高次精度差分法による二次元円柱周り流れの直接数値計算*
(流出境界条件の検討)宮内 敏雄^{*1}, 平田 徹^{*2}, 店橋 護^{*1}Direct Numerical Simulation of Flow around a Two-Dimensional Circular
Cylinder by Higher-Order Finite Difference Scheme
(An Investigation of the Outflow Boundary Condition)

Toshio MIYAUCHI, Toru HIRATA and Mamoru TANAHASHI

A direct numerical simulation (DNS) of flow around a two dimensional circular cylinder by the higher order finite difference scheme (FDS) is conducted. Inflow and outflow boundary conditions constructed and successfully tested originally on a spatially developing mixing layer are applied to the above mentioned flow with $Re=226$. Comparisons of the general flowfield and the statistics with those obtained in an extended computational domain are made. In addition, the appropriateness of the outflow boundary condition imposing the zero gradient of the velocity and pressure is investigated. From these studies, the following conclusions are obtained. (1) For the newly proposed outflow boundary condition, the velocity and pressure fields are highly correlated to the results obtained in the extended computational domain. The correlation coefficient of the pressure with that obtained in the extended computational domain is higher than 0.999. (2) For the conventional zero gradient condition, a significant discrepancy from results obtained in the extended domain is observed for both velocity and pressure fields, and the correlation coefficient of the pressure is as low as 0.966. (3) The conventional zero gradient condition overestimates the drag coefficient.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Boundary Condition, Direct Numerical Simulation

1. 緒 論

円柱後方の非定常流は、その流れが示す基本的な構造、および様々な工業的応用のために数多くの実験的ならびに数値的研究の対象となってきた。また、この流れの工業的応用の多くが壁近傍の非定常的な特性よりも、後流の非定常的な特性に関係しているため、多くの実験的研究が後流中のKarman渦の非定常挙動の解明をその主たる目的としている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾。一方、この流れは数値計算の代表的な試験例として位置付けることもでき、そのため多くの数値的研究の対象ともなってきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾。とりわけ最近では、コンピューター技術の発達および高次精度計算手法の開発により、直接基礎方程式を数値的に積分することが可能となり、直接数値計算(DNS)による研究も徐々に行われ始めている⁽⁹⁾。

ところで流入・流出を伴う流れを数値的に取り扱う場合、物理的には存在しない流入・流出境界を人為的に設定する必要があるが、この場合、適切な流入

・流出境界条件を与えなければ、DNSとしての信頼性が失われてしまう。一般に円柱周りの粘性流は、概ね40とされている臨界 Re 数を越えると、2次元定常流から渦放出を伴う2次元周期流へと遷移するが、このような円柱後方の流下渦を伴う非定常粘性流の解析を行う場合、工業的応用面からも興味の集中する後流に、非物理的な影響を与えない流出境界条件を用いることが不可欠である。

一般に基礎変数(速度および圧力)で表記された非圧縮性流れの数値計算を行う場合、流出境界条件としては、速度成分および圧力の流れ方向の一階微分を0と設定する条件が広く用いられているが⁽⁹⁾、後方の計算領域が充分に取られていない場合にはこれらの条件がストローハル数に影響を与えるほか⁽¹⁰⁾、極端な場合には流れ場全体を非物理的なものに導くことが報告されている⁽⁸⁾。

一方、宮内ら⁽¹¹⁾は最近、基礎変数を用い、レギュラー配置の直交格子上で新しい流入・流出境界条件を提案し、それを空間発展混合層のDNSに適用して、その妥当性を示している⁽¹²⁾。そこで本研究では宮内らによって提案されたこの流入・流出境界条件を一般座標系に拡張し、高次精度差分法を用いて、渦放出を伴

* 原稿受付 1995年10月23日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 正員、住友重機械工業(株) (〒254 平塚市夕陽ヶ丘63-30)。

う2次元円柱周りの流れを対象としてDNSを行い、新しく提案された流入・流出境界条件の円柱周りの流れへの適用について検討を行う。また、一般的に用いられている流れ方向勾配規定型流出境界条件の妥当性についても検討を行う。

2. 記号

- C_l : 揚力係数
 $C_{l,p}$: 揚力係数中の表面圧力の寄与分
 $(C_{l,p} = \int_0^{2\pi} p_u \sin \theta d\theta)$
 $C_{l,f}$: 揚力係数中の粘性の寄与分
 $(C_{l,f} = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega_u \cos \theta d\theta)$
 C_d : 抵抗係数
 $C_{d,p}$: 抵抗係数中の表面圧力の寄与分
 $(C_{d,p} = \int_0^{2\pi} p_u \cos \theta d\theta)$
 $C_{d,f}$: 抵抗係数中の粘性の寄与分
 $(C_{d,f} = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega_u \sin \theta d\theta)$
 p : 圧力
 r_0 : 円柱半径
 Re : レイノルズ数
 R_f : 物理量 f の相関係数
 St : ストローハル数
 t : 無次元時間
 Δt : 無次元差分時間間隔
 $\mathbf{u}$: 速度ベクトル
 u_i : 速度の i 方向成分
 u : 速度の x 方向成分
 U_0 : 一様流速度 ($U_0=1.0$)
 U_C : 速度場および圧力場の x 方向対流速度
 v : 速度の y 方向成分
 x_i : i 方向の無次元座標
 Δx_i : i 方向の無次元差分間隔
 x : 流れ方向の無次元座標
 Δx : 流れ方向の無次元差分間隔
 y : 流れに直角方向の無次元座標
 Γ_f, Γ_f^* : 物理空間および計算空間上の格子の境界
 ξ : 計算空間座標
 η : 計算空間座標
 ω : 渦度
 θ : 周方向角度
 ν : 動粘性係数

記号

- $\langle \rangle$: 空間平均
 $\bar{}$: 時間平均
 $'$: 時間平均からの変動

3. 計算方法

3・1 基礎方程式 2次元非定常のナビエ・ストークス方程式と質量保存式を基礎方程式として用いる。これらの方程式を円柱の半径 r_0 および一様流速 U_0 で無次元化すると次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{2}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで $Re=2U_0r_0/\nu$ である。

3・2 計算方法 式(1), (2)を一般座標系において記述し、有限差分法を用いて数値計算を行った。時間前進には2段階時間分割法を用い、非線形項および粘性項は2次精度Adams-Bashforth法、圧力項は1次精度Backward-Euler法を用いて計算を行った。有限差分法に関しては、非線形項に対して5次精度風上差分法⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を用い、粘性項及び圧力項に対し4次精度中心差分法を用いた。

高次精度差分法を用いてDNSを行う場合、非線形項に起因する数値的不安定性を抑制する一方で、同じ非線形項の差分化に起因する誤差による解の劣化を最小限に押さえる必要がある。宮内ら⁽¹⁴⁾は3次元一様等方性乱流を対象とするDNSを行い、非線形項に対して5次精度風上差分法、粘性項に対して4次精度中心差分法を用いるスキームの組み合わせによってDNSが可能であることを示しており、本研究でも同様の差分スキームの組み合わせを採用した。

3・3 計算格子 円柱後流の計算に際しては後流を包む領域の格子分解能が重要になるが、一般的なO型格子を用いた場合、流出部まで十分な分解能を確保することは総格子点数の制約から困難である。また、後流部にカットを入れたC型格子を用いる場合には、カットを越えての微分の不連続性や格子の滑らかさの欠如による精度の劣化などが問題になる。そこで本研究ではZhangら⁽¹⁴⁾が3次元円柱周りのシミュレーションに用いたものと同様の格子を採用した。図1に物理空間および計算空間における同様の格子の全体図を示す。 x - y 平面上の物理領域では、この格子は円柱前方の半円部分とそれに接合する後流領域のための矩形部分で構成されている。円柱前方の先端位置の x 座標は $x=-20.0$ 、後方の流出境界の x 座標は $x=20.0$ および

Fig. 1 Computational grids

Table 1 Numbers of grids

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	η_1	η_2
Case1	31	156	186	80	195
Case2,3	31	156	186	80	155

Table 2 Lengths of computational domain and outflow boundary conditions

	Computational Domain in x-direction	Outflow Boundary Condition
Case1	28.6	OBC1
Case2	20.0	QBC1
Case3	20.0	OBC2

$x=28.6$, 後流領域矩形部分の上下境界の y 座標は $y=\pm 20.0$ である。この物理領域をより単純なT字型の計算領域に写像すると、円柱表面は Γ_1 線上に、流出境界は Γ_5 線上に、後流矩形の上下境界は Γ_4 , Γ_6 線上に、そして上流境界は Γ_3 , Γ_7 線上に写像される。境界 Γ_2 , Γ_8 は円柱前方のカットを表わしている。計算領域は

直交座標系 ξ , η によって記述されており、物理領域の全ての境界は座標 $\xi=\text{const.}$, $\eta=\text{const.}$ に一致している。各境界に対応する ξ , η 軸方向の格子点番号は表1に示すとおりである。また円柱壁面近傍では格子を η 方向に密集させており、円柱の後端部において η 方向の一点目は1.022の位置に設定されている。また、流出境界における格子点間隔は ξ , η 両軸方向にそれぞれ $\Delta x=0.215$, $\Delta y=0.309$ である。

3・4 計算条件 $Re=226$ の流れを対象として解析を行う。壁面境界条件としては、速度に対して滑りなしの条件を課し、圧力については壁面に垂直方向の勾配を0とした。円柱前方および上下境界については以下のように取り扱った。即ち、 $x \leq 0$ の領域では速度を一樣流に等しいとし、圧力を $p=0$ に固定し、 $x > 0$ の領域ではFree-slip境界条件、

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

を課した。

流出境界条件としては、以下に示す2種類の条件を用いた。

(1) 圧力の輸送方程式を用いる流出境界条件(OBC1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U_c \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_c \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \omega^2 \quad (6)$$

(2) 流れ方向勾配規定型流出境界条件(OBC2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

ここでOBC1は宮内ら⁽¹¹⁾によって提案され、空間発展混合層のDNSを対象として高い適用性の示されたものである。この境界条件では、速度の流出境界条件として対流・粘性条件が用いられており、対応する流出境界上の圧力は、式(4), (5)が成り立つと仮定して得られる近似的な圧力の輸送方程式(6)から与えられる。ここで式(4), (5)および(6)中の速度および圧力場の対流輸送速度を表わす U_c については、カルマン渦列が成立し、流出境界条件の影響を大きく受けない領域における圧力最下点の追跡から0.85と決定した。

数値計算は表2に示すように3つのケースについて行った。Case1は流出境界条件としてOBC1を用い、流出境界の位置を図1で表わされる位置よりもさらに $\Delta x=8.6$ だけ後方、即ち、 $x=28.6$ に設定したものであり、これを以下のCase2, Case3の結果との比較に用いる。Case2では流出境界条件としてOBC1を用い、流出境界

Fig. 2 Iso-vorticity contours ($t=95$) Fig. 3 Iso-pressure contours ($t=95$)

の位置を $x=20.0$ に設定した。また、Case3では流出境条件としてOBC2を用い、流出境界の位置を $x=20.0$ に設定した。総格子点数はCase1の場合29,475点であり、Case2およびCase3の場合24,494点である。

初期条件として、ポテンシャル流れに $v' = 0.02\sin(0.19\pi x)$ で表わされる微小擾乱を円柱前方、 $x \leq 0$ の領域に加えたものを用いた。無次元差分時間間隔 Δt を0.01として時間前進させ、初期条件の影響が無くなり、流れ場が準定常に達した後の $t=85$ の計算結果を3ケースの比較を行う際の初期条件として用いた。3種類のケース間の比較は、さらに無次元時間10だけ時間前進させ、 $t=95$ における速度および圧力場について行った。また、 $t=85$ から $t=94.8$ までの時間前進中の各種統計量を求め、その比較を行った。3種類のケースとも、最小格子幅に基づくCourant数は0.455である。

4. 計算結果および考察

図2および図3はそれぞれCase1、Case2およびCase3の $t=95$ における等渦度線図、等圧力線図を表わしている。Case1とCase2を比較すると、両者は非常に

Table 3 Correlation factors about vorticity and pressure

	ω	p
Case1&2	0.999999	0.999981
Case1&3	0.999852	0.966090

良い一致を示していることがわかる。一方、Case1とCase3を比較すると、Case3の流出境界付近で圧力が境界条件の影響を強く受けており、その影響が上流にまで及んでいることが分かる。

流出境界条件の影響を詳細に検討するため、ある物理量 f に対して以下のように定義される相関係数を用いて、Case1とCase2の相関およびCase1とCase3の相関について比較を行う。

$$R_f = \frac{\langle f_1 \cdot f_2 \rangle}{\langle f_1^2 \rangle^{1/2} \langle f_2^2 \rangle^{1/2}} \quad (8)$$

ここで平均は全空間あるいは計算空間上の座標 $\eta = \text{const.}$ ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$) に沿って行った。

図2および図3に示した渦度および圧力の全空間で

Fig. 4 Change of the correlation factor of vorticity in η -direction

Fig. 7 Change of the correlation factor of $\partial p / \partial y$ in η -direction

Fig. 5 Change of the correlation factor of pressure in η -direction

Fig. 8 Temporal change of lift coefficient

Fig. 6 Change of the correlation factor of $\partial p / \partial x$ in η -direction

Fig. 9 Temporal change of drag coefficient

の相関係数を表3に示す。Case1とCase2の間では圧力について0.9999以上の相関を示しているのに対して、Case1とCase3の間では対応する相関は0.9661に低下する。

図4から図7は、それぞれ渦度、圧力、圧力の x 方向勾配および y 方向勾配の $\eta = \text{const.}$ ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$) 上の相関係数およびr.m.s.値を示している。これらの図からCase1とCase2の相関係数は渦度、圧力および圧力勾配の全てについて、それらのr.m.s.値が極めて小さい

領域も含めて、流出境界付近まで高い相関を示しており、OBC1は流出境界条件として適切なものであることが分かる。一方Case1とCase3の相関係数は流出境界上の渦度に関して0.83、圧力に関して0.78まで低下しており、さらに境界条件の影響による相関係数の低下が計算領域内部にまで大きく及んでいることが分かる。

次に揚力係数 C_l および抵抗係数 C_d に対する影響について検討を行う。図8は C_l 、 $C_{l,p}$ および $C_{l,f}$ の時間変化を表わしている。図中の実線、一点鎖線および破線は、それぞれCase1、Case2およびCase3に対応している。この図から、Case1とCase2の比較では C_p 、 $C_{l,p}$ お

Table 4 Mean value of drag coefficient over one cycle

	C_d	$C_{d,p}$	$C_{d,t}$
Case1	1.524	1.127	0.397
Case2	1.524	1.127	0.397
Case3	1.528	1.130	0.398

Table 5 The x-ordinate of positions for examination of statistics

ST1	ST2	ST3	ST4	ST5	ST6	ST7	ST8
3.5	5.3	7.8	11.0	14.7	16.8	18.9	20.0

よび $C_{d,t}$ について振幅、位相とも完全に一致しており、OBC1はこれらの量に対して影響を与えないことが分かる。一方、Case1とCase3の比較から $C_{d,p}$ の振幅について、Case3の結果がCase1に比して僅かに大きな値を示しているが、揚力係数に対する流出境界条件の影響は小さいことが分かる。次に図9に $C_{d,p}$ 、 $C_{d,p}$ および $C_{d,t}$ の時間変化を示す。図中の実線、一点鎖線および破線は、それぞれCase1、Case2およびCase3に対応している。この図から、Case1とCase2では $C_{d,p}$ 、 $C_{d,p}$ および $C_{d,t}$ について振幅、位相とも完全に一致しており、OBC1はこれらの量に対しても影響を与えないことが分かる。一方、Case1とCase3の比較から、Case3は $C_{d,p}$ 、 $C_{d,p}$ および $C_{d,t}$ の振幅、位相に関してCase1と大きく異なる結果を与えており、OBC2は抵抗係数に大きな影響を与え、境界条件として適切でないことが分かる。さらに、表4に、1周期に相当する $t=85$ から $t=94.8$ にかけて時間平均された C_d 、 $C_{d,p}$ 、 $C_{d,t}$ を示す。この表から、Case1とCase2の間では C_d 、 $C_{d,p}$ 、 $C_{d,t}$ の全てについてはほぼ完全な一致が見られるが、Case3はCase1に比べて大きめの値を与えることが分かる。

次に各種統計量について検討を行う。表6および表7は、円柱後方x軸上で表5中に示したx座標を横切るST1からST8までの $\eta=\text{const.}$ 断面における平均速度 $\bar{U}$ 、 u の変動強度 $u'_{r.m.s.}$ および v の変動強度 $v'_{r.m.s.}$ の相関係数を示している。ここで、ST8はCase2およびCase3の場合の流出境界に対応している。これらの表からCase1とCase2の間では流出境界上においても $u'_{r.m.s.}$ および $v'_{r.m.s.}$ について0.999以上の相関を示すのに対して、Case1とCase3の間では相関が0.986にまで低下していることが分かる。次に、図10から図12にST1からST8までの $\bar{U}$ 、 $u'_{r.m.s.}$ および $v'_{r.m.s.}$ の分布を示す。図中の実線はCase1の結果を、中空のシンボルはCase2の結果を、そして中実のシンボルはCase3の結果を表わしている。図10の $\bar{U}$ に関しては、Case1とCase2は良く

Table 6 Correlation factors for statistics (Case1 & Case2)

ST	$\bar{U}$	$u'_{r.m.s.}$	$v'_{r.m.s.}$
1	1.000000	0.999999	0.999999
2	1.000000	0.999999	0.999999
3	1.000000	0.999999	0.999999
4	1.000000	0.999998	0.999999
5	0.999999	0.999998	0.999999
6	0.999999	0.999991	0.999998
7	0.999999	0.999981	0.999992
8	0.999999	0.999836	0.999934

Table 7 Correlation factors for statistics (Case1 & Case3)

ST	$\bar{U}$	$u'_{r.m.s.}$	$v'_{r.m.s.}$
1	0.999999	0.999975	0.999988
2	0.999994	0.999952	0.999958
3	0.999998	0.999853	0.999974
4	0.999999	0.998773	0.999958
5	0.999997	0.998037	0.999923
6	0.999941	0.985111	0.999773
7	0.999986	0.987013	0.997861
8	0.999811	0.985639	0.989226

Fig.10 Distribution of mean velocity

Fig. 11 Distribution of the intensity of fluctuation in x-direction

Fig. 12 Distribution of the intensity of fluctuation in y-direction

一致しているのに対して、Case1とCase3は、円柱近傍のST2においても不一致が見られ、流出境界の影響が

上流にまで及んでいることが分かる。図11及び図12の $u'_{r.m.s.}$, $v'_{r.m.s.}$ に関しても、Case1とCase2の間では、流出境界に至るまで良い一致を示している。しかしCase3では、円柱近傍からCase1の結果との相違が現われ、流出境界ではCase1に比べて $u'_{r.m.s.}$ が大きく、 $v'_{r.m.s.}$ が小さくなっている。以上の議論から、OBC1は2次の統計量に関しても非常に高い相関を示し、速度場に対してもほとんど影響を与えないのに対して、OBC2は円柱近傍の速度場に影響を与え、流出境界条件として適切でないことが分かる。

5. 結 論

速度場に対する対流・粘性条件と圧力場に対する近似的な輸送方程式によって構成される流入・流出境界条件(OBC1)、および一般的に用いられている流れ方向勾配規定型の流出境界条件(OBC2)を、 $Re=226$ の2次元円柱周りの高次精度差分によるDNSに適用し、流出境界条件の妥当性の検証を行った。円柱後方の流れ方向計算領域の長さの異なる2種類の格子を用いて計算を行い、得られた渦度、圧力、速度場に対する比較検討から、以下の結論を得た。

- (1) 圧力場に関して、OBC1は流出境界に至るまでほとんど影響を与えず、非常に良い境界条件となっている。一方、OBC2の影響は流出境界に留まらず、計算領域内部にまで大きく及んでいる。
- (2) 抵抗係数 C_d 及び揚力係数 C_l に関して、OBC1はこれらの量に対して影響を与えないのに対し、OBC2は抵抗係数 C_d の振幅、位相に対して大きな影響を与える。
- (3) 速度場に関して、OBC1は2次の統計量に対してもほとんど影響を与えず、適切な境界条件となっているが、OBC2は円柱近傍の平均速度や変動強度にも影響を与え、流出境界条件として適切でない。

参考文献

- (1) Kovaszny, L.S.G., *Proc. R. Soc. Lond. A* **198** (1949), 174.
- (2) Roshko, A., *NACA Rep.*, No.1191 (1954).
- (3) Green, B. and Gerrard, J.H., *J. Fluid Mech.*, **246** (1993), 675.
- (4) Zhang H.-Q., Fey, U., Noack, B.R., Konig, M. and Eckelmann, H., *Phys. Fluids*, **38** (1995), 779.
- (5) Kawaguchi, M., *J. Phys. Soc. Japan*, **8** (1953), 747.
- (6) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA paper*, 84-0340 (1984).
- (7) Braza, M., Chassaing, P. and Ha Minh, H., *J. Fluid Mech.*, **165** (1986), 79.
- (8) 早瀬・川上・西田, 機論, **60**-574, B(1994), 1891
- (9) Beaudan, P. and Moin P., *Stanford Univ. Rep.*, No.TF-62 (1994).
- (10) 中村・吉田・渡辺, 機論, **59**-558, B(1993), 374.

- (11) 宮内・店橋・鈴木, 機論, **60**-571, B(1994), 813
 - (12) 宮内・店橋・鈴木, 機論, **61**-581, B(1995), 144
 - (13) Rai, M.M. and Moin, P., *J. Comp. Phys.*, **96** (1991), 15.
 - (14) 宮内・平田・店橋, 機論, **61**-592, B(1995), 4400
-