振動壁を有する二次元チャネル内脈動流の圧力損失*

中 村 雅 英^{*1}, 有 働 嘉 郎^{*2}Pressure Loss of Pulsatile Flow through a Two-Dimensional Channel
with Oscillating Wall

Masahide NAKAMURA and Yoshiro UDO

The pressure distributions of pulsatile flow through a two-dimensional channel bounded by a fixed wall and an oscillating wall are analyzed numerically. In this calculation, a coordinate transformation method is used to analyze the moving boundary problem. The analyzed results are summarized as follows: (1) An increase in the amplitude of the wall oscillation leads to an increase in additional pressure loss due to the oscillation of wall. (2) The wall oscillation does not lead to a decrease in the pressure loss under the present calculation conditions. (3) The phase lag between the flow pulsation and wall oscillation has a strong effect on the additional pressure loss. However, this effect becomes weak with a decrease in the oscillation period of the wall.

Key Words: Unsteady Flow, Pressure Distribution, Biofluid Mechanics, Internal Flow, Finite Difference Method, Moving Boundary Problem

1. 結 言

能動的に振動する壁面近傍の流れは、血管と血流との相互作用やイルカの遊泳などに関連し、極めて興味深い流れである。この問題に関する解析的な研究としては、Ralph-Pedleyの研究⁽¹⁾、著者らの研究⁽²⁾などがあげられ、壁の能動的な振動が速度分布や壁面せん断応力に与える影響が明らかにされてきた。しかしながら、これらの研究においては圧力分布に関する考察はほとんど行われていない。壁の能動的な振動が圧力分布、特に圧力損失に与える影響は極めて興味深いものであり、工学的、および生体工学的な観点から重要な意義をもつことはいふまでもない。

本研究は血管内の血流を理解するための基礎として下面の一部が能動的に振動する二次元チャネル内の脈動流を解析したものであり、壁の能動的な振動が圧力分布に与える影響を明らかにすることを目的としている。今回の研究では、(1)主流の脈動と壁の振動との位相差、(2)壁の振動振幅、(3)壁の振動周期、に着目しこれらのパラメータを系統的に変化させ数値解析

を行い、圧力分布に与える影響について考察した。さらにこれらの解析結果から、壁の振動に伴い付加的に発生する圧力損失を無次元化した圧力損失係数を求め、その特徴を明らかにした。

2. 主 要 記 号

 D_0 : チャネルの幅 F : 壁の高さ h_m : 壁の高さの最大値 n : 壁の振動周期と主流の脈動周期との比 p : 圧力 $\bar{p}$: y 軸方向に平均した圧力 Q : 流量 Q_0 : 平均流量 Re : レイノルズ数 St : ストローク数 t : 時間 T_0 : 主流の脈動周期 u, v : 速度の x, y 成分 u_0 : 代表速度 (断面平均速度の時間平均値) x, y : 座標成分 δ : 位相差 $\Delta \bar{p}$: $x=0$ および $x=10D_0$ 間の圧力差

* 原稿受付 1995年4月12日。

^{*1} 正員、秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。^{*2} 横河メディカルシステム (〒191 日野市旭が丘4-7-127)。

- ε : 主流の無次元脈動振幅
 λ : 壁の振動に伴う付加的な圧力損失係数
 μ : 粘性係数
 ν : 動粘性係数
 ξ, η : 変換後の座標成分
 ρ : 密度
 τ : 変換後の時間
 ϕ : 流れ関数
 ω : 渦度

3. 解析モデル・解析方法

3.1 解析モデル 今回の研究では、既報⁽²⁾と同じ下部の壁の一部が能動的に振動する二次元チャネル内の圧力損失を解析の対象とした。流れ場のモデルを図1に示す。図1において、下部の壁の高さを表す関数 F は次式で与えられるものとする。

$$F = h \cdot \exp[-(x/D_0 - 2.0)^2] \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$h = -h_m \cdot \cos(2\pi nt/T_0) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで π は円周率である。この式からわかるように、壁の振動は $x/D_0 = 2.0$ を中心としており、振幅の最大値は h_m である。またチャネルに入る主流の流量は正弦波状に変化しており、次式で表されるものとする。

$$Q = Q_0 - \varepsilon Q_0 \cos[2\pi(t - \delta)/T_0] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで Q_0 は流量の時間平均値を表しており、この式は入口境界条件を決定するのに用いられる。

今回の解析において、流れ場を特徴づける無次元数は容易に予想されるようにレイノルズ数とストローハル数である。流れ場の代表速度 u_0 を $u_0 = Q_0/D_0$ と定義すれば、これらの無次元数は次式で与えられる。

$$Re = \rho u_0 D_0 / \mu, St = D_0 / (u_0 T_0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

3.2 基礎方程式・解析方法 解析手順に従って、解析方法と基礎方程式について説明する。

(1) まず速度場を解析する。解析の基礎となる方程式は二次元非圧縮性流体に対するナビエ・ストークスの方程式である。これを渦度 ω と流れ関数 ϕ を用いて書き直すとよく知られた次式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \nu \Delta \omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

Fig. 1 Calculation model

$$-\omega = \Delta \phi \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで Δ は二次元のラプラシアンである。

(2) 次に Ralph Pedley⁽¹⁾に従って、独立変数を x, y, t から次式で与えられる変数 ξ, η, τ に変換する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x, \eta = D_0(y - F)/(D_0 - F) \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

この変換により、壁は $y = F$ および $y = D_0$ であったのが、 $\eta = 0$ および $\eta = D_0$ になる。すなわち $\xi - \eta - \tau$ 系では壁は時間とともに変形しない矩形になるので、問題は固定境界値問題に変換される。その結果、基礎方程式は複雑になるものの、式(5)、(6)に基づく渦度 ω および流れ関数 ϕ の解析は極めて容易になる。なお、式(5)、(6)を $\xi - \eta - \tau$ 系に変換する際には次なる関係式を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = q_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + q_4 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

ここで、 q_1, q_2, q_4 は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{D_0}{D_0 - F}, q_2 = -\frac{D_0 - \eta}{D_0 - F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \\ q_4 &= -\frac{D_0 - \eta}{D_0 - F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

(3) 次に境界条件について述べる。今回の解析では、入口では完全に発達した二次元チャネル内脈動流の速度分布を与え、出口では自由流出条件を用いた。またチャネル上面では、流れ関数に関しては $\phi = \text{一定}$ の条件を用い、渦度に関してはいわゆる Woods の条件⁽³⁾を用いた。さらにチャネル下面に関しては、壁の運動を考慮すれば流れ関数の条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \partial \phi / \partial y|_{y=F} &= 0 \\ \partial \phi / \partial x|_{y=F} &= -\partial F / \partial t|_{y=F} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

これらの式を数値積分すれば下面における流れ関数の境界条件が求まる。なお渦度に関しては下面でも上面と同じく Woods の条件を用いた。ただし、本研究のように壁面が運動する場合には Woods の条件をそのまま適用するのは困難なので、実際の解析では座標を $\xi - \eta - \tau$ 系に変換し、固定境界値問題にしてからこの条件を適用した。

(4) 最後に圧力分布の解析方法について述べる。基礎となる式はもちろんナビエ・ストークスの方程式であり、 $\xi - \eta - \tau$ 系では次のようになる。

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + q_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (u^2) \right. \\ & \quad \left. + q_2 \frac{\partial}{\partial \eta} (u^2) + q_1 \frac{\partial}{\partial \eta} (uv) \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial \xi} - q_2 \frac{\partial p}{\partial \eta} - \mu q_1 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + q_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (uv) \right. \\ & \quad \left. + q_2 \frac{\partial}{\partial \eta} (uv) + q_1 \frac{\partial}{\partial \eta} (v^2) \right] \\ & = -q_1 \frac{\partial p}{\partial \eta} + \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

先に述べたことから渦度と流れ関数が計算できるので流れ関数を微分することにより容易に速度成分 u, v は計算できる。したがって、式(10)、(11)から圧力こう配が求まるので、それを数値的に積分することにより圧力分布は計算することができる。圧力の境界条件として入口で $p=0$ という条件を用いた。なお、数値計算方法は、既報⁽²⁾とほぼ同じであるので、その詳細はここでは省略する。

4. 解析結果および考察

4.1 解析条件 今回の解析は、 $Re=500$, $St=0.01$ の条件で行った。この条件は主要動脈程度の流動条件とほぼ一致する⁽⁴⁾。また動脈内流れは大振幅脈動流であるため、式(3)における ε の値は比較的大きくし、 $\varepsilon=0.61$ とした。本研究は先に述べたように、動脈内の血流の挙動を理解するための基礎として行ったものであるから、パラメータも動脈内の流動条件に近いものを用いた。この流動条件の下で、壁の振動の最大高さ h_m 、壁の振動周期と主流の脈動周期との比 n 、壁の振動と主流の脈動との位相差 δ をさまざまに変化させて解析を行った。

4.2 壁の振動周期が主流の脈動周期に等しい場合 ($n=1$) 圧力は x, y, t の関数であるが、 y 軸方向の圧力変化は穏やかで、実用上あまり興味深いものではない。そこで、次式に従い y 軸方向に平均した圧力 $\bar{p}$ を計算し、その特性について考察する。

$$\bar{p} = \frac{1}{D_0 - F} \int_F^{D_0} p dy \dots \dots \dots (12)$$

$\bar{p}$ に関する結果の一例を図2に示す。縦軸は無次元化した $\bar{p}$ であり、時間とともに圧力が変化している様子がよくわかる。なお、壁の突起は式(1)および式(2)からわかるように、時刻 t/T_0 が0.5のとき $x/D_0=2.0$ の点で最も高くなる。そのため、このような時刻のときには $x/D_0=2.0$ の近傍で圧力は急変することが予想されるが、それは図2からも読取れる。

さて、実用上最も興味深いのは圧力差であろう。そこでここでは $x/D_0=0.0$ と 10.0 の2点間の圧力差について考察する。 $\Delta \bar{p}$ を次のように定義する。

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}(x/D_0=10.0) - \bar{p}(x/D_0=0.0) \dots \dots \dots (13)$$

無次元化された $\Delta \bar{p}$ の一周期における変化を図3に示す。図3は壁の振動と主流の脈動との位相差 δ/T_0 と壁

の突起の最大高さ h_m/D_0 をパラメータとしており、上の図から $\delta/T_0 = -0.055, 0.195, 0.445, 0.695$ である。また各図において h_m/D_0 の値は0.1から0.4まで変化させている。なお、横軸は時間であり、突起の高さは式(2)からわかるように $t/T_0=0.5$ で最も高くなる。図3から、位相差 δ/T_0 の値は圧力差に強い影響を与えることがわかる。すなわち、 δ/T_0 の値が $-0.055, 0.195, 0.695$ のとき、圧力差の波形には明らかにひずみが生じ、 h_m/D_0 の増加とともに正弦波状の変化からずれてゆくが、 δ/T_0 が0.445のときには h_m/D_0 の圧力差に与える影響は弱く、この値が大きくなっても、圧力差は正弦波状に変化していることがわかる。この結果は壁の突起が時間とともに振動する場合の結果であるが、壁の突起が時間とともに振動しない場合には圧力差はどのように変化するだろうか。その質問の解答は図4に示されている。図4は突起が最大高さ ($h=h_m$) で固定されている場合の圧力差を示している。図4から、圧力損失は運動壁の場合よりも大きくなるが、形状は正弦波に近く、波形のひずみは小さいことがわかる。

次にこの結果の応用例として、狭さくを含む心臓血管系の流れについて考えてみよう。血管内に生じる狭さくは血流の脈動とともに運動することがある。そのようなときには運動する狭さくと脈動流との相互作用

(a) $0.000 \leq t/T_0 \leq 0.500$

(b) $0.500 \leq t/T_0 \leq 1.000$

Fig. 2 One example of pressure distribution

が生じ、複雑な流動特性を示すことが予想される。この問題は Rabinovitz ら⁽⁵⁾ によってモデル実験が行われた。その結果、狭さくが固定されている場合は圧力波形には大きなひずみが現れないが、狭さくが運動する場合には圧力波形に大きなひずみが現れることが明らかになった。さらに彼らはこの結果がファロー四徴

症と呼ばれる病変と強い相関があり、この圧力波形のひずみが実際にファロー四徴症でも見られることを示した。この結果と本解析結果とを比較してみよう。彼らのモデル実験における運動する狭さくが本解析の振動する壁に対応すると考えれば、先に述べたように本解析においても壁の振動は圧力波形に固定壁の場合には見られないひずみを引き起こしている。そのため、本解析結果と Rabinovitz らの結果とは幾何形状等が異なるにもかかわらず定性的に一致し、本解析は Rabinovitz らの結果の理論的な根拠を与えていることがわかる。

次に壁の振動の効果を明らかにするため、 $\Delta \bar{p}$ の一周期における平均値 $\langle \Delta \bar{p} \rangle$ を次式のようにおく。

$$\langle \Delta \bar{p} \rangle = \Delta p_0 + \Delta p' \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで Δp_0 は h がつねに零である場合の圧力損失を一周期にわたって平均した値である。したがって、この値は二次元チャネル内の Womersley の解⁽⁶⁾ から解析的に計算することができる。この Δp_0 の定義からわかるように $\Delta p'$ は壁の振動に伴う圧力損失の変化を示しており、これが求めるものである。この値を次式により無次元化する。

$$\Delta p' = -\lambda \frac{1}{2} \rho u_0^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで λ は壁の振動に伴い発生する付加的な圧力損失を無次元化した係数である。本解析結果から λ の値を計算すると図5のようになる。なお図5において、破線は壁の突起が最大高さで固定されている場合の値である。図5から、 λ の値は h_m/D_0 の増加とともに単調に増加すること、位相差 δ/T_0 は λ の値に強い影響を与えること、などがわかる。また図5でもう一つ注目すべき結果は、ほとんどすべての場合において $\lambda > 0$ となることである。この結果は、ここでの解析条件下では壁の運動は圧力損失を低下させないということを意味している。

図5は壁の振動振幅と付加的に発生する圧力損失と

Fig. 3 Change of pressure difference ($n=1$)

Fig. 4 Change of pressure difference (fixed wall)

Fig. 5 Pressure loss coefficient due to the wall oscillation ($n=1$)

の関連を示しているが、実際の血管では脈動に伴う壁の振動振幅はどの程度だろうか。Anayiotos らはこの問題の答えとして、直径の4%から7%という数値を示している¹⁷⁾。血管の直径が本解析における D_0 に、血管壁の振動振幅が h_m に対応すると考えれば、図5はこのような条件下では壁の振動は圧力損失にほとんど影響を与えないことを示している。したがって、血管壁は圧力損失に悪影響を与えない範囲で振動していることが予想されるが、本解析結果だけでは血管系の厳密な議論をすることはできないので、さらなる研究が期待される。

4.3 壁の振動周期が主流の脈動周期の1/2の場合 ($n=2$) この節の目的は、壁の振動周期を主流の脈動周期の1/2にしてその影響を調べることである。そのため、これ以外のパラメータはすべて4.2節と同じものを用いることにする。まず $\Delta \bar{p}$ に関する結果を図6に示す。図6は壁の振動と主流の脈動との位相差 δ/T_0 と壁の突起の最大高さ h_m/D_0 をパラメータとしており、上の図から $\delta/T_0 = -0.055, 0.070, 0.195, 0.320$ である。また各図において h_m/D_0 の値は0.1から0.4まで変化させている。なお、横軸は時間であり、突起の高さは式(2)からわかるように $t/T_0 = 0.25$ および 0.75 で最も高くなる。図6から、 $\Delta \bar{p}$ の波形には壁の突起が最も高くなったときにひずみが発生することがわかる。この結果は理解しやすいが、波形の変化は $n=1$ の場合よりも複雑で、短い周期の変化も含まれていることがわかる。このように圧力差の時間変化は壁の振動周期に強く依存し、このような単純な条件下でも複雑な波形が発生することがわかった。なお、この結果が数値解析における時間刻みに依存しないことは、実際に時間刻みを変えて数値解析を行うことにより確認した。

Fig. 6 Change of pressure difference ($n=2$)

続いて λ の値を図7に示す。図7において、破線は壁が最大高さで固定されている場合の結果で、図5に書かれている破線と同一のものである。図7から、 n の値が大きくなると位相差の λ に与える影響が小さくなることがわかるが、この結果は容易に理解することができる。またこの場合でもつねに $\lambda > 0$ となるこ

Fig. 7 Pressure loss coefficient due to the wall oscillation ($n=2$)

とがわかる。すなわち、壁の振動周期を $1/2$ にしても壁の振動による圧力損失の低下は期待できないことがわかる。

以上の結果のうち特に注目されることは、式(1)および式(2)に従って壁を振動させたときには、壁の能動的な振動は圧力損失を低下させないという結果である。流れによって受動的に振動する壁が圧力損失に与える影響は多くの研究者によって研究されてきた。これらの研究はほとんど実験的なものであるが、理論的な研究として、竹光らの解析⁽⁶⁾が注目される。彼らの解析は十分時間が経過すると数値解が得られなくなるという問題点を含むが、流れに伴う壁の受動的な振動は圧力損失を低下させる可能性があることを示唆している⁽⁶⁾。この結果と本解析との矛盾の原因はどこにあるのだろうか。最も可能性があるのは壁の振動様式と考えられる。流れにより受動的に変形する壁の振動様式とここで仮定した壁の振動様式とは大きな相違があることは明らかであり、その結果として圧力損失にも

相違が生じたものと考えられる。そのため、今後は壁の振動様式をさまざまに変化させ解析を行うことが必要と思われる。

5. 結 言

能動的に運動する壁を有する二次元チャンネル内脈動流の圧力損失を差分法を用いて解析した。この問題は移動境界値問題となるので、ここではこの問題を座標変換により固定境界値問題に変換して解析した。解析結果を要約すると次のようになる。

(1) 壁の能動的な振動に伴い発生する付加的な圧力損失は振動振幅とともに増加する。そして今回の解析範囲内では、壁の能動的な振動が脈動流の圧力損失を低下させることはない。

(2) 壁の振動と主流の脈動との位相差は圧力損失に強い影響を及ぼし、位相差を選ぶことにより、圧力損失の増加を抑えることができる。しかしこの効果は壁の振動周期が短くなると弱くなる。

文 献

- (1) Ralph, M. E. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **190** (1988), 87-112.
- (2) 中村雅英・木場光哉・佐藤温志, 機論, **59** 567, B(1993), 3308-3312.
- (3) 日本機械学会編, 流れの数値シミュレーション, (1988), 90-91, コロナ社.
- (4) Matsunobu, Y. and Arakawa, E., *Biorheology*, (1974), 457-464.
- (5) Rabinovitz, R., Degani, D., Guttinger, C. and Milo, S., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **106**(1984), 309-314.
- (6) 今井功, 流体力学(前編), (1973), 296-297, 裳華房.
- (7) Anayiotos, A. S., Jones, S. A., Giddens, D. P., Glagov, S. and Zarins, C. K., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **116** (1994), 98-106.
- (8) 竹光信正・松信八十男, ながれ, **5**(1986), 254-266.