繊維層における放射熱伝達解析モデル*

李 炳 熙^{*1}, 工 藤 一 彦^{*1}, 黒 田 明 慈^{*1}

Analytical Model of Radiative Heat Transfer through Fibrous Layer

Bingxi LI, Kazuhiko KUDO and Akiyoshi KURODA

An analytical model is developed to calculate the radiative heat transfer through a fibrous layer with various fiber orientations considering the effect of the diameter and the optical properties of the fiber. Milne-Eddington approximation is adopted to obtain a two-flux model type of formulation. To facilitate determination of the extinction efficiency, scattering albedo of the fibrous layer and backscatter factor required for the analysis, these values are shown graphically as the functions of complex index of refraction, size parameter and fiber orientation. The validity of the present model is shown by comparing the results with ones obtained by the Monte Carlo method.

Key Words: Thermal Radiation, Heat Transfer, Analytical Model, Fibrous Layer, Two Flux Model

1. 結 言

吸収・散乱・自己放射性媒体を透過する放射エネルギーの解析は、各種断熱材の特性を調べるのに重要であるが、媒体における散乱が等方散乱でない限り、散乱による影響を正確に把握することはやっかいな問題である。特に繊維のような円柱形状の物体における散乱強度は、球状物体と違って入射角度と散乱角度の関数であるため、さらにその放射伝熱解析モデルの確立が難しくなる。

Strong^{ら⁽¹⁾}およびDavis-Birkebak⁽²⁾らは、実験的に求めた繊維層の吸収係数あるいは放射率を用いて熱流束を求める解析モデルを提案したが、繊維単体の光学物性値、およびこれらの配向が一定で、繊維層厚さ・繊維の体積密度のみ変化する場合でも繰り返して実験を行って、吸収係数あるいは放射率を求める必要があった。これに対して、Tong-Tien^{(3)~(5)}およびLee⁽⁶⁾⁽⁷⁾は、繊維単体のサイズパラメータと複素屈折率を与えることにより、電磁波理論により繊維固有の光学物性値を求め、これと繊維の配向を用いて逆散乱

割合を求め、二流束モデルを基本として、放射エネルギー輸送式の解を求め、繊維層を透過する熱流束を求めている。ここでTong-Tienの方法は、逆散乱割合を求める解析を、繊維層に垂直入射する放射エネルギーに対してしか行っていないのに対し、Leeの方法は任意の方向から入射する放射エネルギーに対しても解析が可能となっている。しかしいずれの場合も、二流束法の適用に際し、Schuster-Schwarzschild⁽⁸⁾近似(以下S-S近似と省略する)を使用しているため、求めた熱流束値が実際の値に比べ過小に評価されることが示されている⁽³⁾。

またこれらの解析に必要な繊維の光学物性値に関しては、山田^{ら⁽⁹⁾}、黒崎^{ら⁽¹⁰⁾}の研究により、複素屈折率の得られてない繊維についても、繊維1本によって散乱される光の強度分布の測定から、散乱断面積と位相関数を求められるようになっている。

著者^{ら⁽¹¹⁾}は、繊維層を透過する放射エネルギーの方向分布を、正確に模擬できるモンテカルロ法を使って放射伝熱解析を行い、Tong-Tienのガラス繊維を用いた実験値とよく一致する結果を得ている。モンテカルロ法による解析は、正確な解を求めることはできるが、計算時間が長く、繊維の光学物性値・配向・繊維径のみならず、体積密度だけ変化する場合でも計算を

* 原稿受付 1995年4月12日。

*¹ 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

やりなおさねばならず、実際の応用においては不便なところがある。

そこで、本研究では従来の二流束モデルによる解析を改良し、モンテカルロ法による計算結果との比較によりその妥当性を確認した。なお、本研究では熱伝達としては放射のみを考えることにした。

解析に用いた系は、一定の温度差をもつ2枚の無限平行平板と、これに挟まれた下記配列分布を有する繊維層からなる。この繊維層の繊維配列は Case(A)：三次元的にランダムに配列、Case(B)：平板に平行な面内でランダムに配列、の2種類を考えた。解析にあたり平板は黒体とし、単一繊維の光学物性値はこれを円柱と仮定して Kerker⁽¹²⁾ の電磁波理論により求めた⁽¹¹⁾。

おもな記号

- b_s ：逆散乱割合
  - e ：壁面放射エネルギー(= σT^4) W/m²
  - f ：単一散乱位相関数
  - f_v ：体積密度
  - I ：エネルギー強度 W/(m²·rad)
  - m ：複素屈折率($n - ki$)
  - N_s ：単位体積当たりの繊維の長さ m/m³
  - q ：単位時間に移動する熱量 W/S
  - R ：繊維半径 μm
  - T ：温度 K
  - Z_L ：繊維層の厚さ m
  - Ω ：立体角 rad
  - β ：式(10), (11)の係数
  - $\mu \equiv \cos \tau$
  - θ ：散乱角 rad
  - σ_a ：繊維層の平均吸収係数 m⁻¹
  - σ_s ：繊維層の平均散乱係数 m⁻¹
  - σ_e ：繊維層の平均減衰係数($\sigma_a + \sigma_s$) m⁻¹
  - τ ：天頂角 rad
  - ν ： x - y 平面における方位角 rad
  - ϕ ：入射角 rad
  - ω ：繊維層の散乱アルベド
- 添 字
- i ：入射
  - s ：散乱
  - f ：繊維
  - b ：黒体

2. 解析モデル

図1に示される系において、吸収・放射・散乱性媒体における単色放射エネルギーの輸送式は、下式で表さ

Fig. 1 Analytical model

れる。

$$\frac{\mu dI(z, \mu, \nu)}{dz} = -[\sigma_a + \sigma_s]I(z, \mu, \nu) + \sigma_a I_b(T) + \sigma_s \int_{4\pi} f(\Omega' \rightarrow \Omega) I(z, \mu', \nu') d\Omega' \quad \dots\dots\dots (1)$$

z 軸に垂直な繊維層断面を透過する正負方向の放射エネルギー強度が方向によらず一定だとし、正負方向における放射エネルギー強度をそれぞれ $I_0^+(z)$ ($\mu \geq 0$)、 $I_0^-(z)$ ($\mu < 0$) とし、二流束法の近似として熱流束の計算に重みをおいた Milne-Eddington⁽¹³⁾ 近似(以下 M-E 近似と略す)を用いて式(1)を積分すると下式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dI_0^+(z)}{dz} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau \sin \tau d\tau &= \int_0^{\pi/2} \cos \tau \sin \tau \left\{ -[\sigma_a + \sigma_s] I_0^+(z) \right. \\ &+ \sigma_a I_b(T) + \sigma_s \int_{\cap} f(\Omega' \rightarrow \Omega) I_0^+(z) d\Omega' \\ &+ \left. \sigma_s \int_{\cup} f(\Omega' \rightarrow \Omega) I_0^-(z) d\Omega' \right\} d\tau \quad (1 \geq \mu > 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_0^-(z)}{dz} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau \sin \tau d\tau &= \int_0^{\pi/2} \cos \tau \sin \tau \left\{ -[\sigma_a + \sigma_s] I_0^-(z) \right. \\ &+ \sigma_a I_b(T) + \sigma_s \int_{\cap} f(\Omega' \rightarrow \Omega) I_0^-(z) d\Omega' \\ &+ \left. \sigma_s \int_{\cup} f(\Omega' \rightarrow \Omega) I_0^+(z) d\Omega' \right\} d\tau \quad (0 > \mu \geq -1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $I_0(z) \cos \tau$ は z 軸に垂直な断面を透過する熱流束に相当するものである。また、 $\cap$ 、 $\cup$ は入射の方向 Ω' に対し、散乱方向 Ω の z 方向の成分が変わらない場合と変わる場合について、それぞれ各方向の半球に対する積分を表す。式(2)、(3)を積分し、式(6)～(8)を用いて熱流束 q に関する式に整理すると次のような式が得られる。

$$\frac{dq^+(z)}{dz} = -\frac{3}{2} \sigma_a q^+(z) - \frac{3}{2} b_s \sigma_s q^+(z)$$

$$+\frac{3}{2}\sigma_a e_b(T)+\frac{3}{2}b_s\sigma_s q^-(z)\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{dq^-(z)}{dz}=-\frac{3}{2}\sigma_a q^-(z)-\frac{3}{2}b_s\sigma_s q^-(z) \\ +\frac{3}{2}\sigma_a e_b(T)+\frac{3}{2}b_s\sigma_s q^-(z)\cdots\cdots(5)$$

ここで、M-E 近似で I_0^+ , I_0^- が各半球内で一定だと仮定している

$$q^+(z)=\pi I_0^+(z), \quad q^-(z)=\pi I_0^-(z) \cdots\cdots(6)$$

$$e_b(T)=\pi I_b(T) \cdots\cdots(7)$$

$$b_s \equiv \int_{\Omega} f(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \cdots\cdots(8)$$

であり、 e_b は黒体の放射エネルギーで、式(8)は逆散乱割合を示す。 b_s の求め方は次章に記述する。また繊維層内における放射平衡より式(9)が得られる。

$$2\sigma_a e_b(T)=\sigma_a [q^+(z)+q^-(z)] \cdots\cdots(9)$$

式(9)を式(4), (5)に代入して $e_b(T)$ を消去し、整理すると下式が得られる。

$$\frac{dq^+}{d\tau} = -\beta(q^+ - q^-) \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{dq^-}{d\tau} = -\beta(q^- - q^+) \cdots\cdots(11)$$

ここで、

$$\beta \equiv \frac{3}{4}(1-\omega) + \frac{3}{2}\omega b_s \cdots\cdots(12)$$

$$\omega \equiv \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \cdots\cdots(13)$$

$$d\tau \equiv \sigma_e dz \cdots\cdots(14)$$

である。繊維層の減衰係数 σ_e 、散乱アルベド ω の求め方は次章に記述する。式(10), (11)より繊維層を透過する正味放射熱流束 q は下式で表される。

$$q = q^+ - q^- = \frac{(e_1 - e_2)}{(1 + \beta\tau_0)} \quad (\tau_0 = \sigma_e z_L) \cdots\cdots(15)$$

ここで

$$e_1 = q^+(z=0)/\pi, \quad e_2 = q^-(z=z_L)/\pi \cdots\cdots(16)$$

Tong Tien および Lee のように S-S 近似を使うと、熱流束の式は式(15)と同じになるが、 β の値が

$$\beta = (1-\omega) + 2\omega b_s \cdots\cdots(17)$$

となり⁽³⁾⁽⁷⁾、式(12)に比べてその値が大きくなり、したがって式(15)により求められる熱流束の計算値が過小評価されることがわかる。

3. 逆散乱割合 b_s と σ_e , ω の計算

逆散乱割合 b_s とは、正半球方向に向かうすべての入射エネルギーの散乱のうち、負半球方向に向かう散乱エネルギーの割合、あるいは負半球方向に向かう入射エネルギーのうちの正方向への散乱割合である。式(15)より放射熱流束を計算する際には、 σ_e と係数 β を求める必要があり、また式(12)より β を計算するた

Fig. 2 Scattering by single fiber

めにはまず逆散乱割合 b_s と散乱アルベド ω を計算しなければならない。図2に三次元空間に配列された単一繊維における散乱形態を示す。ここで、 R_i , R_s , R_f はそれぞれ入射および散乱エネルギーの方向、繊維の配列方向を表し、 τ は天頂角、 ν は x, y 平面における方位角、 ϕ は入射光と繊維中心軸の垂線となす角(入射角)で、その求め方は前報⁽¹¹⁾に示した。また θ は散乱角を表す。繊維が $x-y$ 平面に平行な面内でランダムに配列された Case(B) の場合には、すべての入射方向に対して逆散乱が存在するのに対し、繊維が空間にランダムに配列された Case(A) の場合は、逆散乱が存在するためには、最大散乱天頂角 $\tau_{s, \max}$ が $\pi/2$ を超える必要があり、図3に示されるように三つの種類が考えられる。ここで、 z 軸に平行な方向からみた入射エネルギーと繊維のなす角 $|\nu_i - \nu_f|$ が $\pi/2$ より小さい場合は、図3(a)に示すように散乱円錐面が繊維の方向とつねに同方向となるが、 $|\nu_i - \nu_f|$ が $\pi/2$ より大きい場合は、図3(b), (c)に示すようにこの円錐が繊維方向と同方向の場合(c)と反対方向になる(b)の二つに分かれる。Case(a), (c)の場合は $\tau_{s, \max} = \tau_f + \phi_c > \pi/2$ となり、Case(b)の場合は $\tau_{s, \max} = 2\pi - \tau_f - \phi_c > \pi/2$ となる。ここで、 ϕ_c は入射エネルギーと繊維の中心軸のなす角である。Lee⁽⁷⁾の報告には(c)の場合が含まれていないため、 b_s の計算値が実際の値より小さくなる。

式(8)中の立体角 $d\Omega'$ は入射エネルギー分布を図1の $x-y$ 平面に平行な黒体壁面からの放射エネルギーと同じくランベルト余弦則に従う分布を有するとすると

$$d\Omega' = \sin \tau_i \cos \tau_i d\tau_i d\nu_i$$

となる。また、繊維が空間でランダムに配列された Case(A) の場合に、繊維の分布は $\sin \tau_f d\tau_f d\nu_f$ となる。したがって、単一繊維の散乱位相関数

Fig. 3 Backscattering conditions

$$I_s(\phi, \theta) d\theta / \int_0^{2\pi} I_s(\phi, \theta) d\theta$$

を用いると、立体角 $d\Omega'$ の入射エネルギーに対する散乱位相関数は

$$\begin{aligned} f(d\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \\ = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_s(\phi, \theta) \sin \tau_f d\Omega' dv_f d\tau_f d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_s(\phi, \theta) \sin \tau_f d\Omega' dv_f d\tau_f d\theta} \\ = F(\phi, \theta) d\theta \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

となり、ここで式(18)のように $F(\phi, \theta)$ を定義し、後述の θ_1, θ_2 を用いると、立体角 $d\Omega'$ の入射エネルギーに対する逆散乱割合は

$$b'_s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\phi, \theta) d\theta \dots \dots \dots (19)$$

となる。したがって、エネルギー透過の正半球方向の入射エネルギーに対する逆散乱割合は式(8)より

$$\begin{aligned} b_s = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} I_s(\phi, \theta) \sin \tau_f \sin 2\tau_i \\ \times d\theta dv_f d\tau_f dv_i d\tau_i / \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \right. \\ \left. I_s(\phi, \theta) \sin \tau_f \sin 2\tau_i d\theta dv_f d\tau_f dv_i d\tau_i \right\} \\ \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

となる。

Case(B)の配列の場合は $\tau_f = \pi/2$ であるため、

$$\begin{aligned} b_s = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} I_s(\phi, \theta) \sin 2\tau_i \\ \times d\theta dv_f dv_i d\tau_i / \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \right. \\ \left. I_s(\phi, \theta) \sin 2\tau_i d\theta dv_f dv_i d\tau_i \right\} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

となる。また繊維層の減衰係数 σ_e と散乱アルベド ω は、式(20)、(21)中の $I_s(\phi, \theta)$ の代わりに $2R \cdot N_s \cdot Q_{ext}(\phi)$ あるいは $\omega(\phi)$ を代入することにより求められる。ここで繊維への放射エネルギーの入射角 ϕ は (τ_i, v_i) と (τ_f, v_f) より求められ、単一繊維の散乱エネルギー強度 $I_s(\phi, \theta)$ 、減衰効率因子 $Q_{ext}(\phi)$ と散乱アルベド $\omega(\phi)$ は文献(12)、(13)の電磁波理論により求められる。ここで繊維層断面を透過する放射エネ

(a)

(b)

Fig. 4 Backscatter factor in Case (A)

Fig. 5 Backscatter factor in Case (B)

ルギーの方向分布に関しては、Case(B)の場合においてはランベルト余弦則による分布と近い分布であり⁽¹¹⁾、また Case(A)の場合にも同じ傾向を示すことがわかった。しかし Lee⁽⁷⁾の解析では、放射エネルギーの方向分布がガス放射のように等方的だとしているため、式(20)、(21)中の $\sin 2\tau_i$ 項が $\sin \tau_i$ となっている。 θ_1, θ_2 は図2に示される散乱円錐面をその直角断面で切った円とその中心を通る $x-y$ 平面と平行な平面との二つの交点を考えたとき、円上でこの二つの交点と円上での入射エネルギーの透過点の間のなす角である。 θ_1, θ_2 の求め方は Lee⁽⁷⁾の報告で詳述されているため、省略させていただきたい。図4、5に壁面から射出された放射エネルギーが繊維層で散乱されるとき、逆散乱割合の計算に関して、Tong-Tien⁽⁵⁾、Lee⁽⁷⁾、本文の式(20)、(21)およびモンテカルロ法による解析

結果を示す。図4は Case(A)の場合で、本文の式(20)を用いた解析結果がモンテカルロ法による解析結果とよく一致することが示されている。Lee による解析結果がかなり小さいのは、図3中での Case(c)が抜けているためである。Case(B)の場合でも図5に示されているように、本文の式(21)を用いての解析結果とモンテカルロ法による解析結果がよく一致することがわかる。一方 Tong-Tien の計算では、すべての入射角に対して、 $\theta = \pi/2 \sim 3\pi/2$ を逆散乱範囲と指定し、また Lee の場合は入射エネルギー分布を等方だと指定したため、モンテカルロ法による解析結果と若干違う値を示している。

また式(20)、(21)の計算はやっかいであるため、式(20)、(21)を用い、広い範囲のサイズパラメータ、繊維の配列、複素屈折率に対して逆散乱割合、繊維層の

Fig. 6 Effects of complex refractive index on backscatter factor [Case(A)]

Fig. 7 Effects of complex refractive index on backscatter factor [Case(B)]

Fig. 8 Effects of complex refractive index on extinction efficiency [Case(A)]

図 12 には Case(A) 繊維配列の場合、図 13 には Case(B) 繊維配列の場合に対して、繊維のサイズパラメータ、無次元層厚さ、複素屈折率を変化させたときの解析結果を示す。Case(A) の場合において、図 12 に示されているように、いずれの場合でも本解析モデルによる計算値がモンテカルロ法による解析結果に近い値を示し、S-S 近似による Lee の解析結果が実際値より過小評価されることがわかる。また、本解析モデルによる計算結果が、全体的にモンテカルロ法による計

モンテカルロ法による解析手法⁽¹¹⁾の開発で、繊維層を透過する放射熱流束を正確に求めることができるようになったが、実際の応用ではある程度の精度をもちながらより計算時間が短く、簡単な計算方法が必要である。そこで、本研究では二流束法に基づいた新しい解析モデルを開発したが、本解析モデルの妥当性を検討するために、本解析モデルと Tong Tien, Lee モ

Fig. 12 Wall heat flux in Case (A)

Fig. 13 Wall heat flux in Case (B)

算結果よりやや低い値を示しているが、これは解析モデルにおいては、繊維層を透過する放射エネルギー強度の方向別分布が角度によらず一定だと仮定したのに対して、実際に繊維層を透過する放射エネルギー強度の方向別分布がこれより若干前方に偏った分布を示すためであると考えられる⁽¹¹⁾。特に、繊維のサイズパラメータ、複素屈折率が小さく、無次元層厚さが大きいときに、その傾向が大きくなることがわかる。Case (B)の場合でも図13に示すように、本解析モデルによる計算値が Tong・Tien あるいは Lee モデルより、モンテカルロ法による解析結果に近い値を示すことがわかる。また、Case (A)の場合と同じく、サイズパラメータ、複素屈折率が小さく、無次元層厚さが大きいときに本解析モデルによる計算値とモンテカルロ法による計算値の差が大きくなることがわかる。以上の解析から、M-E 近似による二流束法を用いた本解析モデルによる熱流束の計算値が、モンテカルロ法による計算値に近いことが示され、本解析モデルの妥当性が確認された。

5. 結 言

平行平板に挟まれた繊維層における放射エネルギーの透過に関して、二流束法による新しい解析モデルを開発し、モンテカルロ法による計算結果との比較によ

りその妥当性を確認し、以下のような結論を得た。

- (1) M-E 近似を用いた二流束法を用い、また繊維層内を透過している放射エネルギーの方向分布と繊維の配向分布を考慮して求めた逆散乱割合を用いることにより、繊維層を透過する放射熱流束に関し、モンテカルロ法による計算値とよい一致を得ることができた。
- (2) 上記解析に必要な逆散乱割合、繊維層の減衰係数と散乱アルベドを、広い範囲のサイズパラメータ・複素屈折率および2種類の繊維配列に対して求め、グラフ化することにより、繊維層の放射エネルギー透過解析の実用化をはかった。

文 献

- (1) Strong, H. M. and Bundy, F. P., *J. Appl. Phys.*, **31** (1960), 39.
- (2) Dais, L. B. and Birkebak, R. C., *Biophys. J.*, **14**(1974), 249.
- (3) Tong, T. W. and Tien, C. L., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **105**(1983), 76.
- (4) Tong, T. W. and Tien, C. L., *J. Ther. Insul.*, **4**(1980), 27.
- (5) Tong, T. W. and Tien, C. L., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **105**(1983), 70.
- (6) Lee, S. C., *J. Thermophysics*, **2**-4(1988), 303.
- (7) Lee, S. C., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **33** 10(1990), 2183.
- (8) Siegel, R. and Howell, J. R., *Thermal Radia. Heat Transf.*, (1972), 491, New York.

- (9) 山田純・黒崎晏夫, 機論, **57**-541, B(1991), 3213. Academic Press.
  - (10) 黒崎晏夫・ほか2名, 機論, **57**-541, B(1991), 3205. (13) Van de Hulst, H. C., *Light Scattering by Small Particles*, (1981), 306, New York.
  - (11) 江藤一彦・ほか4名, 機論, **61**-582, B(1995), 679.
  - (12) Kerker, M., *The Scattering of Light*, (1969), 265.
-