CIP-有限要素法による2次元移流拡散方程式の近似解析*

井出康之^{*1}, 登坂宣好^{*2}Approximation Analysis of Two-Dimensional Advection
Diffusion Equation by CIP-FEM

Yasuyuki IDE and Nobuyoshi TOSAKA

In this paper, a novel and effective numerical solution procedure for solving convection dominated flows is proposed in the context of the finite element method (FEM). The procedure, which we call CIP-FEM, is a combination of the cubic interpolated propagation (CIP) method in the advection phase with FEM in the diffusion phase. Applicability of the method is shown in the comparison of other existing solutions for the rotating cone problem known as a bench mark test in a two-dimensional convective diffusion equation.

Key Words: CIP-FEM, Cubic Interplated Propagation Method, Finite Element Method, Convection-Dominated Flow, Convective Diffusion Equation, Rotating Cone Problem

1. はじめに

コンピュータの発達に伴い流れ問題の数値シミュレーションが活発化し、数値流体力学として体系化され、多様な流れ問題の解析が可能になってきた^{1~2)}。流れ問題の中でも、基本的でかつ実際への適用性の高い問題として非圧縮性粘性流れ問題があり、高レイノルズ数域を対象とした流れ場の解析が多く行われている。

このような流れ場では、移流卓越性に特徴を有することから、その解析に際してはこれまでの近似スキームよりも高精度で安定性に優れた新しいスキームの構築が要求されることになる。このため、差分法や有限要素法等において、これまで、様々なスキームが提案されてきた³⁾。

最近、このようなスキームの中でもCIP(cubic interpolated propagation)法と呼ばれるスキームが構造格子を対象とした差分法の立場から提案され、種々の問題に適用され、その有効性が示されている^{4~7)}。

CIP法は対象とする流れ場の圧縮性、非圧縮性の区別をすることなく、統一的に解析するための手法として開発されたものである。その基本的な特徴は、流れに対する基礎方程式を移流フェイズとそれ以外のフェイズに対する2つの微分

方程式に分離し、特に移流方程式により構成された移流フェイズの近似解を3次スプライン関数によって与えることにより、高精度かつ安定に解くことができることにある。

本論文では、CIP法の有する移流フェイズに対する高精度性と安定性という優れた特徴を、今後ますます必要性が高まることが予想される非構造格子を用いた解法でもとり扱えるようにする目的から、非構造格子での解析が可能な有限要素法の立場からCIP法を改めて考察し、CIP法を非構造格子に対応することのできる解法への拡張を試みる。この新しい手法をCIP-有限要素法(CIP-FEM)⁸⁾として提案し、この手法の原理および解析手順を非圧縮性粘性流れ問題の基礎的なモデルとして知られる2次元の移流拡散問題に適用する。

本論文において、まず最初に、数値計算を行う上で必要となる定式化について示す。さらに、移流卓越流れ問題のベンチマークテストとして知られるrotating cone問題を例題としてとり上げ、得られた数値計算結果について示す。これらの計算結果をもとに、本手法と既往の手法との比較等を行い、移流卓越流れ問題に対する本手法の適用性と有効性についての検討を行う。

2. 移流拡散流れ問題

本論文の目的は前章でも述べたように、移流卓越流れ問題を効果的に解くための新しい数値計算手法を示すことにある。そこで、その最初の段階として、高レイノルズ数粘性流れ問題に対する新しい数値計算スキームを検証する際に採

* 原稿受付 1995年2月20日。

*¹ 正員、日本大学大学院 (〒275 習志野市泉町1-2-1)。*² 正員、日本大学生産工学部。

用されている2次元の移流拡散方程式の初期値-境界値問題に対してCIP-有限要素法を適用する。

解析の対象となる領域を2次元の領域 Ω とし、その境界を Γ とする。さらに、この境界の外向き単位法線ベクトル成分を n_i とする。このような時空間領域 $\Omega \times T$ を設定し、同領域上に未知スカラー関数を $\phi(x_i, t)$ として与える。本論文ではこの未知関数 $\phi(x_i, t)$ に関する次のような移流拡散方程式の初期値-境界値問題について考える。

・移流拡散方程式

$$\dot{\phi} + u_j \phi_{,j} - \kappa \phi_{,jj} = 0 \quad (\text{in } \Omega \times T) \quad (1)$$

・境界条件

$$\phi = \hat{\phi} \quad (\text{on } \Gamma \times T) \quad (2)$$

・初期条件

$$\phi(x_i, 0) = \phi_0(x_i) \equiv \phi_0 \quad (\text{on } \Omega) \quad (3)$$

ただし、記号“ $\dot{}$ ”は時間導関数、“ $_{,i}$ ”は空間導関数とし、 κ は拡散係数、 u_i は既知流速ベクトル、 $\hat{\phi}$ は各境界上の規定値とする。なお、時空間領域の未知関数 $\phi(x_i, t)$ は必要に応じて $\phi, \phi(x_i)$ の略記により表す。また、添字に関しては総和規約を用いるものとする。

3. CIP-有限要素法

3.1 CIP 法概説 本論で提案するCIP-有限要素法の基礎となるCIP法の考え方を非定常移流拡散方程式(1)を用いて概説する。

ここで、CIP法の解法から式(1)を次のような移流フェイズと拡散フェイズに分離する。

・移流フェイズ

$$\dot{\phi} + u_j \phi_{,j} = 0 \quad (4)$$

・拡散フェイズ

$$\dot{\phi} - \kappa \phi_{,jj} = 0 \quad (5)$$

移流フェイズの計算では、まず、移流方程式(4)の解を差分格子点 x_i^0 上で表現するために、次のような3次スプライン関数を用いた近似が行われる。

$$\phi(x_i^1) = \{(A_1 \xi_1 + C_1 \xi_2 + E_1) \xi_1 + G_1 \xi_2 + \phi_1^1\} \xi_1 + \{(B_1 \xi_2 + D_1 \xi_1 + F_1) \xi_2 + \phi_2^1\} \xi_2 + \phi^1 \quad (6)$$

ただし、 ξ_i は $\xi_i = -u_i \Delta t$ とする。また、格子点 x_i^0 は4角形要素内で最も下流にある節点の座標 x_i^1 を起点として反時計まわりに $\alpha = 1 \sim 4$ とした座標とする。 ϕ^1, ϕ_i^1 については、拡散フェイズの計算で求められた $\phi(x_i^1), \phi_i(x_i^1)$ の値を表す。

未知量 $\phi(x_i^1)$ を求めるためには、上記の3次スプライン関数に含まれる ϕ_i^0 と係数 $(A_1 \sim G_1)$ の値を具体的に決定する

必要がある。これらの値を決定するために必要な手順について以下に述べる。

ϕ_i^0 については、式(1)を x_i により微分を行い、 $\phi_i(x_j)$ を未知量とした次の方程式を導くことにより、 ϕ_i^0 が決定される。

$$\dot{\phi}_i + u_j (\phi_i)_{,j} - \kappa (\phi_i)_{,jj} + u_{j,i} \phi_{,j} = 0 \quad (7)$$

ここで、式(7)は基礎方程式の場合と同様に、移流フェイズと拡散フェイズの2つのフェイズに分離され、 $\phi_i(x_j)$ は同時刻を進行する $\phi(x_i)$ と同時に計算される。なお、式(7)から与えられる移流フェイズ、拡散フェイズは次のように表される。

・移流フェイズ

$$\dot{\phi}_i + u_j (\phi_i)_{,j} = 0 \quad (8)$$

・拡散フェイズ

$$\dot{\phi}_i - \kappa (\phi_i)_{,jj} + u_{j,i} \phi_{,j} = 0 \quad (9)$$

なお、上記の移流フェイズでは、式(8)の近似解として $\phi_i(x_i)$ についての次の関数が与えられる。

$$\phi_{,1}(x_i^1) = (3A_1 \xi_1 + 2C_1 \xi_2 + 2E_1) \xi_1 + D_1 \xi_2^2 + G_1 \xi_2 + \phi_{,1}^1 \quad (10)$$

$$\phi_{,2}(x_i^1) = (3B_1 \xi_2 + 2D_1 \xi_1 + 2F_1) \xi_2 + C_1 \xi_1^2 + G_1 \xi_1 + \phi_{,2}^1 \quad (11)$$

係数 $(A_1 \sim G_1)$ の値については $\phi(x_i)$ と $\phi_i(x_j)$ が x_i^1 と他の格子点 x_i^0 との間に成立する連続条件をもとに係数の決定が行われる。例えば x_i^1 上の未知関数 $\phi(x_i^1)$ を求めるために必要な係数について考えた場合、Fig.1に示されるように既知量 ϕ^0, ϕ_i^0 が配置されると関数 $\phi(x_i)$ と偏導関数 $\phi_{,i}(x_j)$ が x_i^1 と他の x_i^0 との間において連続であるとの条件をもとに、各格子点間で係数 $(A_1 \sim G_1)$ を求めるための条件式を前述の式(6),(10),(11)を用いて与える。このとき係数 $(A_1 \sim G_1)$ と同数(7つ)の条件式が導かれ、これらを連立方程式として解くことによって各係数の決定が行われる。なお、この場合、 x_i^0 が構造格子上で配置されていることが効果的に働くことになり、導かれた条件式は結果的に複雑な連立方程式とはならない。よって、係数 $(A_1 \sim G_1)$ は容易に求めることができる。

Fig.1 Continuity conditions on structured grid

式(5), (9)で与えられる拡散フェイズの計算については、一般に差分法が適用され、式(5)の場合は $\phi(x_i)$ を未知量とし

て、式(9)の場合は $\phi_i(x_j)$ を未知量として計算が行われる。得られた未知量は移流フェイズの既知量として用いられ、時間進行する $\phi(x_i)$ の計算が継続的に行われる。

3.2 CIP-有限要素法 本論文で提案するCIP-有限要素法の特徴は、任意な形状を有する解析領域への適用を考慮し、非構造格子による領域分割を前提としている点にある。

移流フェイズの計算については、従来のCIP法と同様に移流方程式の近似解が3次スプライン関数として与えられ、求める未知量の決定が行われる。また、3次スプライン関数に含まれる係数($A_1 \sim G_1$)については前述のように各節点間の連続性を条件として決定が行われる。従来のCIP法の場合では、係数の決定は構造格子のもつ形状の規則性を効果的に用いることにより容易かつ合理的に行われる。

一方、Fig.2に示されるような任意な形状を有する4辺形要素によって分割が行われた場合には各要素で得られる条件式はそれぞれ異なり、各節点で複雑な連立1次方程式が構成される。これらの条件式から直接に各係数を決定する場合には、各節点それぞれにおいて、複雑な行列計算が必要となり計算効率の低下は避けられない。

Fig.2 Continuity conditions on rectangular element

そこで、本論では、 x_i 座標系で表された任意の4辺形要素をFig.3に示されるような正規直交系($0 \leq \eta_i \leq 1$)に写像を行う。この正規直交系上において、係数を求めるために必要な条件式を導くと、得られる条件式は簡単な連立1次方程式により構成されることから、構造格子で行われた場合と同様に各係数の決定は容易に行うことができる。ただし、このような操作により、未知量を含む各種物理量の評価は正規直交系上で行われることになる。そして、これらの計算から求められた同系上の未知量は x_i 座標系に変換され、拡散フェイズでの既知量として用いられる。

Fig.3 Coordinate transformation to orthonormal system

拡散フェイズの計算については、非構造格子への対応から、有限要素法が適用される。このことにより、移流フェイズと拡散フェイズは、同一の節点上で未知量の評価が行われることになり、さらに、対象とする解析領域の形状が任意であ

たとしても物理的に無理のない合理的な方法により境界条件は与えられることになる。

以下において、各フェイズの解析手法について詳しく述べることにする。

3.2.1 移流フェイズの解法 この節では、正規直交系で行われる移流フェイズの計算過程について考える。

まず、移流フェイズで与えられた各種の物理量は、 x_i 座標系と正規直交座標系との間で座標変換が行われることから、両者の間についての関係を表す方程式を導く必要がある。ある注目する要素の座標が x_i^a のとき、 x_i^a と η_i^a について、次の関係式が成立する。

$$x_i = (1-\eta_1)(1-\eta_2)x_i^1 + \eta_1(1-\eta_2)x_i^2 + \eta_1\eta_2x_i^3 + (1-\eta_1)\eta_2x_i^4 \quad (12)$$

式(12)が η_i に関する連立2次方程式であることに注目すると、 η_i を陽的に表す次の関係式が誘導される。

$$\eta_i = \{-\beta_i + (-1)^i \sqrt{(\beta_i)^2 - 4\alpha_i\gamma_i}\} / 2\alpha_i \quad (\alpha_i \neq 0) \quad (13)$$

ここで、 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ の各係数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (-1)^{k+m}(x_j^1 - x_j^l)x_k^m \\ \beta_i &= (-1)^{k+m}x_k^m(x_j - x_j^1) + (-1)^{l+k}(x_j^1 - x_j^2)(x_k^1 - x_k^4) \\ \gamma_i &= (-1)^k(x_j - x_j^1)(x_k^1 - x_k^l) \end{aligned}$$

ただし、 i, j, k, l, m は $i, j = 1 \sim 2, m = 1 \sim 4, k = 3 - i, l = 2i$ とする。なお、 $\alpha_i = 0$ の場合、 η_i は次のように与えられる。

$$\eta_i = -\gamma_i/\beta_i \quad (14)$$

上記の式(12)は正規直交系から x_i 座標系への変換則として、また、式(13)、(14)は x_i 座標系から正規直交系への変換則として用いられる。

移流フェイズでの計算においては正規直交系上で構成される近似解により行われる。このため、未知量 $\phi(\eta_i), \phi_i(\eta_j)$ は具体的に以下のようにして求められる。

与えられたある要素の1つの節点の座標を η_i^1 とし、さらに、拡散フェイズから得られた既知量を $\phi(\eta_i^1)^*, \phi_i(\eta_j^1)^*$ とすると、求める解 $\phi(\eta_i^1)^{n+1}, \phi_i(\eta_j^1)^{n+1}$ は3次スプライン関数を用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi(\eta_i^1)^{n+1} &= \{(A_1'\xi_1 + C_1'\xi_2 + E_1'\xi_1 \\ &\quad + G_1'\xi_2 + \phi_1^1)\xi_1 + \{(B_1'\xi_2 \\ &\quad + D_1'\xi_1 + F_1'\xi_2 + \phi_2^1)\xi_2 + \phi^1\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(\eta_i^1)^{n+1} &= (3A_1'\xi_1 + 2C_1'\xi_2 + 2E_1'\xi_1 \\ &\quad + D_1'\xi_2 + G_1'\xi_2 + \phi_1^1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\eta_i^1)^{n+1} &= (3B_1'\xi_2 + 2D_1'\xi_1 + 2F_1'\xi_2 \\ &\quad + C_1'\xi_1 + G_1'\xi_1 + \phi_2^1) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $A_1' \sim G_1'$ は正規直交系で与えられる3次スプライン関数の係数とする。また、 ξ_i は $\xi_i = -u_i(\eta_j^1)\Delta t$ により与えられ、流速 $u_i(\eta_j)$ については式(13)または式(14)から η_i の時間的变化として求める。なお、ここで与えられている要素は節点 η_i^1 の上流側の要素を流速 $u_i(\eta_j^1)$ をもとに選択された要素である。

上記のことから、いま考えている要素と流速 $u_i(\eta_j^1)$ との関係から、流速 $u_i(\eta_j^1)$ の値は $u_i(\eta_j^1) < 0$ となっている。このことを考慮した上で、関数 $\phi(\eta_i)$ 、 $\phi_i(\eta_j)$ の節点間の連続性を条件として式(15)~(17)から条件式を導き、これを解くことによって、式(15)~(17)の係数($A_1' \sim G_1'$)は次のように求められる。

$$A_1' = 2(\phi^{1*} - \phi^{2*}) + (\phi_{,1}^{2*} + \phi_{,1}^{1*}) \quad (18)$$

$$E_1' = 3(\phi^{2*} - \phi^{1*}) - (\phi_{,1}^{2*} + 2\phi_{,1}^{1*}) \quad (19)$$

$$B_1' = 2(\phi^{1*} - \phi^{4*}) + (\phi_{,2}^{4*} + \phi_{,2}^{1*}) \quad (20)$$

$$F_1' = 3(\phi^{4*} - \phi^{1*}) - (\phi_{,2}^{4*} + 2\phi_{,2}^{1*}) \quad (21)$$

$$C_1' = \phi^{1*} - \phi^{2*} + \phi^{3*} - \phi^{4*} - (\phi_{,1}^{4*} - \phi_{,1}^{1*}) \quad (22)$$

$$D_1' = \phi^{1*} - \phi^{2*} + \phi^{3*} - \phi^{4*} - (\phi_{,2}^{4*} - \phi_{,2}^{1*}) \quad (23)$$

$$G_1' = -\phi^{1*} + \phi^{2*} - \phi^{3*} + \phi^{4*} + (\phi_{,2}^{2*} - \phi_{,2}^{1*}) + (\phi_{,1}^{4*} - \phi_{,1}^{1*}) \quad (24)$$

式(15)~(24)により求められた $\phi(\eta_i)^{n+1}$ 、 $\phi_{,i}(\eta_j)^{n+1}$ は x_i 座標系に変換された上で、拡散フェイズを計算する際の既知量として用いられる。

3.2.2 拡散フェイズの解法 この節では、有限要素法で行われる拡散フェイズの計算過程について考える。対象となる拡散フェイズの式(5)、(9)に対してガラーキン法を適用し離散化を行う。式(5)、(9)に関するテスト関数をそれぞれ $\psi^*(x_i)$ 、 $\sigma^*(x_i)$ とすると、次の弱形式表現が得られる。

$$\int_{\Omega} \dot{\phi} \psi^* d\Omega - \int_{\Gamma} \kappa \phi_{,j} \psi^* n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa \phi_{,j} \psi_{,j}^* d\Omega = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\phi}_{,i}) \sigma^* d\Omega - \int_{\Gamma} \kappa (\phi_{,i})_{,j} \sigma^* n_j d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \kappa (\phi_{,i})_{,j} \sigma_{,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} u_{j,i} (\phi_{,j}) \sigma^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

さらに、要素内の物理量と重み関数は3角形1次要素あるいは双1次要素を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \Phi_{\alpha} \phi_{\alpha} & \psi^* &= \Phi_{\alpha} \psi_{\alpha}^* \\ \phi_{,i} &= \Phi_{\alpha} (\phi_{,i})_{\alpha} & \sigma^* &= \Phi_{\alpha} \sigma_{\alpha}^* \\ u_i &= \Phi^{\alpha} u_i^{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで、未知量 $\phi(x_i)$ 、 $\phi_{,i}(x_j)$ をそれぞれ $\phi(x_i)^*$ 、 $\phi_{,i}(x_j)^*$ とし、移流フェイズから求められた $\phi(x_i)^n$ 、 $\phi_{,i}(x_j)^n$ が既知量として与えられたとすると、式(25)~(27)により次のような有限要素方程式が導かれる。

$$M_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^* = (M_{\alpha\beta} + \Delta t N_{\alpha\beta}^1) \phi_{\beta}^n \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} (\phi_{,i}^*)_{\beta} &= (M_{\alpha\beta} + \Delta t N_{\alpha\beta}^1) (\phi_{,i}^n)_{\beta} \\ &+ \Delta t N_{\alpha\beta}^{2\gamma} (\phi_{,i}^n)_{\beta} u_{\gamma}^* \end{aligned} \quad (29)$$

なお、 $M_{\alpha\beta}$ 、 $N_{\alpha\beta}^1$ 、 $N_{\alpha\beta}^{2\gamma}$ は次のように表される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} d\Omega \quad (30)$$

$$N_{\alpha\beta}^1 = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,j} d\Omega \quad (31)$$

$$N_{\alpha\beta}^{2\gamma} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,j} \Phi^{\gamma} d\Omega \quad (32)$$

ただし、本論文の数値計算に関しては、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ は集中質量行列を用いるものとする。

さらに、式(28)、(29)を全体系の連立1次方程式として構成し、これを解くことにより、未知量 $\phi(x_i)^*$ と $\phi_{,i}(x_j)^*$ が求められる。そして、これらの値は移流フェイズで行われる計算の既知量として用いられる。

3.2.3 CIP-有限要素法の計算手順 ここでは、本手法の計算過程を改めて、その手順に沿って示し、本手法の概要についてまとめる。

まず、本手法では、CIP法と同様に拡散フェイズ、移流フェイズの順に計算が行われ、これを1つのサイクルとして時間進行する未知量の近似が行われる。

拡散フェイズの計算では、式(5)、(9)に対し有限要素法が適用され、未知量が求められる。得られた解を $\phi(x_i)^*$ 、 $\phi_{,i}(x_j)^*$ とすると、これらの解は正規直交系へ座標変換され、移流フェイズの計算で必要となる既知量として用いられる。このときの座標変換は次式により行われる。

$$\phi(\eta_i)^* = \phi(x_i)^* \quad (33)$$

$$\phi_{,i}(\eta_j)^* = \frac{\partial \phi(x_j)^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \quad (34)$$

移流フェイズでは上式より得られた $\phi(\eta_i)^*$ 、 $\phi_{,i}(\eta_j)^*$ をもとに、正規直交系上で3次スプライン関数による移流方程式の近似解が構成され、未知量の決定が行われる。ここで、求められた未知量を $\phi(\eta_i)^{n+1}$ 、 $\phi_{,i}(\eta_j)^{n+1}$ とすると x_i 座標系へは次の式を用いて座標変換が行われる。

$$\phi(x_i)^n = \phi(\eta_i)^{n+1} \quad (35)$$

$$\phi_{,i}(x_j)^n = \frac{\partial \phi(\eta_j)^{n+1}}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \quad (36)$$

上式より得られた $\phi(x_i)^n$ 、 $\phi_{,i}(x_j)^n$ は次の時間進行を行うための計算に必要な既知量として用いられる。

上記の計算手順にしたがい、繰り返し計算することで時間的に変化する移流拡散方程式の解 $\phi(x_i)$ が求められることになる。

4. 数値計算例

提案するCIP-有限要素法の適用性と有効性を検証するために非定常移流拡散方程式のベンチマーク問題として知られている“rotating cone問題”⁹⁾をとりあげる。

この問題の解析モデルをFig.4に示す。このモデルでは正方形の解析領域内で反時計回りの剛体回転を表す移流速度($u_1 = -x_2, u_2 = x_1$)によって流れ場が与えられており、また、関数 ϕ の初期条件には、Fig.5に示されるような $\cos$ 関数で表された紡錘形状の分布が与えられる。さらに、境界条件として全ての境界にディリクレ条件($\phi = 0$)が与えられる。

Fig.4 Analysis model

Fig.5 Initial condition

Fig.6 CIP-FEM ($\kappa = 0$) Fig.7 CIP-FEM ($\kappa = 10^{-6}$)

この例題では、 ϕ の初期形状が与えられた剛体回転する流れ場のもとでどのように変化していくのかが明らかにされる。ここで $\kappa = 0$ のとき、すなわち移流拡散方程式の移流効果のみが ϕ の変化に作用する場合には、 ϕ は初期形状のまま剛体回転することになる。さらに κ が非常に小さい場合、す

なわち移流卓越流れの場合でも、前述と同様な移流的な解が得られることになる。したがって、本例題では移流卓越流れに対する近似スキームの精度や安定性が得られた関数 ϕ の形状をもとに判定されることになる。

与えられた解析領域を 50×50 により等分割し、時間増分(Δt)を $1/200$ 、計算ステップ数を628とした場合の、本手法による計算結果をFig.6, 7に示す。ただし、このときのクーラン数は $c = 0.25$ となる。これらの図から明らかなように、計算結果は初期形状を維持したまま安定に計算が行われたことを示している。また、初期条件で与えられた ϕ の最大値(1.0)に対して、得られた数値解の最大値は $\kappa = 0, 10^{-6}$ の場合共に0.95となっており、計算精度に関しても十分に良好であることが確認される。

さらに、本手法の非構造格子土での妥当性を確認するために、Fig.8に示される過度に不規則な形状の要素によって分割された解析領域¹⁰⁾での計算結果をFig.9に示す。このときの節点数は1661であり、時間増分は $1/200$ とし、計算ステップ数157とする。また、 κ は $\kappa = 10^{-6}$ とする。その比較として領域を 40×40 に等分割した場合の計算結果をFig.10に示す。Fig.9とFig.10を比べると、節点数に大差がないが、等分割された計算結果に比べ、任意な要素による分割がなされた計算結果では計算精度が若干低下していることが確認される。

これは任意な分割が行われた領域内には大きさや形状の

Fig.8 Analysis domain by unstructured grid

Fig.9 CIP-FEM (unstructured grid)

Fig.10 CIP-FEM (structured grid)

異なる要素が混在し、中には、他の要素に比べ、比較的大きく、鋭角的な形状を有するような要素も存在する。このような要素の場合、各要素で行われる物理量の補間が正方形によるそれに比べると困難となり、このことが計算精度の低下を招く原因になっていることが考えられる。このようなことから、任意な要素による分割が必要な場合、できるだけ形状が正方形に近く、必要とする箇所には細部にわたって分割することが必要となる。

なお、不等分割、等分割の数値解の最大値はそれぞれ、0.97、0.98となっている。また、Fig.9では作図の関係から 50×50 に等分割された格子点上で ϕ の分布が再配置されている。

次に、領域の分割を 50×50 による等分割とし、時間増分を $1/2000$ 、計算ステップを1570、 κ を $\kappa = 10^{-6}$ とした計算結果から、本手法と従来のガラキン型有限要素法との比較を示す。ここで示されるガラキン型有限要素法については、質量行列を集中質量行列を用いるものとし、時間積分に関しては予測子・修正子法と3次Adams-Bashforth法が適用されている。これらの得られた数値計算結果をFig.11, 12に示す。ただし、このときのクーラン数は $c = 0.025$ となる。なお、同じ条件による本手法の計算結果をFig.13に示す。Fig.11~13から通常のガラキン型の有限要素法による計算結果では、 ϕ の形状の後方において振動を伴った波状の分布が発生している様子が確認される。一方、本手法の計算結果では、それらの発生もなく安定している様子が確認できる。なお、このときの ϕ の最大値は、本手法では、0.98、予測子・修正子法では0.98、3次Adams-Bashforth法では1.00となった。

なお、本論文では図として示していないが、SU/PG有限要素法⁹⁾との比較でも、本手法による計算結果は、精度および安定性に関して良好であることも付け加えておく。

以上のような比較から、本手法が精度の良い安定した計算手法であることが確認できた。

5. おわりに

本論では、非構造格子上的での解析を前提とするCIP-有限要素法を提案した。この手法を2次元移流拡散方程式のベンチマーク問題として知られているrotating cone問題に適用し、得られた計算結果を示した。得られた計算結果から、本手法が非構造格子上の解析において有効であり、求められる解はガラキン型有限要素法における手法(予測子・修正子法、3次Adams-Bashforth法)と比べ、高精度で安定していることが確認された。これらのことから、移流卓越流れ問題に対する本手法の適用性と有効性が示されたものと思われる。今後は高レイノルズ数粘性流れ問題への拡張と適用について報告したい。

参考文献

1) 登坂宣好, 大西和榮: 偏微分方程式の数値シミュレーション, 東京大学出版会, 1991

Fig.11 Predictor corrector method ($\kappa = 10^{-6}$)

Fig.12 Adams-Bashforth method ($\kappa = 10^{-6}$)

Fig.13 CIP-FEM ($\kappa = 10^{-6}$)

- 2) 保原 充, 大宮司久明 編: 数値流体力学, 東京大学出版会, 1992
- 3) 棚橋隆彦: 計算流体力学, アイピーシー, 1994
- 4) T.Yabe and T.Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, Computer Physics Communications Vol.66, 1991, 219-232
- 5) T.Yabe and T.Aoki: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three-dimensional solvers, Computer Physics Communications, Vol.66, 1991, 233-242
- 6) 矢部 孝, 観山正見, 桃島成治: パソコンによるシミュレーション物理, 朝倉書店, 1992
- 7) 矢部 孝: 汎用数値計算法CIP法の可能性, 第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1994, 65-68
- 8) 井出康之, 登坂宣好: CIP有限要素法による移流拡散方程式の近似解析, 第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1994, 673-676
- 9) T.J.R.Hughes and A.Brooks: A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions, Application to the streamline-upwind procedure, Finite Elements in Fluids, Vol.4, 1982, 47-65
- 10) 谷口健男: FEMのための要素自動分割, 森北出版, 1992 講演論文集, 1994, 673-676