Free Turbulent Flow, Second-Order Modeling

1. 緒 言

工学的に興味のある乱流場において強制対流熱伝達を解析する場合、速度場の解析には2方程式モデルに属する k - ε モデル⁽¹⁾⁽²⁾が多用される。一方、温度場に対しても、従来の乱流プラントル数 Pr_t を導入する手法に代わり、速度場と温度場の非相似性が強い場でも適切な解を与える温度場2方程式モデル⁽³⁾⁻⁽⁵⁾が最近よく用いられるようになってきている。

著者らは、既報⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾において、既存のモデルの中でもその有効性がよく確認されている長野・田川⁽²⁾により提案された k - ε モデル(NTモデル)および長野・田川・辻⁽⁴⁾⁽⁵⁾により提案された温度場2方程式モデル(NTTモデル)に改良を加え、はく離・再付着を伴う複雑な乱流場における熱伝達問題にも適用し得る速度場および温度場2方程式モデルを提案した。これらのモデルを用いることにより、はく離・再付着流の代表であるバックステップ乱流における平均速度分布、再付着距

離および平均熱伝達率の予測精度は、従来の手法に比べて大幅に改善されている⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾。

しかしながらこの種のモデルは、渦粘性近似の不完全さに起因する幾つかの重要な問題点が、完全には解決されないまま現在に至っているのも事実である。その一つが、モデル定数を変えることなく単一のモデルにより壁乱流と自由乱流における熱伝達現象を同時に高精度で予測することが困難なことである。例えば、壁乱流用に最適化されたモデル定数を用いて一様せん断乱流における熱伝達の計算を行なうと、その予測精度が著しく低いことはよく知られている⁽¹⁰⁾。

ところで、乱流モデルの高精度化や適用範囲の拡張を図る際には、より高次のモデルの知見をでき得る限り適切に反映することが、モデルの良否を決定するうえでの重要な要因となる。最近著者ら⁽¹¹⁾は、速度場のモデリングにおいて、応力モデルの知見⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾を取り入れた新しいタイプの k - ε モデルの提案を行い、従来モデルでは困難であった壁乱流と一様せん断乱流の高精度予測の両立を可能とした。一方、温度場モデルに関しては、鈴木ら⁽¹⁰⁾がJones-Musong⁽¹⁵⁾の乱流熱流束モデルの表式を用いて、自由乱流への適用が可能な温

* 原稿受付 1995年1月10日。

^{*1} 正員, (株)豊田中央研究所 (〒480-11 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道41-1)。

^{*2} 正員, 名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

度場2方程式モデルを提案している。このモデルは、従来困難であった温度場2方程式モデルの自由乱流への適用を可能とした点で先駆的であるが、乱流熱流束 $\overline{u_j t}$ の表式中に熱流束比(例えば $\overline{u t}/\overline{v t}$)が含まれているために、完全に陽的な表現にはなっていない。また、このモデルは自由乱流においては良い結果を与えるものの壁乱流での検証はなされておらず、その適用範囲については議論の余地が多分に残されている。

本研究の目的は、壁乱流と(局所平衡状態から極端には逸脱していない)自由乱流のいずれにおける熱伝達問題にも適用し得る、新しいタイプの温度場2方程式モデルを構築することにある。本論文では、新しく提案するモデルの具体的な形を示すとともに、一様等方性減衰乱流(等方性乱流)、一様せん断乱流、速度・温度同時発達境界層、途中からの急加熱を伴う境界層および一様非等方性乱流における各種乱流熱伝達問題にこれを適用し、対応する実験結果との比較・検討から本モデルの適用性の広さを示す。

2. 記号

- b_{ij} : 非等方テンソル $= \overline{u_i u_j}/2k - \delta_{ij}/3$
 $C_{P1}, C_{P2}, C_{D1}, C_{D2}$: ε_t 方程式のモデル定数
 $C_\lambda, C_{T1}, C_{T2}, C_{T3}$: 温度場の乱流モデル定数
 $C_\mu, C_D, C_{\varepsilon1}, C_{\varepsilon2}, C_s, C_\varepsilon, C_\eta$: 速度場の乱流モデル定数
 c_p : 定圧比熱
 $f_A, f_R, f_\lambda, f_{P1}, f_{P2}, f_{D1}, f_{D2}$: 温度場の乱流モデル関数
 $f_\mu, f_\varepsilon, f_{t1}, f_{t2}$: 速度場の乱流モデル関数
 h : 一様せん断乱流における風洞高さ
 k : 乱流エネルギー $= \overline{u_i u_i}/2$
 M : 自由乱流の格子幅
 $\overline{P}, p$: 流体の平均圧力および変動圧力
 Pr, Pr_t : 分子および乱流プラントル数 $= \nu/\alpha, \nu_t/\alpha_t$
 q_w : 壁面上の熱流束
 R : タイムスケール比 $= \tau_t/\tau_u$
 R_t : 乱流レイノルズ数 $= k^2/\nu\varepsilon$
 S_{ij} : ひずみ速度テンソル $= (\overline{U_{ij}} + \overline{U_{ji}})/2$
 $\overline{T}, t$: 平均温度および変動温度
 $\overline{T}^+$: 無次元温度 $= (\overline{T}_w - \overline{T})/t_\tau$
 $\overline{t}^2$: 温度乱れ強度(分散)
 t_τ : 摩擦温度 $= q_w/\rho c_p u_\tau$
 $\overline{U}_i, u_i$: 平均速度および変動速度
 $\overline{U}^+$: x 軸方向の無次元平均速度 $= \overline{U}/u_\tau$
 u, v : x 軸および y 軸方向の変動速度
 u_ε : Kolmogorov の速度スケール $= (\nu\varepsilon)^{1/4}$
 u_τ : 摩擦速度
 x_i : デカルト座標

- x, y : 主流およびそれと垂直な方向の座標
 y^+, y^* : 壁からの無次元距離 $= u_\tau y/\nu, u_\varepsilon y/\nu$
 α, α_t : 温度伝導率および熱の渦拡散係数
 $\varepsilon, \varepsilon_t$: k および $\overline{t}^2/2$ の散逸率 $= \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}, \alpha \overline{t_{j,i} t_{j,i}}$
 ν, ν_t : 動粘性係数および渦動粘性係数
 ρ : 流体の密度
 Ω_{ij} : 渦度テンソル $= (\overline{U_{i,j}} - \overline{U_{j,i}})/2$
 σ_h, σ_ϕ : 乱流拡散係数
 τ : 時間
 τ_c, τ_m : 速度場および温度場の現象を支配する特性タイムスケール
 τ_u, τ_t : 速度乱れおよび温度乱れのエネルギー保有渦タイムスケール $= k/\varepsilon, \overline{t}^2/2\varepsilon_t$
 Π : 非等方テンソルの第2不変量 $= -b_{ij} b_{ji}/2$
 添字
 e : 境界層外縁の値
 w : 壁面上の値
 $1, 2$: x 軸および y 軸方向
 その他

- $f_{,i}$: 変数 f の x_i による微分 ($f_{,i} = \partial f/\partial x_i, f_{,ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ など)
 $(\overline{\quad})$: アンサンブル平均値
 $D/D\tau$: 実質微分 $= \partial/\partial\tau + \overline{U}_j \partial/\partial x_j$

3. 速度場2方程式モデル

非圧縮性の乱流場を低レイノルズ数形 $k-\varepsilon$ モデル(略して低 Re 数形モデルと呼ぶ)により求める場合の基礎方程式は、次式で与えられる⁽²⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹¹⁾。

$$\overline{U_{i,i}} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$D\overline{U}_i/D\tau = -\overline{P}_{,i}/\rho + (\nu \overline{U_{i,j}} - \overline{u_i u_j})_{,j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Dk/D\tau = P_k - \varepsilon + \text{DIFF}(k) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$D\varepsilon/D\tau = C_{\varepsilon1}(\varepsilon/k)P_k - C_{\varepsilon2}f_\varepsilon\varepsilon^2/k + \text{DIFF}(\varepsilon) \quad \dots\dots (4)$$

ここで、 $\text{DIFF}(k) = \{\nu k_{,j} - \overline{(k' + p/\rho)u_j}\}_{,j}$, $\text{DIFF}(\varepsilon) = \{\nu\varepsilon_{,j} - \overline{\varepsilon' u_j} - (2\nu/\rho)\overline{p_{,i} u_{j,i}}\}_{,j}$, $k' = u_i u_i/2$, $\varepsilon' = \nu u_{i,k} u_{i,k}$, $P_k = -\overline{u_i u_j} \overline{U_{i,j}}$ である。本研究においては、速度場モデルとして最近著者ら⁽¹¹⁾が提案した、壁乱流と一様せん断乱流の両方の高精度予測が可能な $k-\varepsilon$ モデルを用いる。このモデルのレイノルズ応力は、以下のように表される。

$$b_{ij}^* = \frac{1}{1 + \frac{22}{3} \left(\frac{\Omega^{*2}}{4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega^{*2}}{4} - S^{*2} \right) f_B} \left\{ -S_{ij}^* - \left(S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^* \right) + 2 \left(S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} S_{mn}^* S_{mn}^* \delta_{ij} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $S^{*2} = S_{jk}^* S_{jk}^*$, $\Omega^{*2} = \Omega_{jk}^* \Omega_{jk}^*$, $b_{ij}^* = C_D b_{ij}$, $S_{ij}^* = C_D \tau_c S_{ij}$, $\Omega_{ij}^* = 2C_D \tau_c \Omega_{ij}$, $f_B = 1 + C_\eta(\Omega^{*2}/4 - S^{*2})$ であり、

C_D, C_η はモデル定数である。また、 τ_c は速度場の乱流現象を支配する特性タイムスケールで、本モデルでは渦粘性 $\nu_t = C_\mu f_\mu k^2/\varepsilon$ を用いて $\tau_c = \nu_t/k$ と表現される。式(3)および(4)に現れる乱流拡散については、一般化されたこう配拡散近似⁽¹⁶⁾に基づき以下のようにモデル化されている。

$$\overline{(k' + p/\rho) u_j} = -C_s f_{t1} (\nu_t/k) \overline{u_j u_i k_{,i}} \quad (6)$$

$$\overline{\varepsilon' u_j} + (2\nu/\rho) \overline{p_{,i} u_{j,i}} = -C_\varepsilon f_{t2} (\nu_t/k) \overline{u_j u_i \varepsilon_{,i}} \quad (7)$$

本速度場モデル⁽¹¹⁾のモデル関数およびモデル定数を、以下にまとめて示す。

$$\begin{aligned} f_\mu &= [1 + (35/R_t^{3/4}) \exp\{-(R_t/30)^{3/4}\}] \{1 - f_w(26)\} \\ f_\varepsilon &= [1 - 0.3 \exp\{-(R_t/6.5)^2\}] \{1 - f_w(3.7)\} \\ f_{t1} &= 1 + 5f_w(5), \quad f_{t2} = 1 + 4f_w(5) \\ C_\mu &= 0.12, \quad C_D = 0.8, \quad C_\eta = 5, \\ C_{\varepsilon 1} &= 1.45, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad C_s = 1.4, \quad C_\varepsilon = 1.4 \quad \dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $f_w(A) = \exp\{-(y^*/A)^2\}$ は壁面効果の及ぶ範囲を表し、また $R_t = k^2/\nu\varepsilon$ は乱流レイノルズ数である。 $f_w(A)$ 中に現れる壁からの無次元距離 y^* は、はく離・再付着を伴う乱流場にも適用し得るように導入されたもので、Kolmogorovの速度スケール $u_\varepsilon = (\nu\varepsilon)^{1/4}$ を用いて $y^* = u_\varepsilon y/\nu$ と表される⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

4. 新しい温度場2方程式モデルの提案

4.1 基礎方程式 強制対流熱伝達を温度場2方程式モデルにより解析する場合の基礎方程式は、次式で与えられる⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$D\overline{T}/D\tau = (\alpha\overline{T}_{,j} - \overline{u_j T})_{,j} \quad (9)$$

$$D\overline{T^2}/D\tau = \{(\alpha + \alpha_t/\sigma_k)\overline{T^2}_{,j}\}_{,j} + P_t - 2\varepsilon_t \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D\varepsilon_t/D\tau &= \{(\alpha + \alpha_t/\sigma_\phi)\varepsilon_{t,j}\}_{,j} + C_{P1}f_{P1}(\varepsilon_t/\overline{T^2})(P_t/2) \\ &\quad + C_{P2}f_{P2}(\varepsilon_t/k)P_k - C_{D1}f_{D1}\varepsilon_t^2/\overline{T^2} - C_{D2}f_{D2}\varepsilon_t/k \quad \dots (11) \end{aligned}$$

ここで $P_t = -2\overline{u_j T} \overline{T}_{,j}$ は $\overline{T^2}$ の生成率である。式(10)および(11)中の乱流拡散については、従来より用いられている等方性モデルを採用しており、熱の渦拡散係数 α_t は以下のように表現される⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$\alpha_t = C_\lambda k \tau_m \quad (12)$$

式(12)中の τ_m は、乱流熱伝達現象を支配する特性タイムスケールである。なお、乱流熱流束 $\overline{u_j T}$ や τ_m の具体的な表式、および式(10) - (12)中のモデル関数やモデル定数については後述する。

4.2 乱流熱流束のモデル化 本研究では、乱流熱流束 $\overline{u_j T}$ の輸送方程式に対して、局所平衡状態(移流項と拡散項を無視)を仮定して導かれる表式をもとに、新しい $\overline{u_j T}$ のモデリングを行う。まず、局所平衡仮定のもとでの $\overline{u_j T}$ の輸送方程式は、以下になる。

$$0 = P_{jt} + \Phi_{jt} \quad (13)$$

ここで $P_{jt} (= -\overline{u_j u_k} \overline{T}_{,k} - \overline{u_k T} \overline{U}_{j,k})$ は生成項であり、また $\Phi_{jt} (= \overline{(p/\rho) t_{,j}})$ は圧力・温度こう配相関項である。本研究では、 Φ_{jt} のモデルとして最も基本的な以下のようなものを考える⁽¹⁷⁾。

$$\Phi_{jt} = -C_{t1} \overline{u_j T}/\tau_m + C_{t2} \overline{u_k T} \overline{U}_{j,k} + C_{t3} \overline{u_k T} \overline{U}_{k,j} \quad (14)$$

ここで、 C_{t1}, C_{t2}, C_{t3} はモデル定数である。式(14)を式(13)に代入し整理すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \overline{u_j T} &= -C_{T1} \tau_m \overline{u_j u_k} \overline{T}_{,k} - C_{T2} \tau_m \overline{u_k T} \overline{U}_{j,k} \\ &\quad + C_{T3} \tau_m \overline{u_k T} \overline{U}_{k,j} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

ここで、 $C_{T1} = 1/C_{t1}$, $C_{T2} = (1 - C_{t2})/C_{t1}$, $C_{T3} = C_{t3}/C_{t1}$ である。次に、式(15)を $(\sqrt{k}\sqrt{t^2})$ で無次元化することにより、以下の表式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_j T}}{\sqrt{k}\sqrt{t^2}} &= -(\delta_{jk} + 3b_{jk}) \left\{ \frac{2}{3} C_{T1} \left(\frac{\sqrt{k}\tau_m}{\sqrt{t^2}} \right) \overline{T}_{,k} \right\} \\ &\quad - \{(C_{T2} - C_{T3}) \tau_m S_{jk} + (C_{T2} + C_{T3}) \tau_m \Omega_{jk}\} \frac{\overline{u_k T}}{\sqrt{k}\sqrt{t^2}} \quad \dots (16) \end{aligned}$$

さらに、以下のような無次元パラメータを導入する。

$$\begin{aligned} a_{jk}^{**} &= \frac{\overline{u_j T}}{\sqrt{k}\sqrt{t^2}}, \quad b_{jk}^{**} = 3b_{jk}, \quad \overline{T}_k^{**} = \frac{2}{3} C_{T1} \left(\frac{\sqrt{k}\tau_m}{\sqrt{t^2}} \right) \overline{T}_{,k}, \\ S_{jk}^{**} &= (C_{T2} - C_{T3}) \tau_m S_{jk}, \quad \Omega_{jk}^{**} = (C_{T2} + C_{T3}) \tau_m \Omega_{jk} \quad \dots (17) \end{aligned}$$

これらを用いることにより、式(16)は以下のような単純な形に書き換えることができる。

$$a_{jk}^{**} = -(\delta_{jk} + b_{jk}^{**}) \overline{T}_k^{**} - (S_{jk}^{**} + \Omega_{jk}^{**}) a_{k}^{**} \quad (18)$$

2次元空間において式(18)を解析的に解くことにより、以下のような無次元乱流熱流束ベクトル a_{jk}^{**} に対する無次元温度こう配ベクトル $\overline{T}_k^{**}$ を用いた陽的な表現が得られる。

$$\begin{aligned} a_{jk}^{**} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\Omega^{**2} - S^{**2})} \left\{ -\delta_{jk} - b_{jk}^{**} \right. \\ &\quad \left. + (S_{jk}^{**} + \Omega_{jk}^{**}) + (S_{jl}^{**} + \Omega_{jl}^{**}) b_{lk}^{**} \right\} \overline{T}_k^{**} \quad \dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $S^{**2} = S_{jk}^{**} S_{jk}^{**}$, $\Omega^{**2} = \Omega_{jk}^{**} \Omega_{jk}^{**}$ である。式(19)で表される乱流熱流束の表現は、従来用いられてきたものと密接な関係があり、式(19)の右辺 $\{ \}$ 中の第1項のみを考えると等方性モデル⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾で用いる乱流熱流束の表現が得られる。また、同様に第1項および第2項を考慮すると、一般化されたこう配拡散近似⁽¹⁶⁾による表式と一致する。このことは、式(19)の表式を取り入れることにより、高次モデルとの理論的な整合性を保ちつつ、従来の温度場2方程式モデルにおける乱流熱流束の表現を高精度化することが可能であることを示唆する。そこで本研究では、新しく構築する温度場2方程式モデルにおける乱流熱流束 $\overline{u_j T}$ の基本表式として、式(19)を採用する。なお、式(19)は、以下のように書くこともできる。

$$\overline{u_j \bar{t}} = \frac{C_{T1} \tau_m}{1 + \frac{1}{2} \tau_m^2 \{ (C_{T2} + C_{T3})^2 \Omega^2 - (C_{T2} - C_{T3})^2 S^2 \}} \times [-\delta_{jl} + \tau_m \{ (C_{T2} - C_{T3}) S_{jl} + (C_{T2} + C_{T3}) \Omega_{jl} \}] \overline{u_l u_k} \bar{T}_k \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 $S^2 = S_{jk} S_{jk}$ 、 $\Omega^2 = \Omega_{jk} \Omega_{jk}$ である。

4.3 特性タイムスケールの選択 式(12)、(20)に現れる温度場の現象を支配する特性タイムスケール τ_m は、一般に以下のように表現することができる⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。

$$\tau_m = \tau_u f_R f_A f_\lambda = (k/\varepsilon) f_R f_A f_\lambda \dots \dots \dots (21)$$

最近の研究⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾を通して、急加熱やはく離・再付着を伴うような速度場と温度場の相似性が無い場合の熱伝達予測にタイムスケール比 $R(= \tau_t/\tau_u)$ の導入が効果的であることが指摘されており、ここではその効果をモデル関数 f_R で表現する。また、 f_A は速度場のせん断強さ（または非等方性）が熱伝達現象に及ぼす影響を反映するモデル関数であり、本研究ではレイノルズ応力の非等方テンソル b_{ij} の不変量⁽¹⁸⁾を用いてモデル化する。一方 f_λ は、壁乱流への適用に際して、壁面近傍で支配的なスケールの効果を τ_m 中に適切に反映させる目的で導入するモデル関数である（後述）。

まず f_R については、複雑乱流場での有効性が確認されている調和平均形混合タイムスケール⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾を特性タイムスケールとして導入するために、以下のような表式を採用する。

$$f_R = 2R / (0.5 + R) \dots \dots \dots (22)$$

また f_A については、非等方性が強くなるにつれてそれを等方化するタイムスケールが短くなるという一般的な知見を再現するために、Jones-Musong⁽¹⁵⁾のモデルを参考に以下のような形のモデル関数を採用した。

$$f_A = 2 / (1 + 3.5\sqrt{-2\Pi}) \dots \dots \dots (23)$$

ここで、 Π は b_{ij} の第2不変量⁽¹⁸⁾である。

4.4 モデル定数の決定 まず、 C_{T2} と C_{T3} については、式(20)から得られる乱流熱流束比が実験やDNSから得られる平衡解と整合するように決定する。ここでは、速度場において $\overline{U}_{1,2}$ のみが0でなく、かつ温度こう配が x または y 方向にのみ存在する場合を考える。このような場合、熱伝達解析で最も重要な量の一つである熱流束比は、以下のように表現できる。まず、 $\overline{T}_{,1} \neq 0$ の場合には以下のようなようになる。

$$\frac{\overline{u \bar{t}}}{\overline{v \bar{t}}} = \frac{-\left(\frac{1}{3} + b_{11}\right) + b_{12} (C_{T2} \tau_m \overline{U}_{1,2})}{-b_{12} + \left(\frac{1}{3} + b_{11}\right) (-C_{T3} \tau_m \overline{U}_{1,2})} \dots \dots \dots (24)$$

一方、 $\overline{T}_{,2} \neq 0$ の場合には以下のような表現が得られる。

$$\frac{\overline{u \bar{t}}}{\overline{v \bar{t}}} = \frac{-b_{12} + \left(\frac{1}{3} + b_{22}\right) (C_{T2} \tau_m \overline{U}_{1,2})}{-\left(\frac{1}{3} + b_{22}\right) + b_{12} (-C_{T3} \tau_m \overline{U}_{1,2})} \dots \dots \dots (25)$$

これらの表式を一樣せん断乱流の本モデルの平衡解に適用し、モデル定数 C_{T2} および C_{T3} を決定する。Tavoularis-Corrin⁽²¹⁾による一樣せん断乱流の実験では、 $\overline{U}_{1,2} k/\varepsilon \simeq 6.2$ 、 $b_{11} + 1/3 \simeq 0.53$ 、 $b_{22} + 1/3 \simeq 0.18$ 、 $b_{12} \simeq -0.15$ 、 $R \simeq 0.35$ という結果が報告されている。これらの値と式(22)および(23)より $f_R f_A \simeq 0.75$ が得られ、この値を用いて $\tau_m \overline{U}_{1,2}$ を見積もると以下のようなになる。

$$\tau_m \overline{U}_{1,2} = f_R f_A \{ (k/\varepsilon) \overline{U}_{1,2} \} \simeq 0.75 \times 6.2 \simeq 4.6 \dots (26)$$

乱流熱流束比については、実験⁽²¹⁾やDNS⁽²²⁾の平衡解から $\overline{T}_{,1} \neq 0$ の場合に $\overline{u \bar{t}}/\overline{v \bar{t}} \simeq -6.5$ 、また $\overline{T}_{,2} \neq 0$ の場合には $\overline{u \bar{t}}/\overline{v \bar{t}} \simeq -1.8$ 程度の値になることが知られている。したがって、一樣せん断乱流の平衡解⁽²¹⁾の b_{ij} の値および式(24) - (26)から $C_{T2} = 0.18$ 、 $C_{T3} = 0.02$ と定まる。

次に、 C_{T1} については、一樣せん断乱流における乱流プラントル数 Pr_t を検討することにより決定できる。簡単のため、ここでは $\overline{U}_{1,2}$ と $\overline{T}_{,2}$ のみが0でない場合を考える。本モデルの乱流熱流束の表現[式(20)]と従来の等方性モデル⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾で用いられているもの

$$-\overline{v \bar{t}} = \alpha_t \overline{T}_{,2} = C_\lambda k \tau_m \overline{T}_{,2} \dots \dots \dots (27)$$

を比較することにより、式(20)中の一部が以下のように式(27)中の C_λ に対応していることがわかる。

$$C_\lambda = \frac{-2C_{T1}}{1 + C_{T2} C_{T3} (\tau_m \overline{U}_{1,2})^2} \left\{ -\left(\frac{1}{3} + b_{22}\right) + b_{12} (-C_{T3} \tau_m \overline{U}_{1,2}) \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Tavoularis-Corrin⁽²¹⁾の実験により、等方性の渦粘性表現を用いて評価した場合にモデル定数 C_μ はおよそ0.045、また乱流プラントル数については $Pr_t \simeq 1.1$ となることがわかっている。これらの値と式(21)および $\alpha_t = \nu_t/Pr_t$ の関係式を用いると、 C_λ について以下のような見積もりができる。

$$C_\lambda f_R f_A = C_\mu / Pr_t \simeq 0.045/1.1 = 0.041 \dots \dots \dots (29)$$

そこで、Tavoularis-Corrin⁽²¹⁾の実験において $f_R f_A \simeq 0.75$ （前出）であることを考慮し、さらに C_λ の表式として式(28)を採用した場合に式(29)の関係式が満足されるように C_{T1} を定めると、 $C_{T1} = 0.18$ が得られる。ところで、本研究では τ_m に R 等の効果を導入していることから、本モデルの C_{T1} と（ $\tau_m = \tau_u$ とする）標準的な熱流束モデルの C_{t1} [式(14)]との関係は、実質的には $C_{t1} = 1/(C_{T1} f_R f_A)$ で表されることになる。一例として、Sirivat-Warhaft⁽²³⁾の一樣等方性乱流の実験結果を用いて先の関係式を評価してみると、 $R = 0.6 \sim 0.8$ ⁽²³⁾より $C_{t1} = 2.3 \sim 2.6$ が得られ、従来の知見⁽¹⁷⁾と比較しても矛盾しない。なお、 C_{T2} および C_{T3} に対する同様の関係については、速度こう配が存在する場合の応力・熱流束モデルの圧力変動に関係する相関項のモデル化に対して最近さまざまな問題点が指摘・議論されている

最中である⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾ことを鑑み、ここでは敢えて詳細な比較・検討は行わない。

式(11)中のモデル定数についても、一様せん断乱流の平衡解から得られる知見を考慮して以下のように決定する。この場では τ_t が一定値になることから、以下のような関係式が成立する。

$$\frac{D\tau_t}{D\tau} = \frac{D}{D\tau} \left(\frac{\bar{t}^2}{2\varepsilon_t} \right) = \frac{1}{2\varepsilon_t} \frac{D\bar{t}^2}{D\tau} - \frac{\bar{t}^2}{2\varepsilon_t^2} \frac{D\varepsilon_t}{D\tau} = 0 \quad \dots\dots (30)$$

式(10)および(11)を式(30)に代入すると、以下の関係が得られる。

$$\left(\frac{P_t}{2\varepsilon_t} \right) \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{C_{P2} \left(\frac{C_{\varepsilon 2}-1}{C_{\varepsilon 1}-1} \right) - 0.9}{1 - \frac{C_{P1}}{2}} \quad \dots\dots (31)$$

ここで本研究では、標準値⁽⁴⁾⁽⁵⁾ $C_{D1} = 2.0$ および $C_{D2} = 0.9$ を採用した。また、式(31)を導出するにあたり、一様せん断乱流の平衡解における関係式 $P_k/\varepsilon = (C_{\varepsilon 2} - 1)/(C_{\varepsilon 1} - 1)$ を用いている。Tavoularis-Corrsin⁽²¹⁾の実験から得られる値($P_t/2\varepsilon_t \simeq 1.25$, $R \simeq 0.35$)を用いると、式(31)の左辺について以下のような見積もりが得られる。

$$(P_t/2\varepsilon_t)(1/R) \simeq 3.6 \quad \dots\dots (32)$$

一方、 C_{P1} および C_{P2} は式(31)とともに、壁乱流における定応力・定熱流束層の関係式も併せて満足する必要がある⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これらの条件を考慮しつつ数値最適化を行った結果、本研究では $C_{P1} = 1.9$ および $C_{P2} = 0.55$ を採用することにした。なお、ここで採用されたモデル定数は、壁乱流用のモデル⁽⁸⁾⁽⁹⁾で提案されたもの($C_{P1} = 1.9$, $C_{P2} = 0.6$)と比べてもその変更は極めて小さく、壁乱流においても十分妥当なものである。

式(10)および(11)の乱流拡散に現れる係数については、先の定応力・定熱流束層の関係式を基本とし、かつ最近の研究成果⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾も考慮して以下のように決定した。

$$\sigma_h = 1.8/f_{t1}, \quad \sigma_\phi = 1.4/f_{t2} \quad \dots\dots (33)$$

ここで f_{t1} および f_{t2} は、式(8)で与えられた速度場のモデル関数と同一である。なお、乱流拡散で用いる熱の渦拡散係数 α_t [式(12)]中のモデル定数 C_λ については、過去の研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾に従い標準的な値である $C_\lambda = 0.1$ を採用した。

4.5 低 Re 数形モデルへの拡張 壁面効果を考慮するための低 Re 数形モデル関数については、以下のように決定した。まず式(21)に現れる f_λ については、安倍ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾によるものを基本とするが、最近の研究⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾により示された知見を考慮し、若干の修正を行った。本モデルで用いた f_λ の具体的な形は、以下のとおりである。

$$f_\lambda = \left[1 + \frac{24}{R_t^{\frac{3}{4}} f_R f_A} \sqrt{\frac{2R}{Pr}} \exp \left\{ - \left(\frac{R_t}{30} \right)^{\frac{3}{4}} \right\} \right] \times \{ 1 - f_w(26) \} \quad \dots\dots (34)$$

一方、式(21)、(34)中に現れる f_A については、壁面のごく近傍の極端に非等方性が強い領域において予測精度に悪影響を及ぼすことがないように、式(23)に対して以下のような修正を施す。

$$f_A = \left(\frac{2}{1 + 3.5\sqrt{-2\Pi}} \right) \times \left\{ 1 + \left(\frac{1 + 3.5\sqrt{-2\Pi}}{2} - 1 \right) f_w(26) \right\} \quad \dots\dots (35)$$

式(35)で表される f_A は、壁から離れた領域で厳密に式(23)と一致し、壁面のごく近傍においてその影響が消失する($f_A \rightarrow 1$)ように構成されている^{*3}。その他のモデル関数についても、基本的に安倍ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾の議論に従うが、 f_λ の場合と同様に最近の研究成果⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾を考慮した。具体的なモデル関数の形は、以下のようなものである。

$$f_{P1} = 1 - f_w(3), \quad f_{P2} = 1, \quad f_{D1} = 1 - f_w(3), \\ f_{D2} = (1/C_{D2})(C_{\varepsilon 2} f_2 - 1) \{ 1 - f_w(7) \} \quad \dots\dots (36)$$

ここで、 $f_2 = 1 - 0.3 \exp \{ -(R_t/6.5)^2 \}$ である⁽⁴⁾。

ところで、本研究の主たる目的の一つは、従来の温度場2方程式モデルでは困難であった壁乱流と自由乱流の熱伝達解析の両立を可能とすることにある。また、高次モデルとの関係を適切に考慮することにより、モデルの高精度化を図る指針を提案することも大きな目的となっている。ただし、温度場モデルを構成するにあたり、 Pr 数依存性については、既報⁽⁸⁾⁽⁹⁾を参考に信頼性の高いものを必要最小限考慮するにとどめている。また、後述する適用例についても、すべて空気流($Pr=0.71$)の乱流熱伝達を選び、ここでは Pr 数依存性については敢えて議論しない。 Pr 数が1より非常に大きい場合や逆に小さい場合のモデル化手法については最近長野ら⁽²⁷⁾が詳細に議論しており、そこではモデル化の具体的な指針も示されている。この知見を本モデルに取り入れることは、今後の課題である。

5. 適用結果および考察

新しく構築したモデルを、等方性乱流⁽²³⁾、一様せん断乱流⁽²¹⁾、速度・温度同時発達境界層⁽²⁸⁾、途中からの急加熱を伴う境界層⁽²⁹⁾および一様非等方性乱流⁽³⁰⁾における各種乱流熱伝達問題に適用し、対応する実験結果との比較から本モデルの予測精度について検討を

^{*3}ここで導入した f_A に対する壁面近傍の補正は、漸近挙動も含めて壁面効果を適切に反映させる f_λ の議論⁽⁸⁾⁽⁹⁾と比べると、その物理的根拠はまだ十分でなく検討の余地が残されている。

図1 一様せん断乱流におけるレイノルズ応力

行なう。なお、等方性乱流、一様せん断乱流および一様非等方性乱流については、標準的なモデルによる予測結果を、比較対象として併せて図中に示した。標準的なモデルとしては、速度場については標準 $k-\varepsilon$ モデル ($C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.45$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$) を、また温度場については Pr_t 一定を仮定するのと同等の扱い [式 (27) において $C_\lambda = 0.1$, $\tau_m = k/\varepsilon$] に加えて式 (11) において $C_{P1} = 1.8$, $C_{P2} = 0.77$, $C_{D1} = 2.0$, $C_{D2} = 0.9$ としたものの (27) をそれぞれ用いた。

等方性乱流、一様せん断乱流および一様非等方性乱流の解析は、ある位置における実験値を初期値として与え、そこから4次のRunge-Kutta法により下流へ計算を進める方法を採用した。一方、乱流境界層における熱伝達問題については、服部ら⁽³¹⁾と同一の方法により計算を行った。計算格子には、壁から垂直な方向に201点の不等間隔格子を用いており、格子依存性のない解が得られることは既に確認されている⁽³¹⁾。対象とする場の加熱条件は、Gibsonら⁽²⁸⁾の場合には壁温一定加熱であり、Antoniaら⁽²⁹⁾の場合には、途中までは断熱（主流と同一温度）で、ある場所（加熱開始点）から熱流束一定加熱である。今回の計算における境界条件の設定方法については、Youssefら⁽⁵⁾に従った。なお、壁温変動については、いずれの場合も $\bar{t}'' = 0$ とした。

最初に、一様せん断乱流⁽²¹⁾および速度・温度同時発達境界層問題⁽²⁸⁾に対する速度場モデル⁽¹¹⁾の予測結果を、図1および2に示す。高精度の乱流熱伝達解析を行うためには、温度場モデルはもちろんのこと、速度場モデルについても高い予測精度を有していることが不可欠である⁽³²⁾。図1および2から、本速度場モデル⁽¹¹⁾が一様せん断乱流⁽²¹⁾と壁乱流⁽²⁸⁾の両方について高精度の予測結果を与えており、新しく構築した温度場モデルと併用するに十分な能力を有していることがわかる。なお、等方性乱流の k や ε についても、高精度の解が得られることを確認している（図省略）。

次に、今回新しく提案した温度場2方程式モデルを

図2 速度・温度同時発達境界層の平均速度分布

図3 一様等方性乱流における温度乱れ

図4 一様等方性乱流における乱流熱流束

適用して得られた熱伝達解析の結果を、図3から図9に示す。まず、図3および図4は等方性乱流の計算結果をSirivat-Warhaft⁽²³⁾の実験結果と比較したものであるが、これらの図から本モデルにより予測精度が大幅に改善されることがわかる。それに対して標準モデルによる結果では、温度乱れ、乱流熱流束とも著しく過小予測されており、速度場と温度場の相似性を頼りに計算を行なうことの限界を示している。なお、仮に標準モデルを用いてこの問題を精度良く予測するためには、式(27)中のモデル定数 C_λ を標準値(0.1)よりもかなり大きい0.2~0.3程度の値にすることが必要である。

一方、図5および図6は、一様せん断乱流の予測結果をTavoularis-Corrin⁽²¹⁾の実験結果と比較したものであ

図5 一様せん断乱流における温度乱れ

図6 一様せん断乱流における乱流熱流束

る。標準モデルが温度乱れ $\bar{t}^2$ と乱流熱流束 $\overline{u't}$ を著しく過大に予測しているのに対して、本モデルはそれらのいずれについても実験結果を高精度で再現している。また、式(27)のような従来モデルでは原理的に予測が不可能であった流れ方向の乱流熱流束 $\overline{u't}$ についても、本モデルを用いることにより十分な精度で予測できることが図6からわかる。なお、仮に標準モデルを用いて一様せん断乱流の熱伝達を精度良く予測するためには、渦粘性 ν_t の定数を $C_\mu \approx 0.045$ (標準値0.09)にすると同時に、式(27)中のモデル定数 C_λ を標準値(0.1)よりも小さい0.04程度の値にすることが必要である。

次に、Gibsonら⁽²⁸⁾の実験に合わせて行った計算により得られた平均温度分布を図7に、またAntoniaら⁽²⁹⁾の実験に対応する平均温度分布の流れ方向の発達の様子を図8にそれぞれ示す。いずれの場合も予測結果は良好であり、本モデルが壁乱流における熱伝達解析についても、既報⁽⁸⁾⁽⁹⁾で提案した温度場2方程式モデルと同等の高い予測精度を有することがわかる。

最後に、前川ら⁽³⁰⁾の実験条件に合わせて行った一様非等方性乱流の計算結果を、図9に示す。輸送効果を考慮していない代数形の2方程式モデルではこの種の速度場の正しい予測が原理的に困難であることから、速度場については実験値⁽³⁰⁾を補間して与えた。図9から、実験結果⁽³⁰⁾との対応に関して若干不十分な点は残

図7 速度・温度同時発達境界層の平均温度分布

図8 急加熱を伴う境界層における平均温度分布

図9 一様非等方性乱流における温度乱れ

るものの、本温度場モデルが標準モデルの予測精度を大きく改善していることが理解できる。ここで示したように本モデルは、代数形の陽的なモデルであるにもかかわらず、上記のような非平衡的な要素の強い場に対してもかなりの予測能力を有する。

ところで、今回の検討結果において注目すべきは、標準モデルを用いて温度乱れや乱流熱流束を求めた場

合に、等方性乱流ではこれらを過小に予測する一方で、一様せん断乱流では逆に過大に予測してしまうという点である。「壁がない」という意味において両者はいずれも「自由乱流」の範疇に属するが、両者の間では非等方性の度合いやタイムスケール比が大きく異なっており、それが熱伝達現象に大きな影響を与えていると考えられる。特に、今回検討した等方性乱流、壁乱流および一様せん断乱流における熱伝達現象を標準モデルで精度良く解析することを考えた場合に、速度場のせん断強さ $\overline{U}_{1,2}k/\varepsilon$ が大きくなる($0 \rightarrow 3.3 \rightarrow 6$)につれて、式(27)の C_λ の推奨値を系統的に小さくしなければならぬ($0.2 \sim 0.3 \rightarrow 0.1 \rightarrow 0.04$)点は興味深い。このことは、せん断(または非等方性)が強くなるにつれて現象を支配しているタイムスケールが短くなることを示唆しており、今回導入したモデル関数 f_A の妥当性をさらに詳細に議論していくうえで貴重な知見であると考えられる。以上の議論からわかるように、高次モデルの知見を適切に考慮しつつモデルの高精度化を図ることは、モデルの普遍性や汎用性を高める上で極めて重要である。

6. 結 言

乱流熱流束モデルを代数近似して得られた表式をもとに、その持つ長所を反映させた新しいタイプの温度場2方程式モデルを構築した。その際、壁面効果を適切に考慮するために、先に提案した低 Re 数形モデル⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾の知見を十分に活かしている。また、熱伝達現象を支配する特性タイムスケールに関しては、既報⁽⁸⁾⁽⁹⁾で導入した速度場と温度場のタイムスケールのうちで短い方に重きを置いた調和平均的な特性に加えて、非等方性の強さが熱伝達現象に及ぼす影響についても併せて考慮した。

さらに本研究では、提案したモデルを種々の乱流熱伝達場(一様等方性減衰乱流、一様せん断乱流、速度・温度同時発達境界層および急加熱を伴う乱流境界層)に適用し、いずれの場合も満足し得る精度で予測が可能であることを示した。また、非平衡的な要素の強い一様非等方性乱流熱伝達場についても、本モデルにより予測精度が改善されることを確認した。このように、従来の温度場2方程式モデルでは困難であった壁乱流と自由乱流における熱伝達解析の両立を可能とし、温度場2方程式モデルの適用範囲を大幅に拡大した点が、本モデルにおける最大の特徴であると言える。

以上の議論および検証により、工学上重要な複雑乱流場の熱伝達予測において、本研究で提案したモデル

構築の基本概念が有効であることが示された。

本研究の一部は、文部省科学研究費補助金重点領域研究(1)(No. 05240103)の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) 明・笠木, 機論, 54-507, B(1988), 3003.
- (2) Nagano, Y. and Tagawa, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **112**(1990), 33.
- (3) Nagano, Y. and Kim, C., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **110**(1988), 583.
- (4) Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T., *Proc. ASME/JSME Thermal Eng. Joint Conf.* (Edited by Lloyd, J. and Kurosaki, Y.), **3**(1991), 233.
- (5) Youssef, M. S., Nagano, Y. and Tagawa, M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**(1992), 3095.
- (6) 安倍・長野・近藤, 機論, 58-554, B(1992), 3003.
- (7) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **37**(1994), 139.
- (8) 安倍・長野・近藤, 機論, 60-573, B(1994), 1743.
- (9) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **38**(1995), 1467.
- (10) 鈴木・松本・長野・田川, 機論, 58-552, B(1992), 2565.
- (11) 安倍・近藤・長野, 機論, 61-585, B(1995), 1714.
- (12) Pope, S. B., *J. Fluid Mech.*, **72**(1975), 331.
- (13) Taulbee, D. B., *Phys. Fluids A*, **4**(1992), 2555.
- (14) Gatski, T. B. and Speziale, C. G., *J. Fluid Mech.*, **254**(1993), 59.
- (15) Jones, W. P. and Musonge, P., *Phys. Fluids*, **31**(1988), 3589.
- (16) Daly, B. J. and Harlow, F. H., *Phys. Fluids*, **13**(1970), 2634.
- (17) Launder, B. E., *Turbulence* (Edited by Bradshaw, P.), (1976), 231, Springer.
- (18) Lumley, J. L., *Advances in Applied Mechanics* (Edited by Yin, C. S.), (1978), 129, Academic Press.
- (19) Zeman, O. and Lumley, J. L., *J. Atmos. Sci.*, **33**(1976), 1974.
- (20) Shikazono, N. and Kasagi, N., *Proceedings of 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, (1993), 18.3, Kyoto.
- (21) Tavoularis, S. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, **104**(1981), 311.
- (22) Rogers, M. M., Moin, P. and Reynolds, W. C., *Report No. TF-25 1986*, Dept. Mech. Eng., Stanford University, (1986).
- (23) Sirivat, A. and Warhaft, Z., *J. Fluid Mech.*, **128**(1983), 323.
- (24) 長野・島田, 数値流体力学, **2-2**(1994), 5.
- (25) 長野・島田, 数値流体力学, **2-3**(1994), 19.
- (26) Nagano, Y. and Shimada, M., *Proceedings of 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, (1993), 23.2, Kyoto.
- (27) Nagano, Y., Shimada, M. and Youssef, M. S., *Proceedings of Int. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Vol. I, (1994), 3.2, Lisbon.
- (28) Gibson, M. M., Verriopoulos, C. A. and Nagano, Y., *Turbulent Shear Flows 3* (Edited by Bradbury, L. J. S., ほか4名), (1982), 80, Springer.
- (29) Antonia, R. A., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **80**(1977), 153.
- (30) 前川・小林・沢井・佐藤, 機論, 45-393, B(1979), 694.
- (31) Hattori, H., Nagano, Y. and Tagawa, M., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2* (Edited by Rodi, W. and Martelli, F.), (1993), 43.
- (32) Launder, B. E., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **110** (1988), 1112.