乱流の繰込み理論に関する研究*

(第1報, 乱流モデル構築に関するYakhot-Orszag-Smith理論の評価)

板津 義博^{*1}, 長野 靖尚^{*2}

Renormalization Group Theory for Turbulence (1st Report, Assessment of Yakhot-Orszag-Smith Method for Deriving Turbulence Models)

Yoshihiro ITAZU and Yasutaka NAGANO

The purpose of this paper is to estimate the renormalization group theory for turbulence developed by Yakhot and Orszag (1986) and reformulated by Yakhot and Smith (1992). We examine their basic theory for the Navier-Stokes equations, and the transport equations for the kinetic energy K and its dissipation rate ϵ . It becomes evident that their method is not related to Wilson's renormalization group theory. Their $\bar{K} - \bar{\epsilon}$ model is not directly obtained by the renormalization group method. They evaluated the Kolmogorov constant by setting $\epsilon=0$ and $\epsilon=4$ in the same equations. Furthermore, the constants in the $\bar{K} - \bar{\epsilon}$ model are invalid because of the same problem.

Key Words: Turbulence, Fluids Dynamics, Turbulence Model, Renormalization Group, ϵ Expansion, Inertial Subrange

1. 緒 言

繰込み群の方法 (renormalization group method, 以下 RNG という) を乱流理論に適用したものととして, Yakhot-Orszag⁽¹⁾の理論がある. この理論は, その後 Yakhot-Smith⁽²⁾により改良され, 現在, 乱流の理論的研究手法の一つの柱となっている.

この手法は, 相転移の問題を取り扱うために Wilson が確立した波数空間上での ϵ 展開の方法⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾を, そのまま乱流理論へ適用したものだと言われている. そして, Yakhot-Orszag-Smith の RNG によって構築された $\bar{K} - \bar{\epsilon}$ 2 方程式モデルの特徴は, 統計理論に基づく式展開のみでモデリングができ, かつモデル定数も得られることであると思われる. その結果, 汎用性の高いモデルとの認識から, 現在いくつかの市販の数値計算ソフトに組込まれている.

しかし最近, 彼らの RNG の理論展開には数学的な矛盾をいくつか含むことが指摘され⁽⁷⁾⁽⁸⁾, その信頼性が疑問視され始めた. そこで本研究では, Yakhot らの方法の誤りを具体的に指摘し, RNG 法の物理的ある

いは数学的な問題点を明確にする.

2. 記 号

C_K : Kolmogorov 定数

C_μ, β, η_0 : 乱流モデル定数

D_0 : 揺動力の強度

d : 次元 (= 3)

f_i : x_i もしくは k_i 方向の揺動力

K : 瞬時の乱流エネルギー = $u_i u_i / 2$

$\bar{K}$: K の時間平均値

k_i : 波数空間の i 方向座標もしくはその方向の波数成分

k : 波数 (= $|k|$)

$\mathbf{k}$: 波数ベクトル = (k_1, k_2, k_3)

$\hat{\mathbf{k}}$: $(d+1)$ 次元波数・周波数ベクトル = $(\mathbf{k}, \omega)$

P_k : $\bar{K}$ - 方程式の生成項

p : 圧力

q : 波数 (= $|q|$)

S_d : d 次元単位球の表面積

S : ひずみ速度パラメータ = $(2S_{ij}S_{ij})^2$

S_{ij} : 平均ひずみ速度テンソル

t : 時間

$\bar{U}_i$: x_i 方向の平均速度成分

* 原稿受付 1995 年 6 月 20 日.

*¹ 学生員, 名古屋工業大学大学院 (〒466 名古屋市昭和区御器所町).

*² 正員, 名古屋工業大学.

u_i : x_i 方向の変動速度成分

x_i : 物理空間の i 方向座標

$\mathbf{x}$: 物理空間でのベクトル

y : 任意のパラメータ

α_0 : $\alpha(r)$ の初期値

$\delta(k)$: デイラックのデルタ関数

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

ϵ : 展開パラメータ

ε : 瞬時の乱流エネルギーの散逸率

$$= \nu_0 (\partial u_i / \partial x_j) (\partial u_i / \partial x_j)$$

$\bar{\varepsilon}$: ε の時間平均値

η : 無次元ひずみ速度パラメータ

$$= \frac{SK}{\bar{\varepsilon}}$$

Λ_0 : 初期切断波数

Λ_S : 慣性小領域の最小波数

λ_0 : 結合定数 (= 1)

$\bar{\lambda}_0$: 無次元結合定数

$\lambda(r)$: 繰込まれた結合定数

$\bar{\lambda}(r)$: 繰込まれた無次元結合定数

ν_0 : 分子動粘性係数

$\nu(r)$: 繰込まれた粘性係数

ρ : 密度

χ_0 : 初期の拡散係数 = ν_0

$\chi(r)$: 繰込まれた拡散係数

ω : 周波数

添 字

()[<] : 波数 $k < \Lambda_0 e^{-r}$ での成分

()[>] : 波数 $\Lambda_0 e^{-r} < k < \Lambda_0$ での成分

| | : ベクトルの絶対値

< > : アンサンブル平均値

()⁻ : 時間平均値

()^{*} : 慣性小領域を繰込んだ後の係数

3. 基礎理論

3.1 基礎方程式 支配方程式は、揺動力 f_i を含む次の Navier-Stokes 方程式と連続の式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

これは一様等方性乱流の解析に用いられている Langevin 形のモデルであり、平均成分は含まれていない。

揺動力 f_i は、変動成分のみの Navier-Stokes 方程式に乱れを与えるため付加する項であり、その統計量はガウス分布を仮定して、波数・周波数空間における2点相関のアンサンブル平均は以下のように与えられる。

$$\langle f_i(\hat{k}) f_j(\hat{k}') \rangle = \begin{cases} 2D(k) (2\pi)^{d+1} P_{ij}(\mathbf{k}) \\ \quad \times \delta(\hat{k} + \hat{k}') : & \Lambda_S < k < \Lambda_0 \\ 0 : & k < \Lambda_S \end{cases} \quad (3)$$

ここで、

$$D(k) = D_0 k^{-\nu} \quad (4)$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (5)$$

式(5)から分かるように、揺動力 f_i は平均値は零であり、 $P_{ij}(\mathbf{k})$ によって統計的に定常、等方的かつソレノイド的なものとなっている。

次に、フーリエ変換の定義

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{k < \Lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \quad (6)$$

を用いて、Navier-Stokes 方程式(1)と連続の式(2)を波数・周波数空間で表すと、

$$u_i(\hat{k}) = G_0(\hat{k}) f_i(\hat{k}) - \frac{i\lambda_0}{2} G_0(\hat{k}) P_{imn}(\mathbf{k}) \int_{q < \Lambda_0} u_m(\hat{q}) u_n(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \quad (7)$$

$$k_i u_i(\hat{k}) = 0 \quad (8)$$

となる。ここで、 $\hat{k} = (\mathbf{k}, \omega)$ 、 $\hat{q} = (\mathbf{q}, \Omega)$ は $(d+1)$ 次元波数・周波数ベクトルである。また、

$$G_0(\hat{k}) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1} \quad (9)$$

$$P_{imn}(\mathbf{k}) = \hat{k}_m P_{in}(\mathbf{k}) + k_n P_{im}(\mathbf{k}) \quad (10)$$

$$d\hat{q} = dq_1 dq_2 dq_3 d\Omega \quad (11)$$

であり、式(10)中の $P_{in}(\mathbf{k})$ は式(5)で与えられる。 $\lambda_0 (= 1)$ は、次節で行う摂動展開の際に、摂動のオーダーを表すために便宜上に導入したパラメータである。波数は $0 < k < \Lambda_0$ 、 $0 < q < \Lambda_0$ 、また周波数は $-\infty < \omega < +\infty$ 、 $-\infty < \Omega < +\infty$ の範囲で定義される。当然のことながら、 Λ_0 は十分に大きいと仮定している。

3.2 摂動展開による高波数成分の除去 式(7)、(8)の速度成分 $u_i(\hat{k})$ を、次の二通りに分ける。

$$u_i(\hat{k}) = \begin{cases} u_i^<(\hat{k}) & k < \Lambda_0 e^{-r} \\ u_i^>(\hat{k}) & \Lambda_0 e^{-r} < k < \Lambda_0 \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 r は $0 < e^{-r} < 1$ の条件を満たす。

次に、式(7)より $u_i^>(\hat{k})$ と $u_i^<(\hat{k})$ の輸送方程式をそれぞれ求める。式(7)の非線形項 $[\lambda_0$ が掛かっている項]には $u_m(\hat{q}) u_n(\hat{k} - \hat{q})$ がある為に、 $u_i^<(\hat{k})$ の輸送方程式には $u_i^>(\hat{k})$ 成分が現れる。この $u_i^>(\hat{k})$ に、別に求めた $u_i^>(\hat{k})$ の輸送方程式[これには当然 $u_i^<(\hat{k})$ の成分も非線

形項に現れる] から定まる $u_i^>(\hat{k})$ を代入する. この操作を繰り返して行い, $\mathbf{u}^>$ 成分を順次消去していくと [すなわち, 高波数の $\mathbf{u}^>$ 成分を低波数の $\mathbf{u}^<$ 成分に繰り込んでいく],

$$(-i\omega + \nu_0 k^2) u_i^<(\hat{k}) = O(\lambda_0^0) + O(\lambda_0^1) + O(\lambda_0^2) + \dots \quad (13)$$

のように λ_0 のべき乗の展開式となる. このようにして求めた $\mathbf{u}^<$ の輸送方程式で $O(\lambda_0^3)$ 以上の項を無視すると, $\mathbf{u}^<$ の方程式中から $\mathbf{u}^>$ を完全に消去できる. 但し $f^>$ の相関が現れるが, これは式 (3) から計算する. そのようにして求めた $u_i^<(\hat{k})$ の方程式は,

$$(-i\omega + \nu_0 k^2) u_i^<(\hat{k}) = f_i^<(\hat{k}) + O(\lambda_0^1) + O(\lambda_0^2) \quad (14)$$

のように書ける. ここで $O(\lambda_0^2)$ の項には $f^>$ の項から生ずる高波数成分 $G_0^>(\hat{q})$, $P_{imn}^>(\mathbf{q})$ 等の $\hat{q} = (\mathbf{q}, \Omega)$ に関する積分が現れるが, これはまず周波数 Ω の積分をした後に, 波数ベクトル $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{q}|$ の仮定 (distant-interaction といわれる) のもとに $\mathbf{q}$ について積分をすればよい.

その結果

$$(-i\omega + \nu_0 k^2) u_i^<(\hat{k}) = f_i^<(\hat{k}) + O(\lambda_0) - \Delta\nu(r) k^2 u_i^<(\hat{k}) \quad (15)$$

すなわち

$$\{-i\omega + (\nu_0 + \Delta\nu) k^2\} u_i^<(\hat{k}) = f_i^<(\hat{k}) + O(\lambda_0) \quad (16)$$

となる. 式 (16) を $u_i^<(\hat{k})$ について具体的に書くと次式のようになる.

$$u_i^<(\hat{k}) = G_r(\hat{k}) f_i^<(\hat{k}) - \frac{i\lambda_0}{2} G_r(\hat{k}) P_{imn}(\mathbf{k}) \int_{q < \Lambda_0 e^{-r}} u_m^<(\hat{q}) u_n^<(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \quad (17)$$

ここで,

$$G_r(\hat{k}) = \{-i\omega + \nu(r) k^2\}^{-1} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \nu_0 + \Delta\nu(r) \\ &= \nu_0 \left(1 + A_d \bar{\lambda}_0^2 \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta\nu(r) = A_d \nu_0 \bar{\lambda}_0^2 \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon} \quad (20)$$

$$A_d = \frac{1}{2} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - d - \epsilon}{d(d+2)} \quad (21)$$

$$\epsilon = 4 + y - d \quad (22)$$

$$\bar{\lambda}_0^2 = \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^3 \Lambda_0^6} \quad (23)$$

である.

式 (19) は消去された高波数側の速度成分 $\mathbf{u}^>$ の影響が, 低波数成分の変動に対して粘性係数の増大として繰込まれていることを表している. ただし, 式 (22) は揺動力を決めるパラメータ y の影響も受けるため, 次元のみに依存する Wilson 理論⁽³⁾ の $\epsilon = 4 - d$ とは異なる. さらに, この後スケールの取り直しも行われていないので, Yakhot らの手法は Wilson の ϵ 展開法とは異なる.

つまり, 有効粘性係数は

$$\nu(r) = \nu_0 + \int_0^r \frac{d\nu(l)}{dl} dl \quad (24)$$

となり, $r \rightarrow$ 大として切断波数 $\Lambda(r) (= \Lambda_0 e^{-r})$ を高波数の初期値 Λ_0 から低波数の Λ_S へと近づけることにより, 非線形項の影響をすべて粘性係数の見掛け上の増大として繰り込むだけである.

3.3 ϵ 展開 式 (19) より

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{A_d D_0 \lambda_0^2}{\nu_0^3 \Lambda_0^6} e^{\epsilon r} \quad (25)$$

となる.

Yakhot ら^{(1) (2)} は, 式 (25) に式 (19) を代入して ν_0 を $\nu(r)$ へと置き換え, ここで $\epsilon \rightarrow 0$ [$d = 3$ であるから $y \rightarrow -1$ に対応] として ϵ による摂動展開を行い,

$$\begin{aligned} \frac{d\nu(r)}{dr} &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \left(1 + A_d \bar{\lambda}_0^2 \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon} \right)^2 \\ &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \{ 1 + O(\epsilon) + O(\epsilon^2) + \dots \} \\ &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \end{aligned} \quad (26)$$

としている.

しかし, 実際 $\epsilon \rightarrow 0$ としても, 式 (25) は

$$\begin{aligned} \frac{d\nu(r)}{dr} &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \left(1 + A_d \bar{\lambda}_0^2 \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon} \right)^2 \\ &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \left\{ 1 + A_d \bar{\lambda}_0^2 \left(r + \frac{\epsilon}{2!} r^2 + \dots \right) \right\}^2 \\ &= A_d \nu(r) \bar{\lambda}^2(r) \left(1 + A_d \bar{\lambda}_0^2 r \right)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

となり, 式 (26) のような結果は得られない. 繰り込むことの本質的な意味は, 式 (24) で述べたように $r \rightarrow$ 大の状態にすることであり, この誤りは物理的に見過ごせないものである.

当然のことながら, 式 (26) から求めた粘性係数 $\nu(r)$ は

$$\nu(r) = \nu_0 \left(1 + 3 A_d \bar{\lambda}_0^2 \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

となり, 繰り込んだ結果 [式 (19)] とは異なる.

Yakhot ら^{(1) (2)} は, この誤った式 (26) [又は式 (28)] をもとに, 波数 $k = \Lambda_0 e^{-r}$ が $k \ll \Lambda_0$ の場合には,

$$\nu(k) \simeq \left(\frac{3 A_d D_0}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{1}{3}} \quad (29)$$

になるとしている。式(29)は、式(26)が正しくて、かつ $r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ としたときのみ正しい。しかし、 $r \rightarrow \infty$ とすると式(27)から式(26)は明らかに正しくない。従って、式(29)は誤っている。

さらに Yakhot ら⁽¹⁾⁽²⁾ は、Edwards が数値積分で求めた次の結果⁽⁴⁾

$$\frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} = 1.59 \bar{\epsilon} \dots\dots\dots (30)$$

を式(29)に代入して[実際、1.59 は Yakhot らの計算間違いで正しくは 1.57⁽⁵⁾]、粘性係数を

$$\begin{aligned} \nu(k) &= \left\{ \frac{3 \times 1.59}{2\epsilon} \frac{d^2 - d - \epsilon}{2(d^2 + 2d)} \right\}^{\frac{1}{3}} \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \\ &= \left\{ \frac{3 \times 1.59}{2 \times (4)} \frac{1}{2} \frac{3^2 - 3 - (0)}{3^2 + 2 \times 3} \right\}^{\frac{1}{3}} \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \\ &= 0.49 \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

と計算した。しかし、同じ式上で ϵ に対して 0 と 4 ($\epsilon = 4$ は後述するように、Kolmogorov の $-5/3$ 乗スペクトルを再現するために必要)を使い分けられているので、ここで得られた定数を正当に評価することは出来ない。

3.4 エネルギースペクトル いま、 $\epsilon \rightarrow 0, \Lambda_S < k \ll \Lambda_0$ とすると、式(7)で $q > k$ の全ての $u(q)$ のモードが無視でき、非線形項はなくなる。したがって、

$$\frac{1}{2} \overline{u_i^< u_i^<} = \int_{k < \Lambda_0} E(k) dk \dots\dots\dots (32)$$

で定義されるエネルギースペクトル $E(k)$ を $O(\lambda_0^0)$ のオーダーの Navier-Stokes 方程式

$$(-i\omega + \nu(k)k^2) u_i^<(\vec{k}) = f_i^<(\vec{k}) \dots\dots\dots (33)$$

から求めると、

$$E(k) = \frac{S_d D_0}{(2\pi)^d \nu(k)} k^{1-\epsilon} \dots\dots\dots (34)$$

が得られる⁽¹⁾⁽²⁾。

そして、式(34)に式(29)、(30)を代入するとエネルギースペクトルは

$$E(k) = C_K \bar{\epsilon}^{\frac{2}{3}} k^{1-\frac{2}{3}\epsilon} \dots\dots\dots (35)$$

となり、Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を満たすためには $\epsilon = 4$ [すなわち $y = 3$] とする必要がある。明らかに、 ϵ による摂動展開を正当化するための $\epsilon \rightarrow 0$ [すなわち $y \rightarrow -1$] という 3.3 節の操作とは整合しない。

さらに、Kolmogorov 定数は

$$\begin{aligned} C_K &= \left(\frac{1.59}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{3}{2\epsilon} \frac{d^2 - d - \epsilon}{d(d+2)} \right\}^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1.59}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{3}{2 \times (4)} \times \frac{3^2 - 3 - (0)}{3 \times (3+2)} \right\}^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1.615 \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

と計算されているが、ここでも同じ式で $\epsilon = 0$ と $\epsilon = 4$ の使い分けが行われている。

一方、有効粘性係数を通常のレイノルズ平均乱流モデルで用いられる渦粘性係数に対応させるため、式(29)で波数 $k = \Lambda_S$ とおく。そして、それに乱流エネルギーを式(35)のスペクトル分布から求めた

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \int_0^\infty E(k) dk \simeq \int_{\Lambda_S}^\infty C_K \bar{\epsilon}^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} C_K \bar{\epsilon}^{\frac{2}{3}} \Lambda_S^{-\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

という関係式を用い、

$$\begin{aligned} \nu(\Lambda_S) &= \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{1.59 \times 3}{2\epsilon} \frac{d^2 - d - \epsilon}{d^2 + 2d} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{K}^2}{\left(\frac{3}{2} C_K \right)^2 \bar{\epsilon}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{1.59 \times 3}{2 \times (4)} \times \frac{3^2 - 3 - (0)}{3^2 + 2 \times 3} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{K}^2}{\left(\frac{3}{2} \times 1.615 \right)^2 \bar{\epsilon}} \\ &= 0.085 \frac{\bar{K}^2}{\bar{\epsilon}} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

を得ている⁽¹⁾⁽²⁾。この式(38)の係数 0.085 から、渦粘性のモデル定数が標準 $\bar{K} - \bar{\epsilon}$ モデルで用いられる値 0.09 に近いことを強調している。しかし、これは全くの偶然にすぎない。式(38)の導出には、次の三つの矛盾がある。すなわち式(35)は $\Lambda_S < k \ll \Lambda_0$ のスペクトルであり、式(37)のように積分できない。また式(29)と連成させているが、式(29)は前述のように正しくない。さらに、同一の式中で $\epsilon = 0$ と $\epsilon = 4$ が用いられていることである。

4. $\bar{K}$ - 方程式のモデリング

支配方程式は、式(1)を基にした次の変動成分のみの K - 方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} &= -\epsilon + \nu_0 \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p) + u_i f_i \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ここで

$$K = \frac{1}{2} u_i u_i \dots\dots\dots (40)$$

$$\epsilon = \nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \dots\dots\dots (41)$$

である。

そして、式(39)と次のフーリエ変換の定義

$$K(\mathbf{x}, t) = \int_{k < \Lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \dots\dots\dots (42)$$

$$K(\mathbf{k}, \omega) \equiv K(\hat{k}) = \frac{1}{2} \int_{q < \Lambda_0} u_i(\hat{q}) u_i(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}$$

$$\dots\dots\dots (43)$$

から、波数・周波数空間での K -方程式

$$(-i\omega + \chi_0 k^2)K(\hat{k}) = -i\lambda_0 k_i \int_{q < \Lambda_0} u_i(\hat{q})K(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} - \varepsilon(\hat{k}) \dots\dots\dots (44)$$

が得られる。ただし、圧力相関項は微小として無視し、また、揺動力はガウス型ランダム変数であるからそれとの相関項も無視している。

次に、Navier-Stokes 方程式の場合と同様に、 $K(\hat{k})$ を $K^<(\hat{k})$ と $K^>(\hat{k})$ の2成分に分けて、 $K^<(\hat{k})$ の輸送方程式に含まれる $u^>$ 及び $K^>$ 成分を消去する。

その結果、繰り込まれた後の K -方程式は

$$\begin{aligned} & \{-i\omega + \chi(r)k^2\}K^<(\hat{k}) \\ &= -i\lambda_0 k_i \int_{q < \Lambda_0 e^{-r}} u_i^<(\hat{q})K^<(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} - \varepsilon^<(\hat{k}) \end{aligned} \dots\dots\dots (45)$$

となる。ここで、繰込まれた拡散係数は

$$\chi(r) = \chi_0 \left\{ 1 + \frac{d-1}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\bar{\lambda}_0^2 \nu_0^2}{\chi_0 + \nu_0} \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon \chi_0} \right\} \dots\dots (46)$$

である。

いま、式(46)を r で微分すると

$$\frac{d\chi(r)}{dr} = \frac{d-1}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\bar{\lambda}_0^2 \nu_0^2}{\chi_0 + \nu_0} e^{\epsilon r} \dots\dots\dots (47)$$

となる。そして、Yakhot ら⁽¹⁾⁽²⁾ は式(47)の ν_0 を式(19)で $\nu(r)$ に、 χ_0 を式(46)で $\chi(r)$ へと置き換え、 $\epsilon \rightarrow 0$ として ϵ による摂動展開を行い、

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(r)}{dr} &= \frac{d-1}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{D_0}{\nu(r)\Lambda^\epsilon(r)} \\ &\times \frac{1 + \overbrace{A_d \bar{\lambda}_0^2 e^{\epsilon r} - 1}^{\epsilon}}{\underbrace{\chi(r)}_{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{S_3}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\lambda}_0^2 \nu_0^2}{\chi_0 + \nu_0} \frac{e^{\epsilon r} - 1}{\epsilon \chi_0}\right)} + \underbrace{\nu(r)}_{\left(1 + \underbrace{A_d \bar{\lambda}_0^2 e^{\epsilon r} - 1}_{\epsilon}\right)}} \\ &\simeq \frac{d-1}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{D_0}{\nu(r)\Lambda^\epsilon(r)} \frac{1}{\chi(r) + \nu(r)} \\ &= \frac{d-1}{d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\bar{\lambda}^2(r)\nu^2(r)}{\chi(r) + \nu(r)} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

としている。明らかに*で記した部分を無視しているが、 ϵ が十分小さいとしてもこのような結果は得られないはずであり[その理由は式(27)の場合と同じ]、当然ながら式(48)を r について積分した結果は、先の式(46)とは一致しない。

次に、 $\alpha(r) = \frac{\chi(r)}{\nu(r)}$ と定義して r による微分方程式

$$\frac{d\alpha(r)}{dr} = \frac{1}{\nu(r)} \frac{d\chi(r)}{dr} - \frac{\chi(r)}{\nu^2(r)} \frac{d\nu(r)}{dr}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{S_d}{(2\pi)^d} \bar{\lambda}^2(r) \left\{ \frac{d-1}{d} \frac{1}{1+\alpha(r)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{d^2-d-\epsilon}{d(d+2)} \alpha(r) \right\} \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

を求め、それを初期条件 $\alpha(0) = \alpha_0$ の下で解き、

$$\left| \frac{\alpha - a}{\alpha_0 - a} \right|^{\frac{a+b}{a-b}} \left| \frac{\alpha + b}{\alpha_0 + b} \right|^{\frac{b-a}{a-b}} = \frac{\nu_0}{\nu(r)} \dots\dots\dots (50)$$

を導出している⁽¹⁾。ここで a と b は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \left(1 + \frac{4\epsilon}{3} \frac{d(d+2)}{d^2-d-\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \left(1 + \frac{4 \times (4)}{3} \times \frac{3 \times (3+2)}{3^2-3-(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= 1.3929 \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{4\epsilon}{3} \frac{d(d+2)}{d^2-d-\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{4 \times (4)}{3} \times \frac{3 \times (3+2)}{3^2-3-(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= 2.3929 \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

と計算されている。

式(50)から、 $\nu_0 \ll \nu(r)$ となれば α は $\alpha = \alpha^* = 1.3929 \simeq 1.39$ に収束することがわかるが、この1.39という値にも ϵ を0と4に使い分ける操作が含まれている[式(51)参照]。さらに重大な誤りは、式(50)を求めるに当たって用いた式(49)を導出する際に、 $d\chi(r)/dr$ の $\nu(r)$ には式(19)を、また $d\nu(r)/dr$ の $\nu(r)$ には式(28)と全く異なった式を用いていることである。これは、これまで見過ごされていたが、理論的アプローチとしては再考を要する操作である。

支配方程式中の乱流エネルギーは $\lim_{k \rightarrow 0} K(\hat{k}) = \bar{K}$ 、エネルギー散逸率は $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon(\hat{k}) = \bar{\varepsilon}$ として平均値が定義される。また、せん断流の場合には、レイノルズ分解をすると、非線形項から平均成分を含む生成項及び対流項が生じる。従って、これらは変動成分のみからなる支配方程式に次のように付加する。

$$u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} \rightarrow u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + u_i u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} \dots\dots\dots (53)$$

ここで、生成項は

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_i u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \dots\dots\dots (54)$$

となり、また対流項は次式のようになる。

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{U}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \bar{U}_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \dots\dots\dots (55)$$

以上の結果から、次のようなモデル化された $\bar{K}$ -方程式が得られるが、これは随所に指摘したように純粋にRNG理論からモデリングされたとはいえない。

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} = -\bar{\varepsilon} + P_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha^* \nu(\Lambda_S) \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} \right) \dots (56)$$

ここで,

$$P_k = -\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \dots (57)$$

$$\nu(\Lambda_S) = 0.085 \frac{\bar{K}^2}{\bar{\varepsilon}} \dots (58)$$

$$\alpha^* = 1.39 \dots (59)$$

である.

5. ε - 方程式のモデリング

式(1)から ε - 方程式をつくる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} &= 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \\ &\quad - 2\nu_0^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 - 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \dots (60)$$

すると, フーリエ変換の定義

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k} < \Lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \dots (61)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \equiv \varepsilon(\hat{k}) = -\nu_0 \int_{\mathbf{q} < \Lambda_0} q_j (k - q)_j u_i(\hat{q}) u_i(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \dots (62)$$

から波数・周波数空間上での ε - 方程式

$$\begin{aligned} (-i\omega + \chi_0 k^2) \varepsilon(\hat{k}) &= -i\lambda_0 k_i \int_{\mathbf{q} < \Lambda_0} u_i(\hat{q}) \varepsilon(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ &\quad - Y_1(\hat{k}) - Y_2(\hat{k}) \end{aligned} \dots (63)$$

が得られる. ここで, 乱流生成項は

$$\begin{aligned} Y_1(\hat{k}) &= -2i\nu_0 \int_{\mathbf{q} < \Lambda_0} \int_{\mathbf{r} < \Lambda_0} q_j r_j (k - q - r)_l \\ &\quad \times u_i(\hat{q}) u_l(\hat{r}) u_i(\hat{k} - \hat{q} - \hat{r}) \frac{d\hat{r} d\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}} \end{aligned} \dots (64)$$

また, 消散項は

$$Y_2(\hat{k}) = 2\nu_0^2 \int_{\mathbf{q} < \Lambda_0} q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 u_i(\hat{q}) u_i(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \dots (65)$$

で与えられる. なお, 圧力相関項及び揺動力との相関項は, 繰り込みの操作の結果無視出来ることが報告されている⁽²⁾⁽¹⁰⁾. ただし, この ε - 方程式は, 高波数の散逸領域を無視した領域 ($k < \Lambda_0$) で定義されているので, 正確な乱流エネルギー散逸量を記述しているとはいえない.

慣性小領域の高波数側の寄与を低波数成分へ繰り込むために, ε - 方程式についても同様に, $\varepsilon^<$ と $\varepsilon^>$ の2成分に分けて, $\varepsilon^<$ の輸送方程式中に含まれる $\mathbf{u}^>$ 及び $\varepsilon^>$ 成分を消去して, 低波数領域で散逸を評価する.

低波数側へ繰り込んだ後の ε - 方程式は,

$$\begin{aligned} \{ -i\omega + \chi(r)k^2 \} \varepsilon^<(\hat{k}) \\ = -i\lambda_0 k_i \int_{\mathbf{q} < \Lambda_S} u_i^<(\hat{q}) \varepsilon^<(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ - Y_1^<(\hat{k}) - Y_2^<(\hat{k}) \end{aligned} \dots (66)$$

となる. ここで, 拡散係数 $\chi(r)$ は $\bar{K}$ - 方程式の結果と同じ

$$\chi(r) = \alpha^* \nu(\Lambda_S) \dots (67)$$

となり, 全拡散項は

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - u_j \varepsilon \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha^* \nu(\Lambda_S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \dots (68)$$

とモデル化される.

せん断流の場合には, 乱流生成項は $Y_1^<(\hat{k})$ の他に平均速度成分を含む次の3つの項 (T_3, T_4, T_5) が付加される.

$$\begin{aligned} 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} &\rightarrow \underbrace{2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}}_{T_1} + \underbrace{2\nu_0 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}}_{T_3} \\ &\quad + \underbrace{2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}}_{T_4} + \underbrace{2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_i}}_{T_5} \end{aligned} \dots (69)$$

ここで, T_1 は波数空間上(式(64)の $Y_1(\hat{k})$ に対応)での繰り込み操作の結果, 無視できるオーダーになることが報告されている⁽¹⁰⁾.

T_3 は一様性乱流の場合には0となるために無視し, T_4 は

$$\begin{aligned} \bar{T}_4 &= \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \bar{\varepsilon}^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{\bar{K}} \dots (70) \\ C_\mu &= 0.085, \eta_0 = 4.38, \beta = 0.012 \end{aligned}$$

とモデル化される⁽¹¹⁾.

T_5 は $\lim_{\hat{k} \rightarrow 0} Y_5(\hat{k}) = \langle T_5 \rangle$ とした後に, 波数 q を低波数域で評価すると

$$\begin{aligned} \langle T_5 \rangle &= 2\nu_0 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \int_{\mathbf{q} < \Lambda_0} q^2 u_i(\hat{q}) u_j(-\hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ &= 2\nu(\Lambda_S) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \int_{\mathbf{q} < \Lambda_S} q^2 u_i^<(\hat{q}) u_j^<(-\hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \end{aligned} \dots (71)$$

となる. 式(71)のままではモデルとして使えないので, レイノルズ応力を $0 < k < \Lambda_S$ においてエネルギーースベクトルテンソル $E_{ij}(\mathbf{k}) \sim u_i(\hat{k}) u_j(-\hat{k}) \propto k^2$ を仮定し

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \int_{\mathbf{k} < \Lambda_S} u_i(\hat{k}) u_j(-\hat{k}) \frac{d\hat{k}}{(2\pi)^{d+1}} \\ &= \int_{\mathbf{k} < \Lambda_S} A k^2 d\mathbf{k} = \frac{A}{3} \Lambda_S^3 \end{aligned} \dots (72)$$

のように見積もる. そして, そこから得られる関係式

$$A = \frac{3}{\Lambda_S^3} \overline{u_i u_j} \dots\dots\dots (73)$$

を式 (71) に代入すると,

$$\begin{aligned} \langle T_5 \rangle &= 2\nu(\Lambda_S) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \int_{q < \Lambda_S} q^2 u_i^<(q) u_j^<(-q) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ &= 2\nu(\Lambda_S) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \int_{q < \Lambda_S} A q^4 dq \\ &= \frac{6}{5} \nu(\Lambda_S) \Lambda_S^2 \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

となる. さらに, 式 (37), (38) から $\bar{\varepsilon}$ を消去して得られる次式

$$\overline{K} = 10\nu^2(\Lambda_S) \Lambda_S^2 \dots\dots\dots (75)$$

と式 (38) を用いると, 式 (74) は

$$\langle T_5 \rangle = -1.42 P_k \frac{\bar{\varepsilon}}{\overline{K}} \dots\dots\dots (76)$$

とモデル化される.

消散項 $Y_2^<(\hat{k})$ は, $\langle T_2 \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} Y_2^<(\hat{k})$ とした後に, T_5 の場合と同様に低波数域 ($0 < k < \Lambda_S$) で波数ベクトルの積分を行い,

$$\langle T_2 \rangle = 1.68 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\overline{K}} \dots\dots\dots (77)$$

とモデル化されている. しかし, ここで注意すべきは, 式 (77) を求めるにあたり,

$$\langle T_2 \rangle = 4\nu^2(\Lambda_S) \int_0^{\Lambda_S} q^4 E_-(q) dq \dots\dots\dots (78)$$

$$\bar{\varepsilon} \simeq 2\nu(\Lambda_S) \int_0^{\Lambda_S} q^2 E_-(q) dq \dots\dots\dots (79)$$

$$E_-(k) = A k^2 \dots\dots\dots (80)$$

の関係を用いていることである. 極低波数域のスペクトル式 (80) を基に, $\langle T_2 \rangle$, $\bar{\varepsilon}$ を見積もることは, これまでの乱流理論では許されない.

一方, 支配方程式に平均速度成分を付加すると, 非線形項から対流項 $\overline{U}_i \partial \varepsilon / \partial x_i$ が以下のように生ずる.

$$u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + \overline{U}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \dots\dots\dots (81)$$

以上の結果から得られた $\bar{\varepsilon}$ -方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} &= 1.42 P_k \frac{\bar{\varepsilon}}{\overline{K}} - 1.68 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\overline{K}} \\ &+ \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\overline{K}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha^* \nu(\Lambda_S) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (82) \end{aligned}$$

となる. 結果のみから判断すれば, 標準 $\overline{K}-\bar{\varepsilon}$ モデルにかなり近い形が得られているが, 実際その導出過程を上述のように詳細に調べた結果, ε -方程式の場合も繰込み群理論から得られたモデルとは言いがたい.

6. 結 言

Yakhot-Orszag 及び Yakhot-Smith によって発表された繰込み群の方法は, Wilson の ϵ 展開の方法を乱流理論に適用したものではなく, またその計算過程には幾つかの数学的, 物理的な間違いが含まれていることが明らかになった. 今回具体的に判明した問題点を要約すると, 以下ようになる.

- (1) モデル定数等を計算する際に, 同じ式上でパラメータ ϵ に 0 と 4 を使い分けている.
- (2) 彼らの手法は ϵ 展開とは言えない.
- (3) 繰り込んだ後の粘性係数は慣性小領域の成分を連続的に消去したものではなく, 実際は, 一度の操作で全てを繰り込んだのと等価である.
- (4) 乱流エネルギー散逸率 ε を, 波数空間においてその支配領域であるべき散逸領域で取り扱っていない. 本研究の一部は, 文部省科学研究費補助金重点領域研究 (1)(No. 05240103) の援助を受けた. ここに記して謝意を表する.

文 献

- (1) Yakhot, V., and Orszag, S. A., Renormalization Group Analysis of Turbulence, *J. Sci. Comput.* **1**, (1986), 3 - 51.
- (2) Yakhot, V., and Smith, L. M., The Renormalization Group, the ϵ -Expansion and Derivation of Turbulence Models, *J. Sci. Comput.* **7**, (1992), 35 - 61.
- (3) Wilson, K. G., and Kogut, J., The renormalization group and the ϵ expansion, *Phys. Rep.* **12C**, (1974), 77 - 199.
- (4) Ma, S. K., and Mazenko, G., Critical dynamics of ferromagnets in 6- ϵ dimension: General discussion and detailed calculation, *Phys. Rev. B* **11**, (1975), 4077 - 4099.
- (5) Forster, D., Nelson, D., and Stephen, M., Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid, *Phys. Rev. A* **16**, (1977), 732 - 749.
- (6) Carati, D., and Chiriac, K., ϵ expansion in the RNG theory of stirred fluids, *Phys. Fluids A* **5**, (1993), 3023 - 3025.
- (7) Eyink, G. L., The renormalization group method in statistical hydrodynamics, *Phys. Fluids* **6**, (1994), 3063 - 3078.
- (8) McComb, W. D., The Physics of Fluid Turbulence, (1990), Oxford University Press.
- (9) Lam, S. H., On the RNG-theory of turbulence, *Phys. Fluids A* **4**, (1992), 1007 - 1017.
- (10) Smith, L. M., and Reynolds, W. C., On the Yakhot-Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models, *Phys. Fluids A* **4**, (1992), 364 - 390.
- (11) Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski, T. B., and Speziale, C. G., Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Phys. Fluids A* **4**, (1992), 1510 - 1520.