双対空間を用いた Hybrid 型上流化有限要素法* (第4報, 高 Rayleigh 数自然対流問題によるスキームの検証)

稲田 英一^{*1}, 山下 克典^{*2}, 棚橋 隆彦^{*3}

New Hybrid-Streamline-Upwind Finite-Element Method in a Dual Space (4th Report, Natural Convection at High Rayleigh Numbers)

Eiichi INADA, Katsunori YAMASHITA and Takahiko TANAHASHI

In the present paper, unsteady natural convection flows of air in a square cavity with differentially heated walls are investigated numerically using the hybrid GSMAC (generalized and simplified marker and cell) finite element method. A direct numerical simulation of two dimensional turbulence is shown in the present paper without introducing any random forces. The present result at $Ra=1.0 \times 10^8$ is compared with the other numerical results. The present result of calculation is in good agreement with that of the others. This study allows us to say that the hybrid-GSMAC method suggested by Tanahashi is clarified. In addition, selected frames from an animation generated from the computational results at $Ra=1.0 \times 10^9$ show very clearly the formation of large scale eddies via the following sequence: initial instability, proceeding through transition, and eventually the statistical steady state. Using this method, it is possible to investigate natural convection and heat transfer phenomena at high Rayleigh numbers up to 10^{10} .

Key Words: Natural Convection, High Rayleigh Number, Hybrid GSMAC, Square Cavity, Dual Space

1. 緒言

近年の電子計算機および数値流体力学の発展により、熱流体を含むより複雑な流れの現象が数値的に解析されるようになってきた。その中で、正方形キャビティ内の自然対流の解析は、形状および境界条件の単純さなどから、熱流体問題に関する計算スキームの妥当性を検討するためのベンチマーク問題として位置づけられている。したがって、スキーム検証のためにこの問題は、これまで多くの研究者によって解析されてきた。これらの解析のほとんどは、Rayleigh 数が $10^6 \sim 10^8$ までの流れを対象としている^{(1)~(3)}。そして、その解析結果はいずれもよく一致している。しかし、それ以上の高 Rayleigh 数では、流れが不安定で解析例も少ない⁽⁴⁾。そして、層流から乱流への遷移過程も未だ明らかにされていない。その理由は、高 Rayleigh 数の流れ⁽⁵⁾では、強制対流の高 Reynolds 数の流れと同じように、対流項の強い非線形性により数値的な発散や振動が生じ、解

析をしばしば困難にするためである。このような高 Rayleigh 数の流れでは、高精度の実験も困難である。よって、精密な数値解析と実験による比較検討が必要と思われる。高 Rayleigh 数の自然対流に非圧縮性流体の解法を適用した場合、数値解の精度および安定性は、運動方程式よりもエネルギー方程式に支配されることが多い。したがって、高 Rayleigh 数で安定かつ高精度な数値解析スキームの開発が必要不可欠である。

前報^{(6)~(8)}では、双対空間を用いた Hybrid 型上流化有限要素法の有効性を 2 次元移流拡散方程式により検証した。その結果、重み関数の上流化と補間関数の高精度化を同時に行うことにより、2 次元の高 Peclet 数流れに対して安定かつ高精度に解析を行うことができた。本論文では、より実用的な問題として、この双対空間を用いた Hybrid 型上流化有限要素法をエネルギー方程式に導入することにより、高 Rayleigh 数自然対流問題に適した数値解析手法を構築する。また、得られた数値解を他者の上流化法の結果と比較することにより、数値解析結果の精度について検討を行う。そして、この手法を用いて、Rayleigh 数が 10^{10} の流れを DNS により解析することを目的とする。

* 原稿受付 1995 年 7 月 25 日。

^{*1} 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

^{*2} 日本電信電話(株) (〒108-19 東京都港区港南 1-9-1)。

^{*3} 正員、慶應義塾大学理工学部。

主な記号

Gr	: Grashof 数 ($=g\beta\Delta TL_r^3/\nu^2$)
g	: 重力加速度
H	: Bernoulli 関数
J_i	: Jacobian の要素平均値
$K_{i,j}$	: 移流拡散行列
L_r	: 代表長さ
L_s	: 補間関数 (上流化形状関数)
L_w	: 重み関数 (随伴上流化形状関数)
$M_{i,j}$	: 質量行列
Nu	: Nusselt 数
Pr	: Prandtl 数 ($=\nu/\alpha$)
Ra	: Rayleigh 数 ($=Gr \cdot Pr$)
T	: 無次元温度
$\mathbf{u}$	: 無次元流速ベクトル
α	: 温度伝導率
β	: 体膨張係数
ΔL_{min}	: 最小格子幅
Δt	: 時間刻み幅
ε	: 収束判定基準
λ	: x 方向セル Peclet 数の半値
μ	: y 方向セル Peclet 数の半値
ν	: 動粘性係数
ϕ	: 修正速度ポテンシャル
ω	: 無次元渦度ベクトル

添字

α, β	: 要素内節点番号
$\langle \quad \rangle_i$	: 要素平均値

2. 基礎方程式

この章では時間前進のアルゴリズムと双対空間を用いた Hybrid 型上流化有限要素法について述べる。

2.1 時間前進のアルゴリズム 基礎方程式には, Boussinesq 近似を用いた連続の方程式, Navier-Stokes 方程式およびエネルギー方程式を用いる。以下に無次元化された基礎方程式系を示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Gr} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Gr} T \mathbf{e} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Ra} \nabla^2 T \quad (3)$$

ここで, $\mathbf{e}$ は重力方向の単位ベクトルで, $e_1 = 0, e_2 = -1$ である。また, 代表流速は浮力と粘性力のつり合いから定めている。

本論文では時間前進法として GSMAC 法⁽³⁾のアルゴリズムを用いる。つまり, 式 (2) を流速について陽的に,

Bernoulli 関数については陰的に離散化し, 時刻 $(n+1)\Delta t$ での流体の非圧縮性を考慮した同時緩和法⁽⁵⁾を適用する。以下に GSMAC 法により離散化された支配方程式を示す。

- 予測子ステップ ($\mathbf{u}^n, H^n$ and T^n は既知)

$$\omega^n = \nabla \times \mathbf{u}^n \quad (4)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + \mathbf{u}^n \times \omega^n + \frac{1}{Gr} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + T^n \mathbf{e}) \quad (5)$$

- 同時緩和と反復 ($\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}, H^{(0)} = H^n$ を初期値とする)

$$\nabla^2 \phi^{(m)} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (6)$$

$$H^{(m+1)} = H^{(m)} + \phi^{(m)} / \Delta t \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(m+1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(m)} - \nabla \phi^{(m)} \quad (8)$$

- エネルギー方程式

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) T^n + \frac{1}{Ra} \nabla^2 T^n \quad (9)$$

ただし, 上添え字 n と m はそれぞれ時間ステップ数と, 修正子の反復レベルを示す。また, 本スキームの時間前進アルゴリズムを以下に示す。

step 1) 式 (4),(5) から流速の予測値 $\tilde{\mathbf{u}}$ を陽的に求める。

step 2) 流速の予測値から膨張速度 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ を求める。

step 3) 式 (6) から修正速度ポテンシャル ϕ を求める。

step 4) 式 (7),(8) で Bernoulli 関数と流速を補正する。

step 5) 非圧縮条件を満たすまで step 2 から step 4 を反復した後に, $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{(m+1)}, H^{n+1} = H^{(m+1)}$ とする。

step 6) 式 (9) から T^{n+1} を陽的に求め時間前進する。

2.2 Hybrid 型上流化有限要素法による定式化 式 (4)~(8) については, Galerkin 法による定式化を行う。ただし, 定式化には離散化ナブラ演算子⁽⁶⁾を導入することにより, 表記の簡便化と計算容量の低減を図っている。式 (9) については, Hybrid 型上流化有限要素法を用いて定式化する。ここでは, 式 (9) の定式化のみを述べる。

エネルギー方程式 (3) に重み関数 L_w を乗じて要素内積分を行い, 移流を表す流速ベクトルについては

$$u = \langle u \rangle, \quad v = \langle v \rangle, \quad (10)$$

と要素内で平均化する。 T については, 上流化形状関数 L_s を用いて

$$T = L_s T_i \quad (11)$$

と補間する。ここで、添字 α は和の規約に従うものとする。さらに、重み関数は随伴上流化形状関数 L_α^* を用いて

$$\delta T^* = L_\alpha^* \delta T_\alpha \quad (12)$$

と表す。

ここで、 L_α は、局所線形化された定常移流拡散方程式の厳密解から得られる上流化形状関数である。また、 L_α^* は、形状関数 L_α の随伴空間より求められた随伴上流化形状関数であり以下の式で示される。

$$L_\alpha(\lambda, \mu) = L_\alpha^*(-\lambda, -\mu) \quad (13)$$

したがって、離散化されたエネルギー方程式は以下のようになる。

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \frac{T_{\alpha\beta}^{n+1} - T_{\alpha\beta}^n}{\Delta t} + K_{\alpha\beta}^x T_{\alpha\beta}^n + K_{\alpha\beta}^y T_{\alpha\beta}^n = 0 \quad (14)$$

$$\overline{M}_{\alpha\beta} = \int L_\alpha^* L_\beta d\Omega \approx J_\alpha \delta_{\alpha\beta} = \frac{S_\alpha}{4} \delta_{\alpha\beta} \quad (15)$$

$$K_{\alpha\beta}^x = \int \left(\langle u \rangle_\alpha L_\alpha^* + \frac{1}{Ra} \frac{\partial L_\alpha^*}{\partial x} \right) \frac{\partial L_\beta}{\partial x} d\Omega \quad (16)$$

$$K_{\alpha\beta}^y = \int \left(\langle v \rangle_\alpha L_\alpha^* + \frac{1}{Ra} \frac{\partial L_\alpha^*}{\partial y} \right) \frac{\partial L_\beta}{\partial y} d\Omega \quad (17)$$

ただし、 $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタである。実際に物理空間 (x, y) から計算空間 (ξ, η) へ変換する際に、質量行列は行と列で二重に質量が集中化され、移流拡散行列 $K_{\alpha\beta}^x$ と $K_{\alpha\beta}^y$ はそれぞれ x 方向、 y 方向が上流化されている。すなわち、 x 方向のみ上流化する場合、

$$L_\alpha = \frac{\xi_\alpha (\epsilon^{\lambda\xi} - \epsilon^{-\lambda\xi})}{\epsilon^\lambda - \epsilon^{-\lambda}} \cdot \frac{1}{2} (1 + \eta, \eta) \quad (18)$$

y 方向のみ上流化する場合、

$$L_\alpha = \frac{1}{2} (1 + \xi, \xi) \cdot \frac{\eta_\alpha (\epsilon^{\mu\eta} - \epsilon^{-\mu\eta})}{\epsilon^\mu - \epsilon^{-\mu}} \quad (19)$$

を用いる。格子が直交している場合、物理空間と計算空間の座標軸は一致するため移流拡散行列は近似的に、

$$K_{\alpha\beta}^x = \frac{\Delta y u_\alpha \xi_\beta \epsilon^{\lambda\xi}}{8 \sinh \lambda} \quad (20)$$

$$K_{\alpha\beta}^y = \frac{\Delta x v_\alpha \eta_\beta \epsilon^{\mu\eta}}{8 \sinh \mu} \quad (21)$$

と求まる。ただし、セル Peclet 数が零、もしくは正負の無限大のときは解の発散が起こる。また、解が発散しなくても桁の大きな計算は計算時間が増大するため望ましくない。そこで、実際の計算では極限値の近似式(8)を指数関数部分に用いることにより計算効率の低下を防いでいる。

3. モデルの設定および計算条件

解析モデルおよび境界条件を Fig.1 に示す。また、初期条件として、速度・圧力に関しては全領域で $u = v = 0$ 、 $H = 0$ 、温度に関しては高温壁面 ($T = 1$) を除き $T = 0$ とする。作動流体は空気、 $Pr = 0.71$ とする。また、高温壁と低温壁の平均 Nusselt 数の差が 10^{-2} 以下となった状態を定常状態と判断した。なお、平均 Nusselt 数は以下の式で定義される。

$$\overline{Nu}_{av} = \int_0 \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} dx \quad (22)$$

計算条件を Tab.1 に示す。また、計算に用いた計算格子を Fig.2 に示す。Rayleigh 数が高くなるに従って細かい格子を用いる必要がある。ただし、 $Ra = 10^6$ で用いた計算格子は 20×20 等分割格子のため掲載は省略する。正方形キャビティの場合不等分割度 a とすると、不等分割を決定する関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon^{ax} - 1}{\epsilon^a - 1} & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon^{a(1-x)} - 1}{\epsilon^a - 1} & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (23)$$

となる。本論文では不等分割度は $a = 2$ としている。

Tab.1 Numerical conditions

Ra	10^6	10^8	10^9	10^{10}
Pr	0.71	0.71	0.71	0.71
Δt	100	50	50	50
Mesh size	20×20	50×50	80×80	200×200
$\Delta L_{\min}$	5.0×10^{-2}	4.7×10^{-3}	4.0×10^{-4}	1.58×10^{-5}
ε	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-8}	1.0×10^{-9}	1.0×10^{-9}

Fig.1 Flow geometry and coordinate system

Fig.2 Finite element meshes

Fig.3 Comparison of isotherms and streamlines at steady state ($Ra = 10^6, \Delta T = 0.1, \Delta\psi = 1.0 \times 10^{-6}$)
(up : Hybrid, down : GSMAC)

Fig.4 Temperature distributions and streamlines at $Ra = 10^8$ ($\Delta\psi = 1.0 \times 10^{-7}$)

$t = 1.0 \times 10^5$

$t = 5.0 \times 10^5$

$t = 20.0 \times 10^5$

$t = 16.0 \times 10^5$

$t = 150.0 \times 10^5$

$t = 75.0 \times 10^5$

Fig.5 Temperature distributions in transient states($Ra = 10^9$, $Pr = 0.71$)

Fig.6 Temperature distributions in transient states($Ra = 10^{10}$, $Pr = 0.71$)

 $t = 1.0 \times 10^5$

 $t = 5.0 \times 10^5$

 $t = 20.0 \times 10^5$

 $t = 16.0 \times 10^5$

 $t = 150.0 \times 10^5$

 $t = 75.0 \times 10^5$

Fig.7 Streamlines in transient states
 $(Ra = 10^9, Pr = 0.71, \Delta\psi = 3.0 \times 10^{-8})$

Fig.8 Streamlines in transient states
 $(Ra = 10^{10}, Pr = 0.71, \Delta\psi = 1.0 \times 10^{-8})$

4. 解析結果および検討

4.1 $Ra = 10^6$ 流れの計算結果 まず, 本スキームの有効性を確認するために $Ra = 10^6$ で従来の GSMAC 有限要素法⁽⁹⁾による解析結果との比較を行った。そのときの係数行列のデータ容量および計算時の記憶容量を Tab.2 に示す。従来のスキームよりも係数行列のデータ容量は 75.6%, 計算時の記憶容量は 12.0% 削減できた。このことより, エネルギー方程式に現れる巨大な係数行列が削減でき, 有限要素法による実用的な非圧縮性流れ問題への適応が可能となった。

Tab.2 Comparison of computer memories at $Ra = 10^6$

	Data Size(bytes)	Memory Size(Mbytes)
Present	394750	1.248
GSMAC	1622812	1.344

$Ra = 10^6$ での等温線図および流線図を Fig.3 に示す。定性的にスキームの違いによる解への影響はなく, 両者は良好に一致している。どちらも解の振動, 発散もなく安定に解を求めることができた。

4.2 $Ra = 10^8$ 流れの計算結果 次に, 比較的解析結果の多い $Ra = 10^8$ で解析を行った。50 × 50 要素という比較的粗い計算格子を用いても, Hybrid 型上流化有限要素法では数値振動は現れず, 安定に解を求めることができた。一方, 既存の GSMAC 法を用いて同様の計算格子で解析を行うと解が発散し, 時間刻み幅を 10 分の 1 まで細かくしても結局解は得られなかった。このことから, Hybrid 型上流化有限要素法は局所厳密解を用いているため空間に対して安定かつ高精度であることが確認できる。

Tab.3 Comparison of numerical results at $Ra = 10^8$

	U_{max} x_2	V_{max} x_1	Nu_{av}	Nu_{max} x_2	Nu_{min} x_2
Present (DS-FEM)	269.7 0.9413	2039 0.0138	28.60	74.40 0.013	1.950 1.000
Kakuda & Tosaka ⁽⁹⁾	306.5 0.9381	2036 0.0116	30.40	66.24 0.0231	1.510 1.000
Okanaga ⁽³⁾	320.7 0.9240	2221 0.0136	30.06	84.93 0.0100	1.904 1.000
Mizukami ⁽¹⁰⁾			28.93		
Markatos & Pericleous ⁽¹¹⁾	514.3 0.9410	1812 0.0135	32.04	61.06 0.0075	5.224 0.097

定常状態における流線および温度分布図 (Fig.4) から, 他の文献^{(2)~(4)}と同様に高温壁上部と低温壁下部に 2 次渦が発生している様子がわかる。Tab.3 に他者との中心軸上の速度の最大値, 局所 Nusselt 数の最大値と最小値の比較を示す。また, 定常状態での平均 Nusselt 数の値を他の結果と比較してみると, 良好に一致し本スキームの有効性が確認できる。

4.3 $Ra = 10^9$ と 10^{10} 流れの計算結果 次に, 一般的に乱流領域といわれる $Ra = 10^9$, 10^{10} の解析を行った。本論文は二次元計算であるので, 計算結果は三次元現象の中央近傍の空間平均の近似と考えている。文献⁽⁴⁾より正方形キャビティ内における温度境界層の厚さは

$$\delta \approx \left(\frac{2}{Pr Ra} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (24)$$

で近似できるため, 要素分割の際には最小格子幅を Tab.1 のように決定した。

$Ra = 10^9$ での温度分布図 (Fig.5) を見ると, 定性的には $Ra = 10^8$ の場合と同様である。すなわち, 高温壁で生じた渦が上壁を移動し低温壁に到達する。その後高温場が上から下へ容器全体に広がっていく。しかし, 発生渦の挙動は $Ra = 10^8$ よりも複雑で, 最初, 層流境界層内に発生した不安定な波打ちが, 対流による上昇を続けるうちに次第に成長し, やがて渦を形成しつつ発達し, その渦もついには崩壊して乱流に移行する。流線図 (Fig.6) を見ると, 無次元時間 $t = 20.0 \cdot 10^5$ 付近から高温壁面下部で複数の細かい渦が生じており, この現象は $Ra = 10^8$ 以下の解析では見られない。この原因として, 対流項の強い非線形性のために生じる高波数の大小様々な渦の影響が考えられる。

$Ra = 10^{10}$ における温度分布図 (Fig.7), 流線図 (Fig.8) を見ると, 過渡状態における挙動は $Ra = 10^9$ 解析時と定性的には変わらないが, 高温壁面下部での細かい渦が初期の段階から見られる。この渦は Paolucci⁽⁴⁾の解析でも現れており, 本スキームの有効性が確認できる。各 Ra 数での平均 Nusselt 数の時間変化の様子を Fig.9 に示す。 $Ra = 10^8$ では定常状態へなだらかに近づいているのに対して, $Ra = 10^9$ と 10^{10} の場合には $t = 5.0 \cdot 10^5$ 付近でオーバーシュートがみられる。この時の温度分布図, 流線図を見ると高温壁で発生した渦が上壁に衝突している。すなわち, $Ra = 10^9$ 以上になると, 強い浮力の影響で境界層内に乱れが生じ, 上昇流の上壁面への衝突が境界層内の流れをさらに攪乱しているために起こる現象と考えられる。

各 Rayleigh 数における高温壁面の平均 Nusselt 数を Fig.10 に示す。一般に, 高温壁面の平均 Nusselt 数は Rayleigh 数の 1/4 乗に比例することが知られている。

Fig.9 Time dependent of mean Nusselt numbers

Fig.10 Correlation of heat transfer coefficient

本解析において関係式を求めると、

$$\overline{Nu_{av}} = 0.286 Ra^{\frac{1}{4}} \quad (25)$$

となり、他の数値解析結果とも良好に一致している。Hybrid 型上流化有限要素法を用いた本スキームでは、 $Ra = 10^{10}$ までは数値的な振動および発散は現れず、解を安定に求めることができた。

5. 結言

本論文においては、Navier-Stokes 方程式に離散化ナブラ演算子を、エネルギー方程式に Hybrid 型上流化有限要素法を導入した。そして、正方形キャビティ内の高 Rayleigh 数自然対流問題を解き、その数値解の精度等について検討を行った。数値計算例として、 $Ra = 10^6 \sim 10^{10}$ 流れの解析を行ない以下の結言を得た。

$Ra = 10^6$ 流れでは計算効率に着目し、本スキームによる計算容量の低減化について調べた。その結果、移流拡散行列を用いた定式化が、従来の定式化よりも係数行列のデータ容量については 75.6%、計算時の

記憶容量については 12.0%削減できることがわかった。これは、本スキームの定式化が実用的な非圧縮流れ問題の解析に適していることを示している。 $Ra = 10^8$ 流れでは、他の数値解析結果との比較を行い、本スキームの有効性を示した。また、 $Ra = 10^9, 10^{10}$ での解析においても速度場と温度場の連成した複雑な過渡現象を安定に捉えることができた。特に、 $Ra = 10^{10}$ の自然対流では、他者の結果と定性的に一致した。以上のことから、高 Rayleigh 数自然対流問題の解析に対して双対空間有限要素法を導入することにより、有用かつ安定な高精度のスキームが構築できた。

参考文献

- (1) De vaul Davis, *Int. J. Num. Meths. Fluids*,3(1983),249.
- (2) 川原・他2名, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1992), 423.
- (3) 岡永, 慶應義塾大学博士論文, (1989).
- (4) Paolucci, S., *J. Fluid Mech.*, **215**(1990),229.
- (5) 加藤・棚橋, 機論,58-551,B(1991), 160.
- (6) 棚橋・沖, 機論,59-568,B(1993), 3823.
- (7) 沖・棚橋, 機論,60-573,B(1994), 1639.
- (8) 池田・棚橋, 機論,60-578,B(1994), 3311.
- (9) 角田・他2名, 機論,59-564,B(1993),123.
- (10) 水上, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集,16, (1992),433.
- (11) Markatos,N.C.et al.,*Int. J. Heat Mass Transf.*,27(1984),755.