渦度・ベクトルポテンシャル表示法による
チャンネル内流れの乱流遷移の LES*徳 永 宏^{*1}LES of Transition to Turbulence in Channel Flow
by Vorticity-Vector Potential Formulation

Hiroshi TOKUNAGA

The vorticity vector potential formulation method is combined with the 4th order accurate centered finite difference method without numerical dissipation. The flow in a square cavity is solved at large Reynolds numbers in order to verify effectivity of the computational method. This method is shown to be useful for solving the flow accurately with a small number of grid points as compared with the 2nd-order accurate method. The present method also resolves well the unsteady motion in a square cavity at the Reynolds number of 10^4 . The dynamic subgrid scale turbulence model is implemented in the present computational method. The LES of transition to turbulence in a plane channel is carried out. It is shown that vortices initially roll up from the Tollmien-Schlichting waves, spike and tear, and finally form an array after complex vortical structure. The turbulence statistics are compared with the DNS and the experimental values, and considerable agreement is obtained.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Turbulent Flow, Large Eddy Simulation, Transition, Numerical Analysis

1. 緒 言

近年の航空機技術の進歩, 計算流体力学の進歩, 電子計算機の急速な高速度化により, 空気抵抗の削減, 高揚力の達成などのために, 流れ, とりわけ乱流の制御を積極的に行う研究が進みつつある。このため, 流れの制御に対応できる柔軟な乱流モデルを用いること, また一般化座標表示の正確な数値計算方法が要求されている。

ここでは, 速度場に課せられるソレノイド条件を自動的に満足し, Spurious 誤差がまったく生じない渦度・ベクトルポテンシャル法を用いる^{(1)~(5)}。一般に乱流は, 流れの中に大小の渦構造を有することが知られており, Spurious 誤差の影響を受けやすいと考えられるからである。MAC 法を精密化した Fractional Step Method においても, 連続の式の充足は容易ではなく, 最近では対流項の離散化に特別な注意がはらわれている⁽⁶⁾。これに反して, ベクトルポテンシャル法では, 食違い格子を用いる必要性がなく, 複雑形状流れへの適用が容易となる。また, 壁面付近を含め流れ

の中に, 速度が急激に変化するところが多く存在するため, 通常の二次精度の差分法では十分でない場合が多く^{(2)~(8)}, ここでは四次精度の差分法を用いる。

次に, LES のモデルとして, Germano ら⁽⁹⁾により提案された Dynamic Subgrid Scale Model を用いる。これは, 従来の乱流モデルがなんらかの意味で経験定数を含み, また乱流の普遍的なモデルとなっていないのに対して, 新たに LES のモデルとして提案されたこの方法は, LES に対して通常用いられている Smagorinsky モデルのような壁関数を含まず, それゆえ一般的に適用される可能性を秘めているからである。

本論文では, まず数値計算方法の有効性を検証するために, 高レイノルズ数のキャビティ内流れを計算した。そして, Dynamic Subgrid Scale Model を渦度・ベクトルポテンシャル法に組み込んだ方法の有効性を厳しく判定するために, チャンネル内流れの乱流遷移の計算を行った。

2. おもな記号

C: 式(24)

 k_i : x_i 方向の波数 L_{ij} : 式(24)

* 原稿受付 1995 年 3 月 13 日。

*¹ 正員, 京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

- M_{ij} : 式(24)
 p : 無次元圧力
 Re : レイノルズ数
 S_{ij} : 変形速度テンソル
 t : 無次元時間
 u_i : i 方向の速度成分
 $\mathbf{u}$: 速度ベクトル
 u_τ : 壁面摩擦速度
 u_{rms} : x_1 方向の速度の二乗平均
 v_{rms} : x_2 方向の速度の二乗平均
 x_i : i 方向の空間座標
 y : 壁面からの距離
 δ_{ij} : クロネッカーデルタ
 Δ_i : x_i 方向のフィルタ幅
 ν : 動粘性係数
 ν_t : 乱流粘性係数
 τ_{ij} : SGS 応力の (ij) 成分
 τ_w : 壁面摩擦応力
 ϕ : スカラポテンシャル
 ψ : ベクトルポテンシャル
 ω_i : 渦度の x_i 方向成分
 $\boldsymbol{\omega}$: 渦度ベクトル
 ∇ : 微分演算子ナブラ
 $\tilde{A}$: x_1 および x_3 方向のフーリエ変換
 A^+ : u_τ と ν による無次元化
 $\langle A \rangle$: x_1 と x_3 方向の空間平均
 $\bar{A}$: フィルタを施した物理量
 $\hat{A}$: テストフィルタを施した物理量
 A' : subgrid scale の物理量
 $\hat{A}$: 格子点空間でのベクトル

3. 基礎方程式および数値計算方法

3.1 渦度・ベクトルポテンシャル表示法 非圧縮粘性流体の運動は、次のナビエ・ストークス方程式と連続の式で記述される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (i=1, 2, 3), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

ここで、流速 $\mathbf{u}$ と渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は、ベクトルポテンシャル ψ と速度ポテンシャル ϕ を用いて次式のように書き表される。

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4)$$

このとき、速度場に対するソレノイド条件からスカラ

ポテンシャルに対してラプラスの方程式、また渦度輸送方程式およびベクトルポテンシャルについてのポワソン方程式が導かれる。

$$\Delta \phi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega_i) = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}, \quad (6)$$

$$\Delta \psi_i = -\omega_i, \quad (7)$$

ここで、ベクトルポテンシャルに対するソレノイド条件

$$\nabla \cdot \psi = 0 \quad (8)$$

が仮定される。この条件は、後で述べるようにベクトルポテンシャルに対する境界条件を構成する。今、ポワソン方程式の発散を取ると

$$\Delta(\nabla \cdot \psi) = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (9)$$

となり、もし境界でベクトルポテンシャルがソレノイド条件を満足するなら全領域でこれが満たされることがわかる。

3.2 座標変換および境界条件 ここで、壁面近くの流れの急激な変化をとらえるために次のような座標変換を行う。

$$x_2 = \tanh[\eta \tanh^{-1} \alpha] / \alpha, \quad (-1 < \eta < 1) \quad (10)$$

このとき、 x_2 に関する一階微分は次のように変換される。

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad J = \frac{dx_2}{d\eta}. \quad (11)$$

チャンネルの壁面上においてベクトルポテンシャルおよび渦度は次式で決定される。

$$\psi_1|_{\eta=\pm 1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}|_{\eta=\pm 1} = 0, \quad \psi_3|_{\eta=\pm 1} = \pm \frac{2}{3}, \quad (12)$$

$$\omega_1|_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{J} \frac{\partial u_3}{\partial \eta}|_{\eta=\pm 1}, \quad \omega_2|_{\eta=\pm 1} = 0,$$

$$\omega_3|_{\eta=\pm 1} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u_1}{\partial \eta}|_{\eta=\pm 1}. \quad (13)$$

3.3 数値計算方法 数値計算方法として、線の方法を採用する。この方法では、空間の離散化と時間積分が独立に取扱われる。例えば、渦度の η 方向微分は次のように表示される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta}|_{ijk} = (-\omega_{i,j+2,k} + 8\omega_{i,j+1,k} - 8\omega_{i,j-1,k} + \omega_{i,j-2,k}) / (12\Delta\eta), \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}|_{ijk} = (-\omega_{i,j+2,k} + 16\omega_{i,j+1,k} - 30\omega_{i,j,k} + 16\omega_{i,j-1,k} - \omega_{i,j-2,k}) / (12\Delta\eta^2). \quad (15)$$

その結果、偏微分方程式は次の時間に関する常微分方程式に変換される。

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{F}(\vec{\omega}),$$

$$\vec{\omega} = (\omega_{x_1, 2, 2, 2}, \omega_{x_1, 3, 2, 2}, \dots, \omega_{x_3, I-1, J-1, K-1})^T, \quad \dots (16)$$

ここで、 $\vec{\omega}$ は各格子点における渦度の値を成分とするベクトルを表し、 $\vec{F}$ は渦度輸送方程式の離散化後の時間微分項を除くすべての項である。また、 I, J および K はそれぞれ x_1, η および x_3 方向の格子点の総数である。時間積分法として、四次精度のRunge Kutta Gill 法を用いる⁽²⁾。

3.4 ポワソン方程式に対する数値計算方法 離散化には、渦度輸送方程式と同様の方法を用い、反復計算法としてSOR法を使う。加速係数は、1.8とした。

4. 高レイノルズ数のキャビティ内流れの数値計算

数値計算方法の検討のために、二次元キャビティ内流れの数値計算を行った。この場合、流れは二次元なので渦度 ω_3 と流れ関数 ϕ_3 で基礎式が構成される。代表長さを正方キャビティの一辺に取り、代表速度はキャビティの動壁の動く速さとし、またレイノルズ数はこれらの量と動粘性係数により定めた。式(10)を用いて、壁面近くで格子を密にした。なお、パラメータは $\alpha = 0.95$ とした。ポワソン式の反復計算においては、次式により L_2 残差をまず計算する。

$$L_2 - \text{Residual} = \sqrt{\sum_{j=2}^{I-1} \sum_{k=2}^{J-1} (\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n)^2} / N. \quad \dots (17)$$

ここで、 $n+1$ と n は反復段階を示し、 N は境界を除

Fig. 1 Velocity profiles on centerlines of a square cavity ($Re = 10^3$)

く格子点総数である。そして、この L_2 残差が 10^{-7} 以下になるまで反復を継続した。

レイノルズ数は 10^3 および 10^4 とし、前者の場合、二次精度と四次精度で計算を行った。格子数は 33×33 である。図1に正方空洞の中心軸上の速度分布を示す。参考解として、Ghia ら⁽¹⁰⁾ の 129×129 の等間隔格子を用いた結果を示す。二次精度の方法は、よい結果を与えないが、四次精度の方法は、少ない格子にもかかわらず優れた結果を与える。一般に乱流のLESによる計算では、それほど十分な格子を準備できない場合が多く、このようなときに四次精度の方法は有効であることが期待される。

次に、 $Re = 10^4$ の計算結果を示す。計算格子数は、 129×129 であり、時間格子幅は $\Delta t = 1/125$ とした。図2と図3は、時刻 $t = 170$ および 250 における等渦度線と流線を示している。ここで、渦度の等高線は -5 から 5 および 7.5 まで間隔 0.5 でプロットし、また流れ関数の等高線は -0.1 から 0 までで、間隔は時刻 $t = 170$ では 0.004 、時刻 $t = 250$ ではその半分となっている。 $t = 170$ では、中央部に2箇所渦度の大きい所が存在し、これにより流線図に見られるように、中央

Fig. 2 Vorticity contours of the flow in a square cavity at $Re = 10^4$

Fig. 3 Streamlines of the flow in a square cavity at $Re = 10^4$

部の渦はキャビティのやや下部に位置している。 $t = 250$ では、 $t = 170$ で見られた2個の渦は合体を完了し、流線図に見られるように渦中心はキャビティの中央部にその位置を確立しつつある。しかし、キャビティの右側上部では渦の過度の引き延ばし(ストレッチング)により渦の一部が涙状に分離する現象(ティアリング)が繰返し生じ、 $t = 170$ および250における等渦度線で見られるように、こうした渦は生成・消滅を繰返し、この機構により流れは非定常であることが示されている⁽¹¹⁾。このように、四次精度の方法は、乱流のような非定常流に適していることが明らかなので、LESの計算にあたってはこの方法を用いることにする。

5. チャネル内流れの乱流遷移のLES

5.1 格子平均乱流モデル

Dynamic Subgrid Scale Modelを用いる。まず差分解 $f(x_1, x_2, x_3)$ に対して x_1 および x_3 方向に高速フーリエ変換を施し波数空間における関数 $\hat{f}(k_1, x_2, k_3)$ を得る。フィルタ関数としては、最も正確なシャープカットオフフィルタを用いる。すなわち、 $\hat{f}(k_1, x_2, k_3)$ に対して、ある波数以上の値を強制的に零とした関数を $\bar{f}$ とする。また、壁

面に垂直な方向にはフィルタ操作は用いなかった。このフィルタ操作を完了後に、 $\bar{f}$ を高速フーリエ逆変換により実空間に戻し、その値を $\bar{f}$ とする。このとき、 f は平均量と変動量とに次のように分けられる、

$$f = \bar{f} + f' \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式を(1)のナビエ・ストークス方程式に適用すると

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau_{ij} = u_i u_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 τ_{ij} に関して次のモデル化を行う、

$$\tau_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = - \nu_t S_{ij} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\nu_t = C(x_2, t) \Delta_1 \Delta_3 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式で、 Δ_1 および Δ_3 はそれぞれ、 x_1 および x_3 方向のフィルタ幅であり、またここで用いるDynamic Subgrid Scale Modelの場合、 $C(x_2, t)$ は、さらに2倍だけ幅の広いテストフィルタを使って、次のように乱流の速度場から直接計算される⁽⁹⁾、

$$C(x_2, t) = \langle L_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle / \langle M_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle, \\ L_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j}, \\ M_{ij} = \widehat{\Delta_1 \Delta_3 |\bar{S}|} \bar{S}_{ij} - \Delta_1 \Delta_3 |\bar{S}| \widehat{\bar{S}_{ij} \bar{u}_i \bar{u}_j} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで $\langle \rangle$ は x_1 と x_3 での空間平均を表し、 $\widehat{\Delta_1}$ および $\widehat{\Delta_3}$ はそれぞれ x_1 および x_3 方向のテストフィルタの幅を表し、これはもとのフィルタ幅の2倍の値とする。そして、渦度・ベクトルポテンシャル法を用いる場合には、方程式(18)の回転を取ることににより、LESの基礎式が導かれる。

5.2 計算条件

本数値計算方法をチャネル内流れの乱流遷移の数値計算に適用する。遷移の計算では、一般に乱流が一時的に複雑になり、このため通常の発達した乱流の数値計算におけるよりも多くの計算格子を必要とすると報告されている。そこで、レイノルズ数は、Jiménezら⁽¹²⁾が直接数値シミュレーションを行っている 2×10^4 のケースを対象とする。代表長さはチャネルの半値幅、代表速度はポアズイユ流れの最大速度を用いた。流れ方向 x_1 およびチャネル奥行き方向 x_3 の計算領域は、乱流を維持できる最小の値 0.35π および π とした。計算格子数は $33 \times 65 \times 33$ とし、壁面に垂直な方向は、壁面付近で格子を密にし、パラメータは $\alpha = 0.98346$ とし、ボワソン式の収束判定条件は L_2 残差を 2×10^{-4} とした。

初期条件として、平面ポアズイユ流れに有限振幅の

Tollmien-Schlichting波(T-S波)を重ね合わせたものを用いた。この場合、二次元のT-S波の振幅を0.1、三次元のT-S波の振幅を0.05とした。また、T-S波の固有値 $c = c_r + ic_i$ (c_r はT-S波の位相速度、 c_i は対数増幅率⁽¹³⁾)は、二次元波では $0.358831 - 0.0627361i$ 、三次元波では $0.3247096 - 0.1191486i$ の値を取る。このように、二次元および三次元の線形かく乱はいずれも減衰するので、乱流の遷移には初期に比較的大きなT-S波の振幅値が必要とされる。Zangら⁽¹⁴⁾による乱流遷移の直接数値シミュレーションでは、二次元のT-S波の減衰は微弱かあるいは増幅するので振

幅は小さく設定されている。また、乱流遷移にLESを適用した例として、Genmanoら⁽⁹⁾の研究があるが、この場合も二次元かく乱は線形増幅するケースである。このように、本ケースの初期かく乱は減衰しやすいので、この観点からも空間の離散化精度は四次とした。

5.3 チャンネル内乱流における渦構造の発達

図4に時刻 $t=5, 10, 15, 30$ および 50 における奥行き方向の渦度成分の等値面を示した。ただし、図4はチャンネルの1/4上半面に対して、黄色半透明で渦度の値2.0そして赤紫色で2.5の等値面が描かれている。

時刻 $t=5$ では、上壁付近に局在する初期のT-S波から渦が巻き上がるのが確認される。そして、図4の左端および右端に位置する細長い、巻き上がりによりつくられた渦は、ヘアピン渦の曲がり部の欠けたバナナ形状であることがわかる。 $t=10$ では、図4の下側やや右よりに見られるように、渦の先端部が折れ曲がるスパイク構造⁽¹⁵⁾が確認される。また壁面近くからあらたな渦の形成も見られる。

$t=15$ では、図4の下側やや右よりに見られるように、渦度のスパイクのため渦が先端で千切れるいわゆ

Fig. 4 Perspective views of a surface of constant spanwise vorticity in a channel ($t=5, 10, 15, 30$ and 50)

Fig. 5 Mean velocity profiles in a channel

るティアリングの現象が見られる。この現象は、乱流の渦構造の一つの重要な特徴とされている。また、ティアリングを起こしている渦の左隣で別の渦に同じようにスパイク構造が現れている。 $t=30$ では、新たに形成された渦が成長し、もとからある渦とビオ・サバールの法則で相互作用し、複雑な渦構造が一時的につくられていることがわかる。

$t=50$ では、これまでのプロセスで形成された渦がより壁面に近い所に並び、いわゆる乱流の大規模構造が形成されたことが確認される。そして、その渦形状はヘアピン渦の曲がり部の欠けたバナナ状渦であることがわかる。

5.4 乱流の統計量の計算 図5に時刻 $t=50$ における平均速度分布を Choi ら⁽¹⁶⁾ の結果とともに示す。Choi らでは、レイノルズ数は 3300 に設定されている。ここでは、速度 $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ を用いて平均速度 U および壁面からの距離 y が $u^+ = U/u_\tau$ および $y^+ = yu_\tau/\nu$ と無次元化されている。ただし、 τ_w は壁面のせん断応力、 ρ は流体の密度を表すものとする。

本図において、粘性小領域 $u^+ = y^+$ の領域と対数速度分布 $u^+ = 2.44 \ln y^+ + 5.0$ に従う領域の存在が確認できる。ただし、レイノルズ数が低いため、後者の領域は Choi らの結果と比べてかなり狭い。

図6に乱流強度の分布を同じく Choi らの計算結果および Wei ら⁽¹⁷⁾ の実験結果と併せて示す。本計算結果は、壁付近で流れ方向および壁面に垂直な方向の乱流強度はいずれも Choi らの結果と比較して、壁面近くで低めで、チャンネル中心付近で高めの値を取っている。また、Wei らの実験のレイノルズ数は 3850 であるが、流れ方向の乱流強度は少し本数値計算結果に近いものとなっている。Jiménez らが示しているように、十分時間が経過すると、およそ無次元時間で 1000 ぐ

Fig. 6 Resolvable turbulence intensities

Fig. 7 Time development of the plane-averaged wall shearstress and center velocity

とに一方の壁面で乱流が発達する一方、他方の壁面付近では乱流が維持できなくなる、いわゆる片側乱流が形成される可能性がある。しかし、本計算結果では、壁面両側で乱流が存在し、乱流遷移が起こったと考え、Choi らの直接数値シミュレーションの結果および Wei らの実験結果との比較を行った。

図7に壁面せん断応力 τ_w およびチャンネル中心の平均速度 U_c の時間変化を示す。壁面せん断応力は、与えた TS 波の振幅が大きいため、初期から増加し、時刻 $t=30$ 以後は、乱流の発達により頭打ちの傾向を示

す。これに対して、中心速度は、最初乱れが増加しても一定値を維持し、乱流遷移に伴い、急激に減少する傾向を示す。Zang らの直接数値シミュレーションの結果では、ここで示した壁面せん断応力と平均チャンネル中心速度は、レイノルズ数が 8×10^3 のケースは 5×10^3 のときに比べてより急激でシャープな変化をすることが示されている。そして、後者では乱流遷移後でもここで示された統計量は、かなり変動することが示されている。本ケースはレイノルズ数がかかなり低いため、その変化がいつそう単調でないと考えられる。また、Dynamic Model を乱流遷移に適用した Germano らの結果では、遷移のプロセスは直接数値シミュレーションと比べてレイノルズ数が 8×10^3 のときでも若干複雑になることが報告されている。

6. ま と め

渦度・ベクトルポテンシャル表示の基礎式に四次精度の有限差分法を適用した。キャビティ内の高レイノルズ数流れの数値計算により、四次精度の方法の有効性が示された。Dynamic Model を用いたチャンネル内流れの乱流遷移の LES においては、遷移に至るまでの渦構造の変化が調べられ、乱流の主要な渦構造はヘアピン渦の先端部が欠けたバナナ状のものであることがわかった。

最後に、本研究における計算の一部は、著者が Center for Turbulence Research (CTR), Stanford Univ./NASA Ames に滞在中に、エームズ研究所の CRAY-YMP を用いて行った。CTR 滞在中貴重な助

言をいただいた P. Moin 教授, J. Kim 博士および CTR のスタッフと研究員の方々に謝意を表す。

文 献

- (1) 島田正義・徳永宏・里深信行・西田秀利, 機論, **55** 514, B (1989), 1536.
- (2) Tokunaga, H., Ichinose, K. and Satofuka, N., *Lecture Notes in Physics*, **371**(1990), 183, Springer Verlag.
- (3) Tokunaga, H., Ichinose, K. and Satofuka, N., *Comput. Fluids*, **19** 3/4(1991), 413.
- (4) Tokunaga, H., Ichinose, K. and Satofuka, N., *Proc. 1st ASME-JSME Fluids Eng. Conf.*, Portland, FED **117** (1991), 57.
- (5) Tokunaga, H., Yoyoda, K. and Satofuka, N., *Proc. AIAA 10th Comput. Fluid Dyn. Conf.*, Hawaii, AIAA Paper 91 1610 CP, (1991), 937.
- (6) 梶島岳夫, 機論, **60** 574, B(1994), 2058.
- (7) 宮内敏雄・平田徹・店橋護, 機論, **60**-574, B(1994), 1999.
- (8) 松田安弘・三木英敬, 機論, **60**-577, B(1994), 3032.
- (9) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, H., *Phys. Fluids*, **A3**(1991), 1760.
- (10) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., *J. Comput. Phys.*, **48**(1982), 387.
- (11) Tokunaga, H., *Annual Res. Briefs*, Center for Turbulence Research, Stanford Univ./NASA Ames, (1992), 175.
- (12) Jiménez, J. and Moin, P., *J. Fluid Mech.*, **225**(1991), 213.
- (13) 巽友正, 乱流, (1967), 16, 槇書店.
- (14) Zang, T., Gilbert, N. and Kleiser, L., *Instability and Transition*, **II**(1990), 283, Springer Verlag.
- (15) Nishioka, M., Asai, M. and Iida, S., *Transition and Turbulence*, (1981), 113, Academic Press.
- (16) Choi, H., Moin, P. and Kim, P., *J. Fluid Mech.*, **262** (1994), 75.
- (17) Wei, T. and Willmarth, W. W., *J. Fluid Mech.*, **204** (1989), 57.