壁面漸近型 $k-\tilde{\varepsilon}$ モデルの再構築*川 島 紀 英^{*1}, 河 村 洋^{*2}Reconstruction of $k-\tilde{\varepsilon}$ Model
with Relevance to the Wall-Asymptotic Behavior

Norifusa KAWASHIMA and Hiroshi KAWAMURA

The $k-\varepsilon$ model has become the most popular of the turbulence models and is often used in many calculations of flow of practical interest. Various low Reynolds number $k-\varepsilon$ models have been proposed; however, they are not able to correctly represent the budget of the turbulent energy equation near the wall. This paper presents an improved two-equation model with a correct asymptotic near-wall behavior. A new equation of $\tilde{\varepsilon}$ [$=\varepsilon-2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$] is proposed instead of the conventional one for ε itself. Moreover, the pressure diffusion π^* is introduced in the k equation and a new term $-\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}/k$ is employed in the $\tilde{\varepsilon}$ equation. The improved model is tested against the channel flow, the pipe flow and the channel flow with injection and suction on wall surfaces. The results are compared with the ones obtained by direct numerical simulation (DNS). It is found that the present model reproduces well the turbulent quantities obtained by the DNS.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Turbulent Flow, Near-Wall Modeling, $k-\varepsilon$ Model

1. 緒 言

壁面まで適用できるいわゆる“低レイノルズ数型” $k-\varepsilon$ 乱流モデルとしては, Jones-Launder⁽¹⁾(JL)以来種々のモデルが提案されてきた。この種のモデルにおける問題の一つとして, 乱流エネルギーの散逸率 ε の壁面上での取扱い方があげられる。最近のDNS⁽²⁾⁽³⁾の結果より, 壁面上での散逸率は零でないことが示されている。現在, 散逸率の壁面境界条件を与える方法は二つある。

(A) 壁面上で値を与える場合

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \quad (y=0) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ただし

$$\tilde{\varepsilon} = 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$$

(B) 壁面上で零とし, 壁面上の散逸率 $\tilde{\varepsilon}$ を加える場合

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \tilde{\varepsilon} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ただし

$$\varepsilon^* = 0 \quad (y=0)$$

Lam-Bremhorst⁽⁴⁾(LB), Myong-Kasagi⁽⁵⁾(MK)およびNagano-Tagawa⁽⁶⁾等のモデルはタイプAに属し, 一方Jones-Launder⁽¹⁾, Launder-Sharma⁽⁷⁾(LS)およびNagano-Hishida⁽⁸⁾等のモデルはタイプBに属する。

乱流諸量を壁垂直方向にテイラー級数展開した場合, 乱流エネルギー k , 散逸率 ε および乱流エネルギー方程式の粘性拡散項 D_k は以下のように表すことができる。

$$k = by^2 + cy^3 + dy^4 + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\varepsilon = 2\nu b + 4\nu cy + \nu d_e y^2 + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$D_k = 2\nu b + 6\nu cy + 12\nu d_e y^2 + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

一般に $k-\varepsilon$ モデルにおいて, 渦粘性係数 ν_t は式(6)で与えられる。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここで f_μ は壁面近傍の乱流の非等方性を表すためのモデル関数である。壁面近傍において渦粘性係数は $\nu_t \sim y^3$ であるので, タイプAの f_μ は $f_\mu \sim y^{-1}$ となり, 壁面で無限大の値をとらざるを得ない。この境界条件は, 数値計算の不安定を引き起こす原因の一つと考えられている。

一方, タイプBの境界条件は, 数値収束性がよいといわれる。Jones-Launder⁽¹⁾は乱流エネルギー方程式

* 原稿受付 1995年8月4日。

^{*1} 正員, 東京理科大学大学院 (〒278 野田市山崎2641)。

^{*2} 正員, 東京理科大学理工学部。

と渦粘性係数を以下のように表した。

$$Dk/Dt = D_k + T_k + P_k - (\varepsilon^* + \bar{\varepsilon}) \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon^* \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$\bar{\varepsilon}$ は式(9)のようにテイラー級数展開される。

$$\bar{\varepsilon} = 2\nu b + 4\nu cy + \nu d_\varepsilon^2 y^2 + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

壁面近傍における乱流エネルギー方程式の各項のバランスを考えると、生成項 P_k と乱流拡散項 T_k は $P_k \simeq y^3$, $T_k \simeq y^3$ と他項と比べて小さくなるので無視し、また十分発達した定常乱流を考えると $Dk/Dt = 0$ である。したがって、壁面近傍では、粘性拡散項 D_k と散逸項 $(\varepsilon^* + \bar{\varepsilon})$ がバランスしなければならない。このとき ε^* の漸近挙動を示す式(10)が成り立ち、

$$\varepsilon^* = D_k - \bar{\varepsilon} = 2\nu cy + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

係数 c は正の値でなければならない。他方、係数 c は以下のように ε の1階微分より求められる。

$$d\varepsilon/dy = 4\nu c + \cdots \quad (y \rightarrow 0) \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

しかし、チャンネル内乱流のDNS⁽³⁾ データによれば

$$d\varepsilon/dy < 0 \quad (y \rightarrow 0) \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

であり、これは係数 c は実際には負値であることを意味している。すなわち、タイプBの今まで用いられてきたモデルでは、DNS⁽³⁾ の結果と矛盾することになる。

この矛盾は乱流エネルギー方程式中の圧力拡散項 π_k^* を一般に無視してきたためである。圧力拡散項の壁面漸近挙動は式(13)のように表される⁽³⁾。

$$\pi_k^* = -2\nu cy + \cdots \quad (y \rightarrow 0) \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

この圧力拡散項を導入することによって、式(4)と式(5)の $O(y)$ の項の間に生ずる $2\nu cy$ のアンバランスを補正することができる。これまで一般に、圧力拡散項は、乱流拡散項と一緒にモデル化されるか、あるいは散逸項や粘性拡散項に比べて値が小さいことから無視されてきたが、壁面近傍での散逸率の勾配を考えると無視することはできない。

本研究の目的は、乱流諸量の壁面近傍における挙動を正しく再現できる、新たな $k-\varepsilon$ モデルを構築し、これをチャンネル内乱流および吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内乱流に適用し、その有効性を検証する。

2. 記 号

- C_f : チャンネル内乱流の摩擦係数
- $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$: モデル定数
- D_k : 粘性拡散項
- f_μ : モデル関数
- k : 乱流エネルギー
- P_k : 生成項
- Re_τ : レイノルズ数 $= u_\tau \delta / \nu$

$$Re_{\tau,av}: \text{レイノルズ数} = u_{\tau,av} \delta / \nu$$

T_k : 乱流拡散項

t : 時間

U : 平均流速

u, v : 変動速度

u_τ : 摩擦速度

$u_{\tau,av}$: 両壁面の平均摩擦速度

$u_{\tau,in}$: 吹き出し側摩擦速度

$u_{\tau,sc}$: 吸い込み側摩擦速度

y : 壁面からの垂直距離

y_η : 壁面からの無次元垂直距離 $= y/\eta$

y^+ : 壁面からの無次元垂直距離 $= u_\tau y / \nu$

y_{in}^+ : 吹き出し壁面からの無次元垂直距離

$= u_{\tau,in} y / \nu$

y_{sc}^+ : 吸い込み壁面からの無次元垂直距離

$= u_{\tau,sc} y / \nu$

δ : チャンネル半幅

ε : 散逸率

$\bar{\varepsilon}$: 式(16)の散逸率

$\tilde{\varepsilon}$: 式(15)の散逸率

ε^* : JL タイプモデルの散逸率

η : コルモゴロフ・スケール $= (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$

λ : 円管内流の摩擦係数

ν : 動粘性係数

ν_t : 渦粘性係数

π_k^* : 圧力拡散項

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$: モデル定数あるいはモデル関数

3. 基礎方程式

以下では、十分発達したチャンネル内非圧縮性乱流を対象とする。また本報では、タイプBの境界条件を扱う。

3・1 乱流エネルギー方程式 圧力拡散項を含めた乱流エネルギー方程式は、次式で与えられる。

$$D_k + T_k + P_k + \pi_k^* - (\tilde{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで $\tilde{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}$ は

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \bar{\varepsilon} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2 : \partial\sqrt{k}/\partial y \geq 0 \\ \bar{\varepsilon} &= 0 : \partial\sqrt{k}/\partial y < 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

と定義する。

壁面近傍での $\tilde{\varepsilon}$ のテイラー級数展開は、式(17)で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \nu(d_\varepsilon - d_\varepsilon')y^2 + \cdots \\ &= \nu\tilde{d}_\varepsilon y^2 + \cdots \quad \cdots \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

ここで $\tilde{d}_\varepsilon$ を壁面近傍で展開することにより、その主

要部分が正で、かつそれ以外の部分も DNS⁽²⁾⁽³⁾ データを用いることにより、係数 $\bar{d}_\varepsilon$ は正値をとることがわかる。

また ε を使った渦粘性係数は、式(18)で与えられる。

$$\nu_t = c_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon \quad (18)$$

ここで $\nu_t \simeq O(y^3)$, $k \simeq O(y^2)$, $\varepsilon \simeq O(y^2)$ であるので、モデル関数 f_μ は壁面近傍において y で漸近する。すなわち $f_\mu \simeq O(y)$ であるので f_μ の壁面境界条件は零と与えることができる。

3.2 圧力拡散項のモデル化 Kawamura⁽⁹⁾ は壁面近傍における圧力拡散項のモデルを以下のように提案した。

$$\pi_k^* = -\frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \quad (19)$$

これは壁面近傍で式(13)を満たし、壁面から離れるに従い値が小さくなっていく。さらにこれは拡散型のモデルになっているので、壁面垂直方向に式(19)を流路中心まで積分すると、零になる。

本研究においては式(19)に補正を加え、圧力拡散項の値が壁面から離れるに従い、よりはやく減衰するモデルとする。

$$\pi_k^* = -\frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} \quad (20)$$

この補正を施しても、圧力拡散項の漸近挙動および拡散的性質は満たされている。

3.3 散逸率方程式 タイプBの境界条件を用いた一般的な散逸率方程式は、次式で与えられる⁽¹⁾。

$$D\bar{\varepsilon} + c_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} + E = 0 \quad (21)$$

ただし

$$D\bar{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right\} \quad (22)$$

$$E = c_{\varepsilon 3} \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \quad (23)$$

しかし、式(21)では、壁面近傍において $\bar{\varepsilon} \simeq O(y^2)$ であるべき $\bar{\varepsilon}$ の漸近挙動が正しく再現されない。すなわち壁面近傍では生成項 $c_{\varepsilon 1}(\bar{\varepsilon}/k)P_k$ と E が無視できるので、 $D\bar{\varepsilon}$ と $c_{\varepsilon 2}\bar{\varepsilon}^2/k$ がバランスしなければならない。ところが、

$$D\bar{\varepsilon} = 2\nu^2 \bar{d}_\varepsilon + \dots \quad (y \rightarrow 0) \quad (24)$$

$$c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} = c_{\varepsilon 2} (\nu \bar{d}_\varepsilon y^2)^2 \frac{1}{by^2} + \dots$$

$$= \nu^2 c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{d}_\varepsilon^2}{b} y^2 + \dots \quad (y \rightarrow 0) \quad (25)$$

となるので、この二つの項は厳密にはバランスしない。以上のことから、今までの $\bar{\varepsilon}$ 方程式では $\bar{\varepsilon}$ の正しい漸近挙動を表現することはできない。

他方、 ε 自身についての方程式は、式(26)で与えられる⁽¹⁰⁾。

$$D\varepsilon + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon}}{k} + E = 0 \quad (26)$$

式(26)に式(15)を代入すると、次式が得られる。

$$D\bar{\varepsilon} + D\varepsilon + c_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon} + \varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon} \varepsilon}{k} + E = 0 \quad (27)$$

ここで式(27)を $\bar{\varepsilon}$ と ε の二つの方程式にそれぞれ分割できると仮定すると、以下のように表される。

$$D\bar{\varepsilon} + c_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} - f\bar{\varepsilon} c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon} \varepsilon}{k} + E = 0 \quad (28)$$

$$D\varepsilon + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - (1 - f\bar{\varepsilon}) c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon} \varepsilon}{k} = 0 \quad (29)$$

ここで、本研究では式(27)の左辺第5項 $c_{\varepsilon 2}(\bar{\varepsilon} \varepsilon)/k$ を $\bar{\varepsilon}$ 方程式と ε 方程式に、比率 $f\bar{\varepsilon}$ と $1 - f\bar{\varepsilon}$ でそれぞれ分離できると仮定した。また、 E 項は壁面から少し離れた領域で寄与するため $\bar{\varepsilon}$ 方程式中に含めた。さらに $\bar{\varepsilon}$ は ε の分布の中にかくれた等方的部分、 ε は壁面近傍の k の分布できまる非等方的部分と考え、本モデルにおいては $\bar{\varepsilon}$ を式(16)より求め、 ε 方程式を解かないこととする。このような分離法はむろん唯一ではないが、本研究の目的は、このような分離によって計算の安定性を改善するとともに、正しい壁面漸近挙動を与えるモデル化が可能であることを示す点にある。

ε 方程式を解くためには、 $f\bar{\varepsilon}$ を定めなければならない。壁面近傍において式(28)の各項の漸近挙動を考えると次式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) - f\bar{\varepsilon} c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon} \varepsilon}{k} = 0 \quad (30)$$

上式の各項の漸近挙動を考えると、

$$(2\nu^2 \bar{d}_\varepsilon + \dots) - f\bar{\varepsilon} c_{\varepsilon 2} (2\nu^2 \bar{d}_\varepsilon + \dots) = 0 \quad (31)$$

となるので、 $f\bar{\varepsilon}$ は少なくとも壁面上で、次式を満たさなければならない。

$$f\bar{\varepsilon} = 1/c_{\varepsilon 2} \quad (32)$$

このとき $f\bar{\varepsilon}$ が壁面垂直方向に依存しない、すなわち y の関数でない定数とすると、 $f\bar{\varepsilon} = 1/c_{\varepsilon 2}$ となり、次式に示す新しい $\bar{\varepsilon}$ 方程式が得られる。

$$D\bar{\varepsilon} + c_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} - \frac{\bar{\varepsilon} \varepsilon}{k} + E = 0 \quad (33)$$

新たな付加項 $-\bar{\varepsilon} \varepsilon/k$ は壁面近傍で粘性拡散項を補正する形になっている。また、これは式(21)中のモデル係数 $c_{\varepsilon 2}$ を以下のように修正した形とも考えることができる。

$$c_{\varepsilon 2} \text{ of Eq.(21)} = \left(c_{\varepsilon 2} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \quad (34)$$

右辺第2項めは壁面から離れるにしたがい零になっていく。

3.4 本研究におけるモデルの最終形 本研究における最終的な乱流エネルギーと散逸率の方程式を以下に示す。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - (\tilde{\varepsilon} + \varepsilon) + \pi_k^* \quad (35)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right\} + c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \left(c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}}{k} \right) + E \quad (36)$$

ただし

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (37)$$

$$\pi_k^* = -\frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right\} \quad (38)$$

$$E = c_{\varepsilon 3} \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \quad (39)$$

モデル定数 $c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}$ はスタンダードモデルとされる Launder-Spalding モデル⁽¹¹⁾での定数を, $c_{\varepsilon 3}$ は Launder-Sharma モデル⁽⁷⁾で使われている定数を基本値として, それぞれ調整最適化した。その結果, モデル定数は

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad c_{\varepsilon 3} = 0.6 \quad (40)$$

Fig. 1 Model function f_μ
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 2 Eddy viscosity
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

とした。

モデル関数 f_μ は壁面からの垂直距離 y_η の関数とし, チャンネル内乱流の二つのレイノルズ数における DNS⁽²⁾⁽³⁾ データより得られる f_μ を近似するように調節した。

$$f_\mu = 1.0 - \exp \{ -(y_\eta/285) - (y_\eta/20)^3 \} \quad (41)$$

ここで $y_\eta = y/\eta$ とし, η はコルモゴロフ・スケール [$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$] である。

一般に乱流エネルギー方程式中の σ_k は定数とされて, 約 1.0~1.4 とおかれる。しかし DNS⁽²⁾⁽³⁾ データよりその壁面值は $\sigma_k = 0.5$ と求められる。そこで, 本モデルでは σ_k を y_η を用いた関数とした。

$$\sigma_k = 1.0 - 0.5 \exp \{ -(y_\eta/20)^2 \} \quad (42)$$

式(42)で定義された σ_k は壁面上で 0.5 をとり, 壁面から離れるにしたがって増加し 1.0 に近づいていく。また, 著者らの一人は, $\sigma_k/\sigma_\varepsilon \sim 1$ とすることによって渦粘性係数 ν_t の分布が改善されるという結果⁽¹²⁾を得ていることから, $\tilde{\varepsilon}$ 方程式中の σ_ε も関数とし, $\sigma_\varepsilon = \sigma_k$ とした。

4. 結果および考察

本モデルをチャンネル内乱流に適用し, DNS⁽²⁾⁽³⁾ と既存のモデル (LS⁽⁷⁾, LB⁽⁴⁾ および MK⁽⁵⁾) と比較する。また, DNS⁽²⁾⁽³⁾ は低レイノルズ数の場合に限られるの

Fig. 3 Eddy viscosity
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 4 Mean velocity profile
(DNS by Kim et al.⁽²⁾)

で、広範囲のレイノルズ数におけるチャンネル内乱流と円管内乱流の実験についても比較した。さらに、吸い込み・吹き出しを伴うチャンネル内乱流に適用し、対応する DNS⁽¹³⁾ と比較することによってモデルの妥当性を確認した。

4.1 チャンネル内乱流と円管内乱流 壁面近傍における減衰関数 f_μ の挙動を図1に示す。本モデルにおける f_μ は、 y で壁面に近づく挙動を再現している。

図2, 3に渦粘性係数の分布を示す。チャンネルの中心付近において若干の差異がみられるが、全体的に DNS⁽²⁾⁽³⁾ とよい一致をしている。また、 y^3 の壁面漸近挙動もよく再現されている。

Re_τ が180と395の場合の平均流速分布を図4に示す。二つのレイノルズ数において、十分よく DNS⁽²⁾⁽³⁾ と一致している。

現状では、DNS⁽²⁾⁽³⁾ データとの比較は低レイノルズ

数のみに限られている。そこで広範囲のレイノルズ数におけるチャンネル内乱流と円管内乱流の計算を行い、それぞれの摩擦係数の結果を図5, 6に示す。図5, 6中の Re_m はバルク平均流速とチャンネル幅あるいは円管直径でのレイノルズ数である。

図5にチャンネル内乱流における摩擦係数 C_f を示し、Dean⁽¹⁴⁾ と Zarbi-Reynolds⁽¹⁵⁾ による二つの実験式と比較する。

Dean⁽¹⁴⁾

$$C_f = 0.073 Re_m^{-0.25} \quad (43)$$

Zarbi-Reynolds⁽¹⁵⁾

$$C_f = 0.032 Re_m^{-0.178} \quad (44)$$

本モデルから得られる結果は広範囲のレイノルズ数に

Fig. 5 Friction coefficient of channel flow

Fig. 6 Friction coefficient of pipe flow

Fig. 7 Turbulent energy profile
(DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 8 Turbulent energy profile
($Re_\tau=395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 9 Dissipation ε profile
(DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 10 Dissipation ε profile
($Re_\tau=395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 11 Reynolds stress profile
(DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 12 Reynolds stress profile
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 13 Dissipation ε profile
($Re_\tau = 180$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

においてこれらの実験式と十分よく一致している。

図6に円管内乱流に対する管摩擦係数 λ を示し、Prandtl-Nikuradseの実験式と比較した。

$$1/\sqrt{\lambda} = 2.0 \log (Re_m \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (45)$$

低レイノルズ数において若干高めの値を与えているが、全体的によい一致が得られている。

乱流エネルギーの分布を図7, 8に示す。本モデルの結果はDNS⁽²⁾⁽³⁾とよく一致し、そのピーク値がレイノルズ数に依存する傾向をとらえている。さらに壁面近傍における y^2 の挙動もよく再現している。

散逸率 ε を図9, 10に示す。散逸率の壁面漸近挙動は式(17)にあるように y^2 を再現している。これは本モ

Fig. 14 Dissipation ε profile
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 15 Turbulent energy budget
($Re_\tau = 180$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

Fig. 16 Turbulent energy budget
($Re_\tau = 395$, DNS by Kim et al.⁽²⁾)

デルの散逸率方程式[式(36)]中に導入した新しい項 $-\varepsilon \bar{\varepsilon}/k$ によるものである。またDNS⁽²⁾⁽³⁾データは散逸率のレイノルズ数依存性を示しており、本計算においてもその傾向をとらえている。

レイノルズ応力の分布を図11, 12に示す。本計算結果は壁面漸近挙動 y^3 をよく再現している。これは本モデルが k と ε の壁面漸近挙動を正しく表現している

からである。

全体的な散逸率, すなわち $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \varepsilon$ を図 13, 14 に示す。本モデルは壁面で最大値をとる散逸率の傾向をとらえ, さらに負の勾配を再現している。散逸率 ε が壁面で負の勾配になることをとらえることができるのは, 本モデルの乱流エネルギー方程式に圧力拡散項 π_k^* を導入したことで, 乱流拡散項中の σ_k を壁面近傍で小さくしたことによるものである。両項とも壁面にむかって乱流エネルギーを供給するので, それらとバランスするために散逸率が壁面近傍で増加するのである。これは k と ε がお互いに影響し合う物理量であるからであり, この傾向は Kawamura⁽⁹⁾ によって指摘されている。

乱流エネルギーの収支を図 15, 16 に示す。すべての項がそれぞれに対応する DNS⁽²⁾⁽³⁾ データとよく一致している。また散逸項と粘性拡散項のそれぞれの壁面での勾配が明らかに異なっていることがわかる。その勾配の差は式(4), (5), (13)からわかるように圧力拡散項によって補われている。しかし本モデルの圧力拡散項はおおよそ $y^+ = 8$ 近辺で負値のピークをもち, この点については DNS⁽²⁾⁽³⁾ の結果とは一致しない。その影響が乱流拡散項に現れている。この点は今後改善しなければならない。壁面における散逸率はレイノルズ数が大きくなるにつれ, その値も大きくなる。この傾向を本モデルはよく再現している。

Fig. 17 Flow geometry and coordinate of channel flow with injection & suction

Fig. 18 Mean velocity profile
(Injection & Suction, DNS by Sumitani et al.⁽¹³⁾)
(Normal, DNS by Kuroda et al.⁽¹⁷⁾)

4.2 吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内乱流

本モデルを吸い込み・吹き出しを伴うチャンネル内乱流に適用し, Sumitani-Kasagi による DNS⁽¹³⁾ と比較する。この種の流れについては, 最近安倍ら⁽¹⁶⁾ が, 彼らの低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを適用した研究を行っている。それによれば, 平均速度やレイノルズ応力分布については, 吹き出し・吸い込みの影響をよく表現できるが, 乱流エネルギーの収支については DNS⁽¹³⁾ の結果と必ずしも十分よい一致が得られないとしている。

計算条件は対応する DNS⁽¹³⁾ にあわせて, 両壁面の平均摩擦速度とチャンネル半幅によるレイノルズ数 $Re_{\tau,av}$ を 150 とし, 壁面垂直方向の一樣平均速度 V_0 を平均摩擦速度の 5% ($V_0/u_{\tau,av} = 0.05$) とした。座標系を図 17 に示す。

壁面からの吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内乱流は, 通常のチャンネル内乱流と異なり, 各方程式に壁面垂直方向の速度を含む対流項が現れる。このときの

Table 1 Friction coefficient

	DNS ^{[13][17]}	Present
Normal	8.64×10^{-3}	8.75×10^{-3}
Injection	6.29×10^{-3}	6.39×10^{-3}
Suction	1.27×10^{-2}	1.29×10^{-2}

Fig. 19 Turbulent energy profile
(Injection & Suction, DNS by Sumitani et al.⁽¹³⁾)
(Normal, DNS by Kuroda et al.⁽¹⁷⁾)

Fig. 20 Turbulent energy profile (Injection & Suction, DNS by Sumitani et al.⁽¹³⁾)

Fig. 21 Budget of the turbulent energy (Injection & Suction, DNS by Sumitani et al.⁽¹³⁾)

Fig. 22 Budget of the turbulent energy (Injection & Suction, DNS by Sumitani et al.⁽¹³⁾)

乱流エネルギー方程式を式(46)に示す。

$$0 = -V_0 \frac{\partial k}{\partial y} + D_k + T_k + P_k - \varepsilon + \pi_k^* \dots \dots \dots (46)$$

乱流エネルギー方程式において、右辺第1項の対流項は、壁面近傍で圧力拡散項と同様に、 $O(y)$ の挙動を示す。他方本モデルは通常のチャンネル内乱流をもとに構築しているため、本モデルの圧力拡散項の漸近係数はこの場合厳密ではなくなる。

平均流速分布を図18に示す。吹き出し・吸い込みのない通常(Normal)のチャンネル内乱流のDNS⁽¹⁷⁾と本モデルの結果も併せて示す。本モデルは平均流速の最大値が吸い込み側に移動する傾向を再現し、定量的にもDNS⁽¹³⁾とよく一致している。また各壁面における摩擦係数を表1に示す。本モデルにおいても、摩擦係数は吹き出し側で減少し、吸い込み側で増加する傾向を示し、その値もDNS⁽¹³⁾とよく一致している。

乱流エネルギーの分布を図19, 20に示す。図19に

は通常のチャンネル内乱流のDNS⁽¹⁷⁾と本モデルの結果も併せて示す。吹き出し側に向かうにしたがって、本モデルの結果はDNS⁽¹³⁾データよりも若干高めになっているが、乱流エネルギーの最小値の位置など定性的な部分はよく把握できている。さらに壁面近傍における y^2 の挙動も再現し、DNS⁽¹³⁾データとも一致している。

乱流エネルギーの収支を図21, 22に示す。各項は図21においては u_{in} で、図22においては u_{sc} でそれぞれ無次元化したものである。吹き出し側の収支(図21)において、壁面近傍の散逸項の絶対値がDNS⁽¹³⁾のそれよりも若干小さく予測され、同時に粘性拡散項も散逸項とのバランスの関係から壁面近傍で小さくなっている。これは圧力拡散項がDNS⁽¹³⁾の結果よりも小さく予測されるためである。しかし各項ともそれぞれに対応するDNS⁽¹³⁾データの挙動をよくとらえているといえる。

吸い込み側の収支(図22)においては、吹き出し側とは逆に、本モデルは圧力拡散項をDNS⁽¹³⁾よりもかなり大きく予測している(DNSは吸い込み側の圧力拡散項が他項に比べてかなり小さいことを示している)。その影響を受けて散逸項も壁面近傍で大きくなっている。全体的には圧力拡散項を除いて各項ともそれぞれの挙動を再現し、散逸項が $y^+ = 10 \sim 20$ で停滞する傾向等が本モデルによって把握されている。

5. 結 言

壁面漸近型の乱流エネルギー方程式と散逸率方程式を再検討した。乱流諸量の壁面近傍における漸近挙動を再現するために、いくつかの新しい項を導入した。本モデルをチャンネル内乱流に適用し、その結果はDNSとよく一致した。特に壁面近傍における散逸率の負の勾配をとらえ、 $-\overline{uv}$, k および ε の各壁面漸近挙動をよく再現した。また吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内乱流に適用した場合、全体的にその流れの特徴をとらえることができた。

文 献

- (1) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15**(1972), 301-314.
- (2) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, **177**(1987), 133-166 (Data compiled in the Collaborative Testing of Turbulence Models, Data disk No. 4).
- (3) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., *J. Fluid Mech.*, **194**(1988), 15-44.
- (4) Lam, C. K. G. and Bremhorst, K., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **103**(1981), 456-460.
- (5) 明賢國・笠木伸英, 機論, **54** 507, B(1988), 3003-3009.
- (6) Nagano, Y. and Tagawa, M., *Trans. ASME, J. Fluids*

- Eng.*, **112**(1990), 33-39.
- (7) Launder, B. E. and Sharma, B. I., *Lett. Heat Mass Transf.*, **1**(1974), 131-137.
 - (8) Nagano, Y. and Hishida, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **109**(1987), 156-160.
 - (9) Kawamura, H., *Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows*, **2**(1991), 26-4-1~26-4-6.
 - (10) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., *Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows*, **2**(1991), 29-1-1~29-1-6.
 - (11) Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **3**(1974), 269-289.
 - (12) 河村洋・水尾勝, 第26回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1989), 680-682.
 - (13) Sumitani, Y. and Kasagi, N., *Proc. 24th Fluid Dyn. Conf.*, AIAA 93-3101(1993).
 - (14) Dean, R. B., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **100**(1978), 215-223.
 - (15) Zarbi, G. and Reynolds, A. J., *機論*, **58**-549, B(1992), 1378-1385.
 - (16) 安倍賢一・近藤継男・長野靖尚, *機論*, **61**-585, B(1995), 1714-1721.
 - (17) 黒田明慈・笠木伸英・平田賢, 第6回生研 NST シンポジウム講演論文集, (1991), 7-10.
-