ポテンシャル流体中での軸対称物体近傍における
トラベリング気泡の成長*高比良 裕之^{*1}Growth of Traveling Bubbles near an Axisymmetric Body
in a Potential Flow

Hiroyuki TAKAHIRA

This paper deals with the dynamics of a cluster of bubbles in a potential flow. The governing equations of the bubble cluster are derived by means of a series expansion of spherical harmonics. The three-dimensional translational motion and deformation, which are induced by bubble-bubble interactions and the pressure gradient due to fixed simple sources, are taken into consideration. Accuracy of the present theory is confirmed by comparison with the boundary element method. The theory is applied to the dynamics of traveling bubbles around two kinds of axisymmetric body. It is shown that the bubble deformation is greatly affected by the pressure gradient around a body. It is also shown that the bubble growth is reduced by bubble-bubble/bubble-wall interactions. The growth rate of interacting bubbles depends on both initial radius and initial location of bubbles. When one bubble grows much faster than the other bubbles, the growth rate of the other bubbles becomes much lower than that predicted by a single-bubble theory.

Key Words: Bubble, Cavitation, Potential Flow, Growth, Deformation, Bubble-Bubble Interaction, Axisymmetric Body

1. 緒 言

気泡同士ならびに壁面と気泡との相互作用は、材料損傷や流体機械の振動・騒音などのキャビテーションに関連した諸現象を解明するうえで重要な研究課題となっている。著者は、これまでに気泡間の相互作用に起因する3次元並進運動・変形を考慮した気泡群の運動方程式を導出し⁽¹⁾、気泡の崩壊挙動を解析してきた⁽²⁾。そこでは、問題を単純化し、最初球形を保って静止している気泡周囲の液体圧力が、ある瞬間に一樣にステップ状に上昇する状況を想定した。しかし、現実には、キャビテーション気泡は流れに起因する非一樣な圧力勾配の中に置かれており、この非一樣な圧力勾配が気泡の挙動に影響を及ぼすものと考えられる。実際、Ceccioら⁽³⁾は実験的に頭状物体(ヘッドフォーム)周りの気泡が複雑な3次元変形を伴いながら、成長・崩壊していることを示している。

こうした物体近傍の非一樣な圧力勾配中での気泡の3次元挙動を、境界層・剥離などの物体近傍での厳密な流れ場を考慮して解析するのは困難であるため、多

くの場合ポテンシャル流れを仮定して解析が行われている。ポテンシャル問題の場合、境界要素法(BEM)は、非球形気泡の力学を扱う有効な方法としてよく用いられているが^{(4)~(7)}、BEMを3次元の変形を伴う N 個の複数気泡の問題に応用する場合には、各気泡表面の分割数を N_b とすると、 $[N \cdot N_b] \times [N \cdot N_b]$ の密行列を持つ連立方程式を各時間ステップごとに解かねばならないため、一般に計算時間がかかるという問題がある。そのため、これまでの解析では、ある種のモデル化ならびに問題の単純化が計られている。例えば、Kuhn de Chizelleら⁽⁸⁾は、気泡を一つの吹き出しとしてモデル化することにより、Schiebe物体周りの単一トラベリング気泡の挙動をシミュレートし、Ceccioらの観測結果⁽³⁾と定性的によく一致することを示している。Yehら⁽⁹⁾は、ルジャンドル関数展開を用いて、単一ソースにより作られる圧力勾配中で軸対称変形する単一気泡の力学を扱っている。また、Robinsonら⁽¹⁰⁾は、物体からいったん離れ、再付着する気泡の挙動を扱うモデルとして、ポテンシャル問題において軸対称よどみ点流れを付加して、境界要素法を用いて軸対称気泡の崩壊を解析している。

本研究では、これまでの気泡群の力学理論⁽¹⁾を、ポ

* 原稿受付 1995年6月29日。

*¹ 正員、京都大学工学部(〒606-01 京都市左京区吉田本町)
[現:大阪府立大学工学部(〒593 堺市学園町1-1)]。

テンシアル流体中での圧力勾配を考慮した力学理論へ発展させる。そこでは、物体を時間依存の吹き出しの集合と考えて、3次元変形を伴う物体近傍での気泡の挙動を扱う。以下では、運動方程式の導出と、いくつかの応用例を示し、気泡間の相互作用ならびに物体周りの圧力勾配が気泡の成長に及ぼす効果を考察する。

2. 気泡群の運動方程式

本解析では、対象をポテンシャル問題に限り、一様流中に置かれた物体を M 個の点ソースの集合に置き換える。そのため、本解析は、一様流ならびに M 個の点ソースと N 個の気泡との間の相互干渉を考慮した力学を扱う問題に帰着し、気泡は一様流と点ソース群ならびに他の気泡により作り出される圧力勾配のもとで成長することになる。なお、気泡は最初球形を保っているものとする。

以下の仮定の下で解析を行う。(i) 液体の圧縮性・粘性を無視し、流れは渦なしとする。(ii) 気泡内部には飽和蒸気と非凝縮性気体が入っているものとし、蒸気圧は一定、非凝縮性気体はボルトローブ変化するものと仮定する。(iii) 気泡の質量を無視する。(iv) 重力を無視する。本研究の主たる興味は、圧力勾配を有する流れ場中での気泡群の力学の枠組みを構築することにあるため、気泡内部および界面での熱・物質移動の効果^{(11)~(13)}をここでは考えない。また、物体周りの流れを考える場合には、粘性境界層や流れの剥離、それらに起因して気泡に働く力を考慮する必要があるが、本研究では問題を単純化し、こうした効果を無視する。仮定 (i) より気泡外部には、速度ポテンシャル φ が定義され、 φ はラプラス方程式を満足する。

Fig.1 に本解析で用いた座標系を示す。静止座標系の原点を o 、速度 $\vec{v}_I$ で並進運動をしている気泡 I ($I=1,2,\dots,N$) の中心を o_I とし、 o_I を原点とするデカルト座標 x_I, y_I, z_I と極座標 r_I, θ_I, ψ_I を定義する。ここで、静止座標系と移動座標系の三軸の方向は一致している。また、 o_I と気泡 J の中心 o_J との距離を L_{IJ} とする。液体中の任意の位置を P とするとき、 $\vec{X}$ は $o\vec{P}$ を、 $\vec{X}_k$ は点ソース k の位置ベクトルを表している。

極座標系 I を用いると、気泡の運動により誘起される速度ポテンシャル φ_B は次式で与えられる。

$$\varphi_B = \sum_{I=1}^N \left\{ \frac{q_{I0}(t)}{r_I} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{Inm}(t)}{r_I^{n+1}} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \right\} \quad (1)$$

ここで、

$$Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) = P_n^{(m)}(\cos \theta_I) e^{im\psi_I} \quad (2)$$

t は時間、 q_{I0} 、 q_{Inm} ($n \geq 1, -n \leq m \leq n$) は時間依存の未知関数、 $Y_{nm}(\theta_I, \psi_I)$ は極座標系 I で定義される球面調和関数、 $P_n^{(m)}$ は n, m 次のルジャンドル陪関数、 i

Fig.1 Coordinate system

は虚数単位を表している。 $m=0$ のとき、 Y_{nm} はルジャンドル関数 $P_n(\cos \theta_I)$ に帰着する。式 (1) の q_{I0}/r_I の項は、気泡 I の半径方向の運動に伴う項を、 q_{Inm}/r_I^n を含む項は並進運動に関する項、 q_{Inm}/r_I^{n+1} ($n \geq 2$) を含む項は気泡変形に関する項を表している。

空間に固定された点ソースによる速度ポテンシャル φ_S ならびに一様流による速度ポテンシャル φ_U はそれぞれ、次のように与えられる。

$$\varphi_S = \sum_{k=1}^M \frac{Q_k(t)}{\eta_k} \quad (3)$$

$$\varphi_U = \vec{U} \cdot \vec{X} \quad (4)$$

ここで、 Q_k は時間依存の点ソースの強さ、 $\eta_k = |\vec{X} - \vec{X}_k|$ 、 $\vec{U}$ は一様流の速度ベクトルを表している。以上のポテンシャルの重ね合わせとして、液体の速度ポテンシャル φ が次式のように定義される。

$$\varphi = \varphi_B + \varphi_S + \varphi_U \quad (5)$$

次に、 φ_B と同様に、気泡 I の表面 ($S_I(t, r_I, \theta_I, \psi_I) = 0$) を球面調和関数を用いて以下のように展開する。

$$S_I = r_I - R_I(t, \theta_I, \psi_I) = 0,$$

$$R_I = R_{I0}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{Inm}(t) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \quad (6)$$

ここで、 R_{I0} は気泡 I の球形モード半径、 R_{Inm} ($n \geq 2$) は球形からの変形量を表している。

気泡 I の表面での境界条件は、極座標系 I を用いると、以下の二式で与えられる。

$$\frac{\partial S_I}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I S_I + \nabla_I \varphi \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 + \frac{p_{Iw} - p_{\infty}}{\rho} - \frac{1}{2} |\vec{U}|^2 + \vec{U} \cdot \vec{v}_I = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$p_{Iw} = p_v + p_{Ig0} \left(\frac{V_{I0}}{V_I} \right)^\gamma - 2\sigma H_I \quad (9)$$

∇_I は極座標系 I で定義される勾配, ρ は液体の密度, p_{Iw} は気泡 I 表面での液体圧力, p_∞ は無限遠方での液体圧力, p_v は飽和蒸気圧, p_{I0} は非凝縮性気体の初期圧力, V_I は気泡体積, V_{I0} 初期気泡体積, γ はポリトロップ指数, σ は表面張力係数, H_I は平均曲率を表している. 式 (7) は, 気泡表面を流体が貫かないことを表しており, 式 (8) は, 非定常ベルヌーイの式を気泡表面と無限遠方との間に適用することにより得られる. なお, 気泡内圧力を決める際には仮定 (ii) を用いている. 気泡中心の並進移動速度ベクトル $\vec{v}_I$ は, 極座標系 I の単位ベクトル ($\vec{e}_{r_I}, \vec{e}_{\theta_I}, \vec{e}_{\psi_I}$) を用いて,

$$\vec{v}_I = \sum_{m=-1}^1 v_{Im} \left\{ P_1^{(m)} \vec{e}_{r_I} + \frac{dP_1^{(m)}}{d\theta_I} \vec{e}_{\theta_I} + \frac{im}{\sin\theta_I} P_1^{(m)} \vec{e}_{\psi_I} \right\} e^{im\psi_I} \quad (10)$$

と表現される. $\vec{U}$ も $\vec{v}_I$ と同様に記述される.

式 (7), (8) を満足する R_{I0} , v_I , R_{Inm} 等の関係式を導くことにより, 気泡群の運動方程式が得られるが, その導出の過程は, 既報⁽¹⁾と本質的に同じであるため, 以下での導出の概要のみを示す.

まず, 以下に示す球面調和関数の関係を用いて, 極座標系 J の変数を極座標系 I の変数で表現する.

$$\frac{1}{r_J} = \frac{1}{L_{IJ}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_I}{L_{IJ}} \right)^n \sum_{m=-n}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \times Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}), \quad r_I < L_{IJ} \quad (11)$$

ここで,

$$\bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) = P_n^{(m)}(\cos\theta_{IJ}) e^{-im\psi_{IJ}} \quad (12)$$

(L_{IJ} , θ_{IJ} , ψ_{IJ}) は $\vec{OI} \cdot \vec{OJ}$ の成分を表している. $1/\eta_k$ に関しても同様の展開を行うと, 速度ポテンシャルを極座標系 I の変数を用いて表現できる.

次に, 極座標系 I の変数で表現された速度ポテンシャル φ を境界条件式 (7) に代入し, 球面調和関数の直交性を用いると, 式 (1) の未知関数 q_{I0} , q_{Inm} ($n \geq 1$, $-n \leq m \leq n$) が以下のように決定される.

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (13)$$

$$q_{I1m} = -\frac{R_{I0}^3}{2} (v_{Imr} + F_{I1m}), \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (14)$$

$$q_{Inm} = -\frac{R_{I0}^{n+2}}{n+1} \left\{ \dot{R}_{Inm} + \frac{2\dot{R}_{I0}R_{Inm}}{R_{I0}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \frac{nR_{I0}^{n-1}q_{J0}}{L_{IJ}^{n+1}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) - \sum_{k=1}^M \frac{nR_{I0}^{n-1}Q_k}{\eta_{Ik}^{n+1}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \bar{Y}_{nm}(\theta_{Ik}, \psi_{Ik}) + F_{Inm} \right\}, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (15)$$

ここで,

$$v_{Imr} = v_{Im} - u_{Im} - U_m, \quad m = -1, 0, 1 \quad (16)$$

$$u_{Im} = \frac{(1-|m|)!}{(1+|m|)!} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \frac{q_{J0}}{L_{IJ}^2} \bar{Y}_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) + \sum_{k=1}^M \frac{Q_k}{\eta_{Ik}^2} \bar{Y}_{1m}(\theta_{Ik}, \psi_{Ik}) \right\}, \quad m = -1, 0, 1 \quad (17)$$

ドットは時間微分を, (η_{Ik} , θ_{Ik} , ψ_{Ik}) は $\vec{X}_k - \vec{OI}$ の成分を表している. v_{Imr} ($m = -1, 0, 1$) は気泡中心の相対並進移動速度 $\vec{v}_{Ir}$ の成分を, u_{Im} は他の気泡ならびに点ソースが気泡 I の中心に誘起する流れ $\vec{u}_I$ の成分を表している. F_{I1m} , F_{Inm} ($n \geq 2$) は, それぞれ並進運動 ($n = 1$ 成分) が, q_{I1m} , q_{Inm} ($n \geq 2$) に及ぼす効果を表す項であり, その詳細は文献 (1) を参照されたい. ただし, F_{Inm} ($n \geq 2$) には文献 (1) で示した式よりも高次のオーダーの項 (例えば, $v_{I0} \times R_{I(n+1)0}$ を含む項) を考慮した (ページ数の都合上その記述は省略する). F_{Inm} ($n \geq 2$) 以外に, 式 (13)~(15) と文献 (1) で示した式との相違は, 相対並進移動速度に一樣流と点ソースが誘起する流れが付加されていること, ならびに式 (15) に, 点ソースが変形に及ぼす効果が入っていることにある. なお, 以上の式の導出の際には, 既報と同様に (R_{Inm}/R_{I0})² ($n \geq 2$) 以上の高次のオーダーの項が無視されている.

式 (13)~(15) を用いて表現される速度ポテンシャルを境界条件式 (8) に代入して球面調和関数の直交性を用い, さらに, 式 (13)~(15) の導出と同様の近似を施すと, 以下に示す気泡群の運動方程式が得られる.

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{p_{Iw0} - p_\infty}{\rho} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{q_{J0}}{L_{IJ}} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \sum_{m=-1}^1 \frac{\dot{q}_{J1m}}{L_{IJ}^2} Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) + \sum_{k=1}^M \frac{d}{dt} \left(\frac{Q_k}{\eta_{Ik}} \right) + \frac{3v_{I0r}^2}{4} + 3v_{I1r}v_{I(-1)r} - \frac{(v_{I0} - U_0)^2}{2} - 2(v_{I1} - U_1)(v_{I(-1)} - U_{(-1)}) \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho V_{Ib} v_{Imr} \right) - \rho V_{Ib} \frac{du_{Im}}{dt} - \frac{2\pi\rho}{3} R_{I0}^2 G_{I1m} = 0, \quad m = -1, 0, 1 \quad (19)$$

$$R_{I0} \ddot{R}_{Inm} + 3\dot{R}_{I0} \dot{R}_{Inm} + (n-1)R_{Inm} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2\rho} \right\} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_{I0}^n q_{J0} \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})}{L_{IJ}^{n+1}} \right) + \sum_{k=1}^M \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_{I0}^n Q_k \bar{Y}_{nm}(\theta_{Ik}, \psi_{Ik})}{\eta_{Ik}^{n+1}} \right) + G_{Inm}, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (20)$$

ここで,

$$p_{Iw0} = p_v + p_{I0} \left(\frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \quad (21)$$

$$V_{Ib} = \frac{4\pi R_{I0}^3}{3} \quad (22)$$

式(19),(20)における $G_{Inm}(n \geq 1)$ は, $F_{Inm}(n \geq 1)$ と同様に気泡の並進運動が各モードに及ぼす効果を表す項である. $G_{Inm}(n \geq 2)$ に関しても, $F_{Inm}(n \geq 2)$ で新たに考慮した項と同オーダーの高次の項を考慮したが, やはりページ数の都合上その記述は省略する. なお, ポテンシャル理論から見積もられる気泡表面での速度勾配を用いて粘性消散率を評価することにより, 気泡群の運動方程式に液体の粘性の効果を付加することが可能である⁽¹⁾. 点ソースの存在に起因する粘性項は, 気泡 J の球形モードポテンシャル $q_{J0}/r_J (J \neq I)$ による粘性項と同様の形で入ってくる. そのため, 液体の粘性の効果を考慮するには, 文献(1)で示した粘性項における $q_{J0}, L_{IJ}, \theta_{IJ}, \psi_{IJ}$ を $Q_k, \eta_{Ik}, \theta_{Ik}, \psi_{Ik}$ に置き換えた項を追加すればよい.

これら気泡群の方程式は, $L_{IJ} \rightarrow \infty$ とすると, 単一気泡の運動方程式に帰着する. いま, 式(18)において, 気泡間相互作用の項を無視すると,

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{p_{Iw0} - p_{Iq}}{\rho} + \frac{|\vec{v}_{Ir}|^2}{4} \quad (23)$$

を得る. ここで,

$$p_{Iq} = p_{\infty} + \rho \frac{|\vec{U}|^2}{2} - \rho \frac{|\vec{U} + \vec{u}_I|^2}{2} \quad (24)$$

であり, p_{Iq} は気泡がないときに, 一様流と点ソースにより誘起される気泡中心での液体圧力と解釈される. それゆえ, 気泡は, 並進運動に関する式(19)から決定されるパスに沿った圧力の変化によって成長・崩壊することになる. なお, 式(23)には相対並進移動速度に関する項が含まれているが, この項は, 並進運動が点ソースによる圧力勾配により加速または減速される場合には, 気泡の半径方向の運動に影響を与えることになる. このような状況では気泡中心の軌跡は(気泡がないときの)物体周りの流線には沿わないことになる.

3. 数値解析

3-1 解析方法 1 ポテンシャル問題では, 任意物体が点ソースの集合で近似できることを利用して, 上述の運動方程式を物体近傍での気泡の運動に応用することを考える.

まず, 任意物体の表面を $\Delta_k (k = 1, 2, \dots, M)$ の要素に分割し, そこに一様な面密度 Q_k のソースを配置する. Q_k の大きさは, 一般に次式から決定される⁽¹⁴⁾.

$$\begin{aligned} 2\pi Q_k + \sum_{j=1}^M Q_j \int_{\Delta_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{X}_k - \vec{X}|} \right) dS(\vec{X}) \\ = -\frac{\partial}{\partial n} (\varphi_B(\vec{X}_k) + \varphi_U(\vec{X}_k)) \\ 2\pi \dot{Q}_k + \sum_{j=1}^M \dot{Q}_j \int_{\Delta_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{X}_k - \vec{X}|} \right) dS(\vec{X}) \end{aligned} \quad (25)$$

Fig.2 Bubble collapse near a plane rigid wall. The plane rigid wall is replaced by the distribution of simple sources in the present method.

$$= -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi_B(\vec{X}_k)}{\partial t} \right) \quad (26)$$

ここで, $\partial/\partial n$ は $\vec{X}$ を固定したときの, $\vec{X}_k$ における外向き法線微分である. φ_B ならびに φ_U は, それぞれ式(1),(4)で与えられる. 式(18)~(20)で示した気泡群の運動方程式を式(25)(26)と同時に解くことにより, 各時刻におけるソースの強さならびに気泡の挙動が決定される. ただし, この場合, 式(18)~(20)における Q_k を, A_k を要素 Δ_k の面積とすると, $Q_k A_k$ に置き換える必要がある.

この考えを用いた数値計算例を Fig.2 に示す. Fig.2 は, 気泡周囲の液体圧力がステップ状に上昇する際の, 平面剛体壁近傍での空洞気泡 ($p_{Iq0}=0, p_v=0, \sigma=0$) の軸対称崩壊の様子である. ただし, z 軸を対称軸とし, 気泡中心は剛体壁に対して z 軸上の正の方向にあるものとし, 剛体壁と初期気泡中心との距離 L は, $L/R_{00}=1.5 (R_{00}$: 初期半径) としている (この値はこれまでの研究において比較的良好に用いられている値である⁽⁴⁾). 右半分は, 本理論に基づく結果であり, 剛体壁をソースの集合 (気泡の初期半径の 40 倍の領域を 200 個の円環に分割) で置き換えている. 一方, 左半分は境界要素法による結果であり, 剛体壁は鏡像気泡を用いて表現されている. 右半分の本理論結果では, 気泡が剛体壁に及ぼす効果を, 気泡の半径方向の運動と並進運動により評価しており, 変形が剛体壁に及ぼす効果を無視している. すなわち, 式(25),(26)における φ_B は式(1)の最初の二項で近似されている. また, $\frac{\partial}{\partial n} (1/|\vec{X}_k - \vec{X}|)$ は, 平面上では零なので, 式(25)の Q_k は次式により容易に得られる.

$$2\pi Q_k = -\frac{q_{I0}}{\eta_{Ik}^2} P_1(\cos \theta_{Ik}) - \frac{2q_{I10}}{\eta_{Ik}^3} P_2(\cos \theta_{Ik}) \quad (27)$$

Fig.3 Growth of a traveling bubble near a body of revolution with a hemispherical nose. (a) Bubble profiles (A: $t/t_0 = 0$, B: $t/t_0 = 9.83$, C: $t/t_0 = 18.78$, D: $t/t_0 = 26.66$, E: $t/t_0 = 33.33$, F: $t/t_0 = 39.24$, G: $t/t_0 = 44.70$, H: $t/t_0 = 49.61$, I: $t/t_0 = 54.34$, J: $t/t_0 = 58.65$, K: $t/t_0 = 62.49$); (b) body of revolution with a hemispherical nose.

ただし, $\pi < \theta_{lk} \leq 2\pi$. $\dot{Q}_k$ も式(27)と似た形で $\dot{q}_{l0}$, $\dot{q}_{l10}$ 等の関数で表現される. なお, 図中の時間 t は, $t_0 (= R_{00}/\sqrt{p_\infty/\rho})$ で無次元化されている. この例からわかるように本解析結果は, 境界要素法による結果とよく一致しており, 気泡崩壊の様子を捕らえている. このことから, 本解析の妥当性ととも, Fig.2 程度の L では, 気泡変形が剛体壁に及ぼす効果が無視できることがわかる.

3.2 解析方法 2 一般に物体の代表長さが気泡の代表長さに比べて十分大きな場合には, 気泡に対して物体の曲率を無視することができる. このような場合には, 解析方法 1 のように物体表面に固定したソースの強さを各時刻ごとに定める代わりに, 無限平面に対する鏡像気泡を物体側に配置し, 実像と鏡像との相互作用を扱うことにより物体の効果を評価することが可能となる⁽⁸⁾. 鏡像気泡を用いる場合には, 式(26)は不要となり, 式(25)も次のように簡単化される.

$$2\pi Q_k + \sum_{j=1}^M Q_j \int_{\Delta_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{X}_k - \vec{X}|} \right) dS(\vec{X}) = - \frac{\partial \varphi_U(\vec{X}_k)}{\partial n} \quad (28)$$

式(28)の Q_k は時間に依存しないため, 計算の最初に式(28)を一回だけ解いてやればよい. このため計算時間が大幅に短縮される.

Fig.3に, この考えを用いて解析した結果の一例を示す. Fig.3(a)は(b)に示す半球状の先端部を持つヘッドフォーム近傍での気泡の成長の様子である. 先端部の半径 R_B は $1000 \times R_{00}$ としている. 気泡中心は $x-z$ 平面内にあり, 座標は R_B で無次元化されている. 気泡の初期位置は, 気泡の運動を決定する際の重要な要因となる. たとえば, Meyer ら⁽¹⁵⁾ は Schiebe 物体周りの気泡の挙動を扱う際に圧力係数 $C_p (= 2(p_{lq} - p_\infty)/\rho U^2) = 0$ の点から始めている. しかし, 気泡の成長速度は, 液体圧力が臨界圧力 ($p_{lcr} = p_v - 4\sigma/3R_{lcr}$) 程度まで低下し, 気泡半径が臨界半径 ($R_{lcr} = \sqrt{3p_{l0}R_{l00}^3/2\sigma}$) に達するまでは非常に遅いため, $C_p = 0$ を初期位置に定めると, 気

泡の急成長の様子を計算する以前に, 液体圧力が臨界圧力に低下するまでの長い計算時間が必要とされる. 計算時間の短縮のため, Fig.3では気泡が $p_{lq} = p_v$ なる点に到達したと想定し, そこを初期位置としている (Fig.3 A). それゆえ, 初期位置ではキャピテーション係数を k_d とするとき, $C_p = -k_d$ となる. 初期条件は $R_{00} = 100 \mu\text{m}$, $U = 8.007 \text{ m/s}$, $p_\infty = 25 \text{ kPa}$, $p_v = 2.337 \text{ kPa}$, $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 7.061 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, $C_p = -0.7082$ とした. また, 気泡内非凝縮性気体は等温変化するものとし⁽¹⁶⁾, 初期相対並進移動速度は零とした ($v_{lmr}(t=0) = 0$; $m = -1, 0, 1$). 非凝縮性気体の初期圧力は次式で与えられる.

$$p_{l0} = p_{lq} - p_v + \frac{2\sigma}{R_{l00}} \quad (29)$$

ここで, p_{lq} は気泡 I の中心での液体圧力を表している. なお, 式(28)を解く際には, 物体表面を 19010 個のパネルに分割した. さらに, 気泡が物体表面に十分近づいた状況において, ソースが気泡に及ぼす効果を計算する際には, 気泡に近いパネルを 400 個のサブエレメントに分割して計算を行った. これにより物体近傍での滑らかな速度分布を得ることが可能となる.

この図からわかるように, 気泡は物体周りの圧力勾配のもとで, 最初進行方向に引き伸ばされた形状になりながら成長し, 物体表面に近づくと壁の影響で物体側の気泡壁が平らになり (Fig.3J), その後帽子状の形状になっている (Fig.3K). Fig.3K の気泡形状は, 対象とした物体形状は異なるが, Ceccio らの観測結果⁽³⁾ と定性的に一致している. なお, Fig.3K 以降の気泡変形を扱うには, 本解析で無視した $(R_{lnm}/R_{l0})^2$ ($n \geq 2$) 以上の高次の項を考慮することが必要と思われる.

3.3 気泡間相互作用の効果 次に, 気泡間相互作用が成長に及ぼす効果を調べる際の最も単純な場合として, 原点に置かれた単一吹き出しと一様流で作られる半無限物体周りの気泡成長を扱う. 物体形状は以下のように表現される.

$$r = \sqrt{\frac{Q}{U}} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (30)$$

Fig. 4 Initial positions of bubbles. Case 1: bubbles are on the same stream line; Case 2: bubbles are on $C_p = 0$ line; Case 3: one bubble is on $C_p = 0$ line, while the others are not on $C_p = 0$ line.

ここで、 U は一様流の速度、 θ は対称軸 (z 軸) から測った角度、 Q は吹き出し強さを表している。この物体の漸近半径 R_B は ($z \rightarrow \infty$ で)、 $R_B = 2\sqrt{Q/U}$ となる。

解析に用いた気泡の初期配置を Fig. 4 に示す。Fig. 3 と同様に気泡中心は x - z 平面内にあり、座標は R_B で無次元化されている。図中の破線は圧力係数 $C_p = 0$ の等圧力線を、一点鎖線は流線を表している。同じ初期半径 R_{00} を持つ 3 個の気泡の成長を以下に示す三種類の初期位置に対して計算した¹。

- Case 1 (○印): 3 個の気泡が同じ流線上にある場合
- Case 2 (△印): $C_p = 0$ の等圧力線上にある場合
- Case 3 (□印): 1 個の気泡が $C_p = 0$ の等圧力線上にあり、他の 2 個は等圧力線から外れている場合

以下では、それぞれの場合について、上流側にある気泡から順に気泡 1、気泡 2、気泡 3 と呼ぶことにする。用いた計算条件は $U = 10.92 \text{ m/s}$, $p_\infty = 20 \text{ kPa}$, $\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $k_d = 0.297$, $R_B = 0.2 \text{ m}$ である。その他の物理定数ならびに、初期状態における気泡の並進移動速度ならびに初期気体圧力 p_{I90} の与え方は Fig. 3 と同様である。また、鏡像気泡を用いて物体が気泡に及ぼす効果を評価している。

前述のように、液体圧力が臨界圧力程度まで低下し、気泡半径が臨界半径に達すると、気泡は急速に成長する。Fig. 5 は、Case 1 の配置で初期半径 $R_{00} = 30 \mu\text{m}$ の場合に気泡半径が臨界半径を超えて急成長し、物

¹原理的には計算機のメモリーならびに CPU 時間が許す範囲内で、本理論を用いてより多くの気泡を扱うことが可能であるが、本報では気泡成長に及ぼす気泡間相互作用の効果が顕著に現れかつ短い計算時間で解析できる例として 3 個の気泡を扱っている。

Fig. 5 Effects of bubble-bubble/bubble-wall interactions on bubble shapes. Initial arrangement of bubbles is Case 1. Case A: both bubble-bubble and bubble-wall interactions are considered; Case B: only the bubble-wall interaction is considered; Case C: neither bubble-bubble nor bubble-wall interaction is considered.

体表面に近づいたある瞬間の形状を表している。図の (a), (b), (c) はそれぞれ以下の条件に対応している。

- (a) Case A: 鏡像気泡も含めてすべて (6 個) の気泡間の相互作用を考慮した場合
- (b) Case B: 個々の気泡とその鏡像との相互作用のみを考慮し、実像間の相互作用を無視した場合
- (c) Case C: 相互作用をいっさい無視した場合

Fig. 5 からわかるように Case B, C では実像間の相互作用が無視されているため、隣り合う気泡の表面同士が交差している。Case B では物体表面 (鏡像) との相互作用が考慮されているため、気泡は物体表面と向かい合う側に変形が助長されるが、Case C では、気泡表面と物体表面が交差するという非現実的な挙動が見られる。一方、Case A では、気泡表面が物体表面な

らびに他の気泡表面と交差するといったことは起こらず、他の気泡（鏡像気泡を含む）が急成長する際に誘起される圧力勾配・流れにより、他の気泡と向かい合った側に変形が助長されている。また、気泡の大きさを比較してみると、最も上流側にある気泡1に顕著に現れているように、すべての気泡間相互作用を考慮している Case A の場合には、Case B,C に比べて、気泡の成長が抑制されている。気泡間相互作用により気泡成長が抑制される機構は以下のように説明される。いま、式 (18) において、

$$p_{Ic} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^N \frac{\rho \dot{q}_j}{L_{IJ}}, \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

と定義すると、 L_{IJ} が小さい場合には、 p_{Ic} は他の気泡により誘起される気泡 I 中心での圧力と見なすことができる。 p_{Ic} は、気泡成長過程では正であるため、気泡中心での圧力は他の気泡がない場合に比べて高くなる。そのため、気泡間相互作用は気泡の成長を抑制する方向に働くことになる。なお、Fig.5(b) (Case B) は、実像気泡間の相互作用が無視されているため、Fig.3 で示した物体との相互干渉を考慮した単一気泡の成長に対応しているが、Fig.5(b) では Fig.3 に比べて物体近傍での圧力勾配が緩やかなために、顕著な 3 次元変形が見られず、その形状は平面剛体壁近傍での軸対称成長の様子と類似していることがわかる。このことから物体近傍での圧力勾配が気泡変形に大きく影響することが示唆される。

Fig.6 に、Fig.4 の Case 2 (△印) の配置で $R_{00} = 40 \mu\text{m}$ の場合の球形モード半径 R_{I0} の履歴を示す (Fig.6(a),(b),(c) は順に Case A,B,C に対応している)。横軸は z 座標を表しており、物体の漸近半径 R_B で無次元化されている。図中の実線は気泡1、点線は気泡2、一点鎖線は気泡3の結果を表している。Case 1 の場合には、3 個の気泡のとりパスに大差ないが、Case 2 の場合には、気泡のとりパスが大きく異なる (気泡の受ける圧力履歴が異なる) ため、相互作用を考慮するか否かによらず、下流側にある気泡2,3の成長速度は気泡1に比べて遅くなる。成長速度が最も速い気泡1は、他の気泡の影響をほとんど受けないため、Case A,B での気泡半径はほぼ等しくなる (Case C と比べると少し小さい)。一方、Case A の気泡2,3は気泡1の急成長により誘起される圧力上昇の効果強く受けるため、成長が急激に抑制され、気泡は収縮に転じている。なお、気泡2では、収縮に転じた後、半径に若干の振動が見られることがわかる。これは、気泡1により気泡2の中心に誘起される圧力上昇と、物体と流れにより決定される (気泡がないときの) 圧力低下との大

Fig.6 Effects of bubble-bubble/bubble-wall interactions on the bubble growth. Initial arrangement of bubbles is Case 2. Further details are the same as in Fig.5.

小関係が時間・空間的に変化していることによるものと考えられる。

Fig.7 に Case 3 (□印) の配置で、初期気泡半径 (i) $60 \mu\text{m}$, (ii) $45 \mu\text{m}$, (iii) $30 \mu\text{m}$ の場合の球形モード半径 R_{I0} の履歴を表す。図中の実線は気泡1、点線は気泡2、一点鎖線は気泡3の結果に対応している。(i),(ii),(iii)のいずれの場合も、鏡像気泡も含めてすべての気泡間の相互作用が考慮されている。Case 3 の配置では、物体に最も近い気泡3の成長速度が最も速く、他の気泡の成長は気泡3に強く拘束されるため、Fig.6(a)の気泡2,3と同様に、気泡1,2の成長が抑制されている。この傾向は初期半径が小さな Fig.7(iii) の場合に最も顕著にみられる。このことは、パスによって気泡の受ける圧力履歴が異なる (物体表面に近いほど気泡周囲の

Fig.7 Effects of initial bubble radii on the bubble growth. (i) $R_{00} = 60 \mu\text{m}$; (ii) $R_{00} = 45 \mu\text{m}$; (iii) $R_{00} = 30 \mu\text{m}$. Initial arrangement of bubbles is Case 3.

圧力低下が大きい) こと、ならびに、初期半径が小さくなるにつれて気泡が急成長する際の臨界圧力が低下することに関係している。すなわち、Fig.7(iii) の場合には、臨界圧力が低いいため気泡中心の圧力が臨界圧力に達する位置が(i),(ii) に比べて下流側に移行し、さらにバスの違いから気泡 1,2 の成長が気泡 3 に比べて遅れることによる。また、Fig.6(a) の気泡 2 に見られた半径方向の振動が初期半径 $45 \mu\text{m}$ の気泡 2 (Fig.7(ii)) にはいっそう顕著に現れている。

以上のいくつかの計算例からわかるように、気泡間相互作用により気泡の成長は抑制される傾向にある。抑制の度合いは初期条件 (気泡の初期位置・半径等) に大きく依存するが、気泡群中のある特定の気泡が他に比べて急成長する状況では、他の気泡の成長速度は単

一気泡の理論から予測される成長速度と比較して著しく低下する。こうした相互作用により成長が抑制された気泡は、液体圧力が回復した後に激しく崩壊することはないと考えられることから、材料損傷や騒音などのキャビテーション特性には実質的に関与しないことが示唆される。このような状況では、急成長する気泡にのみ着目し、物体との相互干渉を考慮した単一気泡の力学を扱えば十分と考えられる。

4. 結 言

気泡間の相互作用を考慮して、一様流と点ソースの集合により作られるポテンシャル流体中での気泡群の運動方程式を導出した。本運動方程式は、気泡間相互作用ならびに点ソース群により形成される圧力勾配に起因する個々の気泡の 3 次元並進運動・変形を扱うことができる。本理論を軸対称物体周りの気泡の成長問題に適用する方法を提案し、解析を行った結果、以下のことが明らかとなった。

- (1) 気泡成長過程における変形の様子は、物体近傍での圧力勾配に依存する。
- (2) 気泡間相互作用は、個々の気泡の成長を抑制する。抑制の度合いは、初期条件 (気泡の初期位置・半径等) に依存するが、気泡群中のある特定の気泡が他に比べて急速に成長する状況では、他の気泡の成長速度は単一気泡の理論から予測される成長速度と比較して著しく低下する。

文 献

- (1) 高比良・ほか 2 名, 機論, **58**-548, B(1992), 1267.
- (2) 高比良・ほか 2 名, 機論, **58**-548, B(1992), 1275.
- (3) Ceccio, S. L. and Brennen C. E., *J. Fluid Mech.*, **233** (1991), 633.
- (4) Blake, J. R. and Gibson, D. C., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**(1987), 99.
- (5) Chahine, G. L. and Duraiswami, R., *J. Fluid Eng.*, **114**-4(1992), 680.
- (6) Best, J. P., *J. Fluid Mech.*, **251**(1993), 79.
- (7) Zhang, S., ほか 2 名, *J. Fluid Mech.*, **257**(1993), 147.
- (8) Kuhn de Chizelle, Y. and Brennen C. E., *Proc. IUTAM Symp. on Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, (1993), 207, Kluwer Academic Publishers.
- (9) Yeh, H. C. and Yang, W. J., *J. Appl. Phys.*, **39**-7(1968), 3156.
- (10) Robinson, P. B. and Blake, J. R., *Proc. 3rd Int. Conf. on Cavitation*, I. Mech. E., Cambridge, (1992), 17.
- (11) Prosperetti, A., ほか 2 名, *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**-2 (1988), 502.
- (12) 松本・竹村, 機論, **58**-547, B(1992), 645.
- (13) 高比良, 機論, No.95-0788, 掲載予定.
- (14) Jaswon, M. A. and Symm, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, (1977), Academic Press.
- (15) Meyer, R. S., ほか 2 名, *J. Fluid Eng.*, Trans. ASME, **114**-4(1992), 672.
- (16) Matsumoto, Y. and Beylich, A. E., *J. Fluid Eng.*, Trans. ASME, **107**-2(1985), 281.