コラプシブルチューブ内流れの安定性と
自励振動に関する数値解析*林 叡^{*1}, 早瀬 敏幸^{*1}, 川村 寛^{*2}Numerical Analysis on Stability and Self-Excited Vibration
in Collapsible Tube

Satoru HAYASHI, Toshiyuki HAYASE and Hiroshi KAWAMURA

A distributed parameter model of a collapsible tube, in which no effect of separation occurring in the collapsed part is considered, is numerically analyzed by means of the SIMPLE method. Transient flow behaviors, stability of steady flows and self excited vibrations are investigated. Furthermore, the wave propagation in the tube is indicated as a 3-dimensional bird's-eye view with the temporal and spatial axes. The numerical results are consistent with experimental results.

Key Words: Collapsible Tube, Flow-Induced Vibration, Blood Flow, Biomechanics, Distributed Parameter Model, Numerical Analysis, Stability, Self-Excited Vibration

1. ま え が き

コラプシブルチューブは、肉厚が薄く、外圧を加えるとつぶれて断面積と断面形状を著しく変えるので、流れの変化と流路変形が相互に影響し合って複雑な現象を発現することで知られている⁽¹⁾。血管、尿道、気管などの生体器官は、コラプシブルチューブ(以後、チューブと記す)としての特徴をもっているため、その非定常挙動に関する多くの興味深い生体力学の問題が提起されている⁽²⁾。特に、この管路に発生する自励振動は、血流の体外循環時に起こる発振現象⁽³⁾や血圧測定時に発生するコロトコフ音⁽⁴⁾との関係から多くの研究がなされている^{(1)~(16)}。

チューブに発生する自励振動の機構に関して、Conrad⁽¹⁾はvan der Pol形の方程式に支配されるし緩振動の一種とし、Griffiths⁽⁵⁾は跳水現象における常流と射流の間の周期的交代現象と考えた。また、Cancelliら⁽⁶⁾、松崎ら⁽⁷⁾は、この自励振動がチューブの圧

平部に発生するはく離の非定常性の寄与によるとし、Jensen⁽⁸⁾ははく離の寄与を流動損失の観点からのみモデル化して数値解析を行っている。一方、Ohba⁽⁹⁾はこの現象を粘性流体の流動不安定現象の一種と考え、チューブ内流れが不安定となる条件を求めている。

上述の諸研究に対して、著者らは、コラプシブルチューブに発生する不安定現象の主要因は、流体の粘性によって定まるチューブ特性とチューブの上・下流に接続する要素との相互作用にあり、圧平部に発生するはく離は二次的要因にすぎないとの立場に立ってはく離を考慮しない数学モデルを導き、定常流の諸特性を明らかにした⁽¹⁰⁾。さらに、チューブの動特性を集中定数近似して安定性や自励振動に関する基本的性格を明らかにして⁽¹¹⁾⁽¹²⁾このモデルが現象の諸相をよく説明し得ることを示した。しかし、集中定数近似では系を低次のモードで近似するため動特性に与える高次モードの影響を反映しないので、結論は定性的にならざるを得ないし、分布定数系の特徴の一つである波動現象を扱うことができなくなる。そこで、本研究においては、数学モデルを本来の分布定数系に戻して、数値解析によって分布定数系としての安定性、自励振動、波動現象などの動的諸特性を検討した。

* 1993年1月20日 第3回バイオメカニクスカンファレンス
および1994年8月6日 第6回バイオメカニクス部門講演
会において講演、原稿受付 1995年6月7日。

*1 正員、東北大学流体科学研究所 (〒980 77 仙台市青葉区片
2 1-1)。

*2 NKK(株) (〒100 東京都千代田区丸の内1 1-2)。

Fig. 2 Staggered grid system

ずらしたスタガード格子系を用いた(図2)。

まず、運動方程式(1)は次式となる。

$$\frac{Q_i - \bar{Q}_i}{\Delta t} + \frac{2\bar{Q}_i}{A_{im}} \frac{(Q_{i-1} - \bar{Q}_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i^2}{A_{im}^2} \frac{\bar{A}_i - \bar{A}_{i-1}}{\Delta x} + \frac{A_{im}}{\rho} \frac{\bar{P}_i - \bar{P}_{i-1}}{\Delta x} + F_t \frac{\bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{A_{im}^2} = 0 \quad (i=2, \dots, N) \quad (10)$$

ここに、 $F_t = f_r S / 2 = \lambda S / 8$, $A_{im} = (A_i + A_{i-1}) / 2$, $\bar{\cdot}$ は前時刻の諸量、 $\bar{\cdot}$ は逐次計算における前回の計算値を表す。

同様に、上・下流剛体管路内流体柱の運動方程式(7)は次式となる[式(7)中で $P_u \approx P_1$, $P_d \approx P_N$ とした]。

$$\frac{Q_1 - \bar{Q}_1}{\Delta t} + \frac{A_0}{\rho} \frac{\bar{P}_1 - P_1}{l_u} + F_t \frac{\bar{Q}_1 |\bar{Q}_1|}{A_0^2} = 0 \quad (i=1)$$

$$\frac{Q_{N+1} - \bar{Q}_{N+1}}{\Delta t} + \frac{A_0}{\rho} \frac{P_N - \bar{P}_N}{l_d} + F_t \frac{\bar{Q}_{N+1} |\bar{Q}_{N+1}|}{A_0^2} = 0 \quad (i=N+1) \quad (11)$$

次に、チューブに作用する力の釣り合い式(5)を差分化する。チューブ内点($i=2, \dots, N-1$)では、

$$\frac{T}{2w} \frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{\Delta x^2} = P_e - \bar{P}_i + \phi \left(\frac{\bar{A}_i}{A_0} \right) + \gamma \frac{\bar{A}_i - \bar{A}_i}{\Delta t} \quad (i=2, \dots, N-1) \quad (12)$$

また上・下流剛体管と接続される $i=1, N$ では、

$$\frac{T}{2w} \frac{8A_0 - 12A_1 + 4A_2}{3\Delta x^2} = P_e - \bar{P}_1 + \phi \left(\frac{\bar{A}_1}{A_0} \right) + \gamma \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_1}{\Delta t} \quad (i=1)$$

$$\frac{T}{2w} \frac{4A_{N-1} - 12A_N + 8A_0}{3\Delta x^2} = P_e - \bar{P}_N + \phi \left(\frac{\bar{A}_N}{A_0} \right) + \gamma \frac{\bar{A}_N - \bar{A}_N}{\Delta t} \quad (i=N) \quad (13)$$

SIMPLE法では、解 P, Q, A を * を付した反復計算過程の値と ' を付した補正值の和で表し、圧力補正方程式を導いて圧力場を求める。

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P_i^* + P_i' \\ Q_i &= Q_i^* + Q_i' \\ A_i &= A_i^* + A_i' \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上式を式(10)~(13)に代入し、流量、断面積の補正量の主要項を取り出すと次の補正式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_i' &= \begin{cases} c_1 P_i' & (i=1) \\ c_i (P_i' - P_{i-1}') & (i=2, \dots, N) \\ -c_{N+1} P_N' & (i=N+1) \end{cases} \\ A_i' &= e_i P_i' \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} c_i &= \begin{cases} -\frac{\Delta t}{l_u} \frac{A_0}{\rho} & (i=1) \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{A_{im}}{\rho} & (i=2, \dots, N), \\ -\frac{\Delta t}{l_d} \frac{A_0}{\rho} & (i=N+1) \end{cases} \\ e_i &= \begin{cases} \frac{w \Delta x^2}{2T} & (i=1) \\ \frac{w \Delta x^2}{T} & (i=2, \dots, N-1) \\ \frac{w \Delta x^2}{2T} & (i=N) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

さて、連続の式(4)を離散化すると次式となる。

$$\frac{A_i - \bar{A}_i}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (17)$$

式(14)を式(17)に代入し、式(15)を用いれば、圧力補正量に関する以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{e_i P_i'}{\Delta t} + \frac{c_{i+1} P_{i+1}' - (c_{i+1} + c_i) P_i' + c_i P_{i-1}'}{\Delta x} &= -\frac{A_i^* - \bar{A}_i}{\Delta t} - \frac{Q_{i+1}^* - Q_i^*}{\Delta x} \quad (i=2, \dots, N-1) \\ \frac{e_i P_i'}{\Delta t} + \frac{c_2 P_2' - (c_2 + c_1) P_1'}{\Delta x} &= -\frac{A_1^* - \bar{A}_1}{\Delta t} - \frac{Q_2^* - Q_1^*}{\Delta x} \quad (i=1) \\ \frac{e_N P_N'}{\Delta t} + \frac{-(c_{N+1} + c_N) P_N' + c_N P_{N-1}'}{\Delta x} &= -\frac{A_N^* - \bar{A}_N}{\Delta t} - \frac{Q_{N+1}^* - Q_N^*}{\Delta x} \quad (i=N) \end{aligned} \quad (18)$$

以上が、離散化された基礎方程式である。

3.3 計算手順、計算精度、数値解 計算は、まず適当な初期値から式(12), (13)の解 A_i をLU分解法によって求め、続いて式(10), (11)から Q_i を求める。さらに、式(18)を解いて圧力補正量を求め、式(14), (15)によって流量 Q , 断面積 A , 圧力 P を補正する。この手順を所定の精度が得られるまで繰返す。

本研究においては、チューブ分割数 $N=10, 20, 40$, 時間刻み $\Delta t=1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}$ s の計算を行って、解の精度を比較し、(1) $N=20, \Delta t=1 \times 10^{-3}$ と(2) $N=40, \Delta t=2 \times 10^{-4}$ の場合の自励振動の周期

が数%以内に収まることを確認して、以下の数値解析においては(1)の時間・空間格子寸法を用いた、表1に計算に用いた系諸元を示す。

図3、4は $P_e=4\text{ kPa}$, $P_s=4\text{ kPa}$ の動作条件下における自励振動解の計算結果である。この動作条件は4章の図7の点Aに対応している。

図3、4はそれぞれチューブの下流端近傍 $x=9.75\text{ cm}$ 、チューブ上流端近傍 $x=0.25\text{ cm}$ における振動波形であり、図3、4とも上から順に断面積、流量、圧力の時間変化を示す。ただし、流量についてはスタガー

ド格子を用いる関係上、 0.25 cm 上流の位置に対応する。振動波形は典型的なし緩形となっているが、既報⁽¹²⁾の集中定数近似によって得られた振動波形より、著者らによる実測波形図5、あるいは文献⁽¹³⁾の振動波形の特徴にはるかによく一致している。また、チューブ上流側の振幅が下流側に比べて小さいことは、すでに集中近似で得られているとおりであり、この系の自励振動がチューブ下流の負荷とチューブとの干渉の結果現れるとする既報⁽¹¹⁾の結論を裏付けている。

Table 1 Systemparameter used in calculation

Tube stiffness in collapsed state	$K_F=1.05 \times 10^2$	Pa
Tube stiffness in expanded state	$K_E=1.21 \times 10^5$	Pa
Tensile force of the tube	$T=5.0 \times 10^2$	N/m
Collapsible Tube length	$l=0.100$	m
Upstream rigid pipe length	$l_F=0.150$	m
Downstream rigid pipe length	$l_D=0.15$	m
Width of the tube	$w=7.330 \times 10^{-3}$	m
Height of the tube	$2y_0=9.0 \times 10^{-3}$	m
External pressure	$P_e=4.00 \times 10^3$	Pa
Viscous damping for tube motion	$\gamma=1.0 \times 10^4$	Pas/m ²
Density of fluid	$\rho=9.98 \times 10^2$	kg/m ³
Kinematic viscosity of fluid	$\nu=1.004 \times 10^{-6}$	m ² /s
Load resistance	$R=3.00 \times 10^{11}$	Pas ² /m ⁶

Fig. 3 Waveforms of self excited vibration (downstream $x=9.75\text{ cm}$)

Fig. 4 Waveforms of self excited vibration (upstream $x=0.25\text{ cm}$)

Fig. 5 Measured waveform of self excited vibration near the downstream end of the collapsible tube

Fig. 6 Spatial and temporal change of cross-sectional area $A(t, x)$

図6は図3、4と同一条件の下でのチューブ断面積の x 方向変化と時間的変化とを三次元的に表示したものである。下流の大きな変動が波動となって上流に伝ばし、上流端で反射する有様がよくわかる。

4. 安定性の数値的検討

コラプシブルチューブの定常流の安定性については、すでに、集中定数モデルに基づいてその基本構造を明らかにしたが⁽¹¹⁾、近似モデルであるため定量的な正確さは期し難い。そこで、分布定数表現された本来のモデルに基づいて定常流の安定性と発生する自励振動について数値解析手法によって検討した。

安定判別の基礎となる定常流動解を求める際、式(5)の抵抗係数 γ を十分大きく取って系を安定化させ、3・3節で述べた非定常解の整定値として定常解を

Fig. 7 Static characteristic of collapsible tube and self-excited region

(a) $P_s=3.9$ kPa

(b) $P_s=4.0$ kPa

Fig. 8 Transient response of flow from steady states for step disturbance ($x=9.5$ cm)

求めた。図7に供給圧力 P_s と定常流量 Q の関係を示す。

この静特性曲線上の各点に対応する定常解の安定性を数値的に検討するため、次式を定義して過渡状態の時間的推移を調べた。

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^{N-1} |Q_i(t_k) - Q_i(t_{k-1})| \\ \Sigma_n &= \sum_{k=1}^n E_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、添字 i はチューブの空間格子点、 $Q_i(t_k)$ は時刻 t_k における格子点 i の流量、 $n (= t_n/\Delta t)$ は時刻を表す。したがって、式(19)の第1式は各格子点流量の Δt 時間における変化の大きさの総和を表し、 Σ_n は時間の経過に伴う E_k の累積を表している。流れが安定であれば Σ_n は一定値に落ち着くが、不安定であれば発散する。

計算においては、与えられた供給圧力 P_s に対する定常流動解を初期値とし、 P_s の微小なステップ変化をじょう乱としてその過渡的变化を検討した。

図8(a)、(b)に安定な場合($P_s=3.8 \rightarrow 3.9$ kPa)と不安定な場合($P_s=3.9 \rightarrow 4.0$ kPa)の $Q(t)$ ($x=9.5$ cm)を示す。ここで外乱ステップは $\Delta P_s=0.1$ kPaとした。

図8の $Q(t)$ に対応する Σ_n を図9に示す。一方は整定し、他方は発散しており、発振限界は $P_s=3.9$ kPaと $P_s=4.0$ kPaの間に存在することがわかる。

定常状態の安定性、すなわち局所安定性を検討しようとする立場からは、じょう乱として与えた供給圧力変動 $\Delta P_s=0.1$ kPaは必ずしも小さい値ではない。そこで、ステップ変動量をさらに小さく選んで発振の有無を吟味した結果、外乱ステップの大きさが異なると発振限界も異なることが示された。

図7の静特性 P_s - Q 曲線上に、3種類の外乱ステップ $\Delta P_s=0.1, 0.05, 0.01$ kPaに対する発振限界をそれぞれA、B、Cとして示してある。最も小さい外乱の場合、動作点は $P_s=6.80$ kPaまで安定であり、点Cに

Fig. 9 Time histories of Σ_n for $P_s=3.9$ kPa and $P_s=4.0$ kPa

Fig. 10 Transition of self-excited vibrations with supply pressure

達すると安定な定常点 C' へ非振動的に跳動移行している。図 7 の破線部 CD 上に初期値を取ると、点 C の場合と同様に右側の安定な定常点へ移行する。ステップ外乱の大きさをさらに小さく選んでも領域 CD は変化しなかった。

次に、安定性を別の方法によって検討する。適当な供給圧力の下に比較的大きなじょう乱を加えて、数値解が一定振幅の自励振動に落ち着くまで、十分な時間の計算を行う。その後、 P_s のみを変化させて計算を続行し、振動の消長を調べる。これは、振動状態を維持したまま供給圧力を小刻みに変化させ、振動が徐々に変化する有様を調べる実験手法を数値計算に取り入れたものである。この方法によって振動停止点を求め、発振限界とした。

図 10 は発振限界近傍における振動の推移を示している。上図は供給圧力を減少させた場合の一連の計算のうち、 $t=4\sim 12$ s 区間の流量波形である。 $t=4$ s において P_s を 3.4 kPa から 3.3 kPa へ変化させ、 $t=8$ s まで一定に保った後、 $t=8$ s において 3.2 kPa に変化させて $t=12$ s まで計算した結果であり、振動は図 7 の点 E ($P_s=3.2$ kPa) において減衰した。

一方、下図は供給圧力を増加させた場合で、 $t=16$ s において P_s を 6.3 kPa から 6.4 kPa へ、 $t=20$ s において 6.4 kPa から 6.5 kPa へ変化させている。自励振動は $P_s=6.5$ kPa において跳躍的变化をして安定な定常点に移行している。

図 11 は上述の方法で計算した自励振動の圧力振幅と供給圧力との関係を示す。発振下限界の点 E ($P_s=3.2$ kPa) がステップじょう乱による発振限界の点 A (図 7) より低いのは、小振幅の緩やかな過渡的变化を

Fig. 11 Change of pressure amplitude of self-excited vibration with supply pressure

Fig. 12 Loss characteristic of collapsible tube and stability (comparison of distributed parameter model with lumped parameter model)

経て振動状態を移行させるので、振動が継続しやすくなっているためである。一方、高圧側発振限界が図 7 の点 C より低い $P_s=6.5$ kPa で安定状態に移行するのは、激しい過渡的变化中に安定限界を超えたためと考えられる。

図 12 に前報⁽¹¹⁾ の集中定数モデルに基づく安定性解析の結果と本研究の結果とを比較して示す。図 12 中の曲線は流路の損失特性 $\Delta P + \Delta P_L$ (チューブ損失圧力 ΔP + 下流剛体管路損失 ΔP_L) に基づく静特性曲線であるが、Conrad⁽¹¹⁾ 以来多くの研究でこの表示法が採られているので、本研究においても諸研究結果との比較の便宜上この表示法による安定限界図を示した。記号 C , D , E は図 7 に対応している。

集中定数モデルによる安定下限界は E_{Lump} 、静的不安定限界⁽¹¹⁾ は C_{Lump} である。不安定上限界の D と D_{Lump} については数値計算の誤差を考慮するとその差は区別できない。図 12 に見られるとおり、集中定数モデルの不安定領域は分布定数のそれより狭いが、これは集中定数モデルの等価キャパシタンス $C_2 (=5.25 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa})$ を大きめに見積もったことによる。

安定性に関する以上の議論を図 7 に従って要約すると、小じょう乱に対して定常流は CD 領域に達するまで安定を保ち、 CD 間で非振動的な不安定応答(前報における静的不安定⁽¹¹⁾)を示して点 D より右の安定領域に

移行する。一方、EC 区間が発振領域となり、じょう乱の大きさによって発振の可否が分かれる。この現象は一種の硬発振現象と考えられるが、図 11 の発振下限近傍における振幅変化の様相は軟発振現象の特徴を示している。この間の事情を数値解析で明らかにすることは計算誤差、計算時間の点から困難であり、局所安

定性の解明には解析的検討が必要であることを示唆している。

5. チューブ内の波動伝ばと自励振動

本章では、定常状態にある流れの一部に与えられたじょう乱が波動としてチューブ内を伝ばしながら自励振動に成長していく有様を数値解析によって検討する。

まず、動作条件 $P_s=4.0$ kPa, $P_e=4.0$ kPa の下での定常状態を図 13 に示す。図 13 は上から順に断面積、流速、圧力の x 方向分布である。

外乱は、時刻 $t=0.10$ s から $t=0.11$ s に至る 0.01 s, $x=1.25$ cm の位置の断面積を定常値の 1.05 倍だけ増加させて与えた(図 14 上図の実線、破線参照)。なお、

Fig. 13 Longitudinal changes of cross sectional area $A(x)$, velocity $u(x)$ and pressure $P(x)$ in steady state

Fig. 14 Spatial variation of $\delta A(x, t)$ for a disturbance from $t=0.10$ s to $t=0.15$ s

Fig. 15 Spatial variation of $\delta P(x, t)$ for a disturbance from $t=0.10$ s to $t=0.15$ s

(a) Variation $A(t, x)$

(b) Variation $P(t, x)$

(c) Variation $\delta A(t, x)$

Fig. 16 Temporal and spatial variation of $A(t, x)$, $P(t, x)$ and $\delta A(t, x)$

外乱による諸状態量の変化分が見やすくなるように、定常値からの偏差 δA , δP を図示している。

図 14 は δA の空間分布の時間的推移を示している。上図の実線の三角状変化は、時刻 $t=0.10$ s に印加された外乱を表しているが、 $t=0.11$ s には外乱の影響による流れの変化が生じて、 $t=0.12$ s の点線ではこれが下流へ伝ばしている。さらに時間の経過した下図では、下流端での波の反射と振動の成長が見られる。

図 15 は図 14 の各時刻における圧力変動分 δP の空間分布であり、チューブ圧平部の下流で外乱が大きく増幅しているのが見られる。

変動分によって波動の伝ばを見たが、図 16 に本来の状態量で外乱印加後の過渡的变化を示す。図 16(a) は断面積 $A(t, x)$ を、図 16(b) は圧力 $P(t, x)$ の空間-時間変化を、図 16(c) は対応する断面積の変化分 $\delta A(t, x)$ の空間-時間変化を三次元的に示したものである。外乱がチューブ内を下流に伝ばし、次第に自励振動に発達していく様相が明りょうに鳥かんでできる。この結果は、動脈硬化症診断のよりどころとなる血管内の波動伝ば速度の検討に有力な手段を与えるものと考えられる。

6. む す び

コラプシブルチューブ圧平部に生ずるはく離の影響を考慮せずに導かれた分布定数の数学モデルを数値解析して、実験的に得られる自励振動波形の特徴と極めてよく一致する結果を得た。さらに、定常流の安定性を数値解析し、発振領域を明らかにするとともに自励振動の諸相を解明した。また、波動伝ばの様相を検討して、圧平部下流で振動が成長することを明らかにし

た。これらの結果は、コラプシブルチューブ内流れの安定性ならびに発生する自励振動の基本的性格が作動流体の粘性損失に依存し、はく離は不可欠の要因ではないことを示している。

おわりに、図面の整理・作成に当たって飯村戔郎助手、大学院学生 是常彰人君、三浦雄司君の協力を得たこと、数値計算は東北大学流体科学研究所の Cray C-916 で行ったこと、また、本研究の一部は文部省科学研究費補助金・総合研究(A)によって行ったことを付記する。

文 献

- (1) Conrad, W. A., *IEEE Trans. Bio Med. Eng.*, BME **16** (1969), 284.
- (2) Shapiro, A. H., *Proc. 6th Can. Cong. Appl. Mech.*, (1977), 883.
- (3) 辻 隆之・ほか 7 名, *人工臓器*, **7**(1978), 435.
- (4) Ur. A. and Gordon, M., *Am. J. Physiol.*, **218** 2(1970), 524.
- (5) Griffiths, D. J., *Med Biol. Eng.*, **9**(1971), 597.
- (6) Cancelli, C. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **175** (1985), 375.
- (7) 松崎雄嗣・松本健志, *機論*, **57** 534, B(1991), 486.
- (8) Jensen, O. E., *Trans. ASME*, **114**(1992), 55.
- (9) Ohba, K., ほか 3 名, *Progress and New Directions of Biomechanics*, (1989), 213, Mita Press.
- (10) 林 叡・ほか 2 名, *機論*, **57** 534, B(1991), 397.
- (11) 林 叡・ほか 2 名, *機論*, **58** 549, B(1992), 1140.
- (12) 林 叡・ほか 2 名, *機論*, **60** 579, B(1994), 3636.
- (13) 山根隆志・折田豊樹, *機論*, **58** 551, B(1992), 1134.
- (14) Bertram, C. D., *Trans. ASME*, **111**(1989), 185.
- (15) Katz, A. I., ほか 2 名, *Biophys. J.*, **9**(1969), 1261.
- (16) Kamm, R. D. and Shapiro, A. H., *J. Fluid Mech.*, **95** (1979), 1.
- (17) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid flow*, (1980), 113, McGraw-Hill.