ふく射伝熱負荷逆問題解法の加熱炉設計への適用*

工 藤 一 彦^{*1}, 黒 田 明 慈^{*1}
斉 藤 龍 彦^{*2}, 小 熊 正 人^{*3}Application of a Method for Solving Inverse Radiative Load Problems
to Design of FurnacesKazuhiko KUDO, Akiyoshi KURODA,
Tatsuhiko SAITO and Masahito OGUMA

In the present study, the heat flux and temperature distribution of heating elements surrounding a furnace are estimated by using the singular value decomposition (SVD) method by giving the temperature and heat flux along the surface of a heated object in the furnace. The heat flux profile of the heating elements which satisfies the given condition is obtained by determining the rank of the singular-value matrix using L-curve method.

Key Words: Numerical Analysis, Thermal Radiation, Heat Transfer, Furnace, Inverse Problem, Monte Carlo Method

1. 緒 言

ふく射伝熱解析において, 系内の発熱量および光学物性値分布を与え, ガス温度や壁面熱流束分布を求める問題は一般に順問題と呼ばれ, 原因となる量を与え, その結果となる量を求める問題である。しかしながら, 実際のボイラや加熱炉の設計現場では, 目標とする壁面熱流束や対象物の表面熱流束分布が与えられ, これを実現するためのバーナやヒータの配置やその発熱量分布などを求めることが要求される。これらは, 結果として要求される量からその原因となる負荷(発熱量分布)を推定する問題であり, 負荷逆問題と呼ばれている。

前報⁽¹⁾では, まず解析対象系を一度順問題としてモンテカルロ法で解いて, 各要素のエネルギー式群を行列の形で表し, この行列を用いて壁面熱流束, 壁面温度から, その内部のガスの温度分布, ガスの発熱密度分布を求めるという逆問題の解析を行った。その過程

では係数行列の逆行列を安定かつ適切に求める方法として特異値分解法⁽²⁾⁽³⁾を用いた。この解析系では, 方程式の数よりも未知数の数のほうが多く, 解に自由度があるため, 各ガス要素の温度の四乗の平方和が最小となる解を求め, その結果の妥当性と解析手法の有効性を確認した。

本報では, 既報とは異なり方程式の数が未知数の数よりも多い条件過多の場合についての解析を行い, 本解析手法の適用性を調べた。ここでは, 二次元の長方形加熱炉を対象とし, その周囲の壁に並べた多数のヒータの出力を制御して, 炉内に置かれた物体表面の熱流束分布が一様になるように制御する問題を取扱う。この場合, 逆問題を解くに当たって, 熱流束を入力として与える被加熱物の表面の要素数が, 出力が未知数となるヒータの本数よりも多いと上述の条件過多の問題となる。このような条件過多の問題を解く場合, 任意に与えられたすべての入力条件を厳密に満足する解は一般的には存在せず, 近似解を求めることになる。本報では, 以下の三つの場合について検討した。

(1) ヒータに与えた任意の熱流束分布に正確に対応した被加熱物表面の熱流束と温度の分布を逆問題の入力とし, 初めに与えたヒータの熱流束を逆算する問題。

* 原稿受付 1996年2月20日。

^{*1} 正員, 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。^{*2} 学生員, 北海道大学大学院。^{*3} 正員, 石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒235 横浜市磯子区中原町1)。

(2) 上記の逆問題を解くための入力値に誤差が入った場合のヒータの熱流束分布の推定値の誤差の検討。

(3) 被加熱物表面で任意の熱流束と温度の分布を得るのに必要なヒータの熱流束、温度の分布を求める問題。

(1), (2)は解の存在が既知の問題であり, (3)は一般的には解が存在せず, 近似解を求める問題である。

2. おもな記号

ϵ : 壁面放射率

σ : ステファン・ボルツマン定数 $W/(K^4 \cdot m^2)$

T : 絶対温度 K

ΔS : 壁面要素面積 m^2

Rd : READ 値

Q : 壁面熱流束 W/m^2

3. 解析系

解析系は二次元で、真空中あるいは非ふく射性気体中に被加熱物がおかれている状態を想定し、それを囲む灰色の固体壁とヒータの各要素で構成されているものとし、その詳細を図1に示す。図1中における要素番号19~32までの斜線部がヒータ要素であり、その放射率は0.72とした。中央部に配置されている要素番号33~48は被加熱物要素であり、その放射率は0.75とした。またその他の部分の要素番号1~18は灰色固体壁とし、放射率は0.6とした。今回の逆問題の解析では、被加熱物要素の熱流束と温度の分布および壁面要素の温度の分布を与え、各ヒータ要素の熱流束と温度の分布、および壁面要素の熱流束分布を求める。

4. 解析手法

図1の解析系の各要素のエネルギー式について述べる。各要素について要素間の熱交換を含むエネルギー

Fig. 1 Analytical system

式は、式(1)のように表される⁽¹⁾。

$$\epsilon_i \sigma T_i^4 \Delta S_i = \sum_{j=1}^{48} Rd(j \rightarrow i) \epsilon_j \sigma T_j^4 \Delta S_j + Q_i \Delta S_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

($i=1, \dots, 48$)

左辺の項は、要素 i から放射されるふく射エネルギー、右辺第1項は、要素 i が各要素 j から受け取るふく射エネルギーの合計量、右辺第2項は、要素 i に流入する正味熱量(流出時負)である。ここで、式(1)のうち $Rd(j \rightarrow i)$ で表されるものは READ 値と呼ばれる値であり、要素番号 j から放射されたふく射エネルギーのうち要素番号 i に吸収される割合であり、モンテカルロ法で順問題を解くことにより求められる⁽⁴⁾。この場合使用するふく射エネルギー粒子数は、各要素あたり 10 000 個とした。この要素数分のエネルギー式を連立させ、式(1)のうち T_i^4 の項のみを左辺に集めると、下記のような行列の形に定式化できる。

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a & C_a \\ A_b & B_b & C_b \\ A_c & B_c & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、添字 a は灰色固体壁、 b はヒータ、 c は被加熱物を示す。また、行列 $A_a \sim C_c$ はすべてモンテカルロ法を用いて順問題を解くことによって求められ⁽¹⁾、その詳細を式(3)~(5)に示す。式中の a_{ik} は行列 A_a, A_b, A_c をまとめて一つの行列 A とみなし、その行列の i 行 K 列成分を示しており、式中の b_{ik}, c_{ik} も同様である。

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= \{1 - Rd(i \rightarrow i)\} \epsilon_i \sigma \Delta S_i \\ &\quad (i=j, k=j, 1 \leq i \leq 48, 1 \leq j \leq 18) \\ a_{ik} &= -Rd(j \rightarrow i) \epsilon_j \sigma \Delta S_j \\ &\quad (i \neq j, k=j, 1 \leq i \leq 48, 1 \leq j \leq 18) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{ik} &= \{1 - Rd(i \rightarrow i)\} \epsilon_i \sigma \Delta S_i \\ &\quad (i=j, k=j-18, 1 \leq i \leq 48, 19 \leq j \leq 32) \\ b_{ik} &= -Rd(j \rightarrow i) \epsilon_j \sigma \Delta S_j \\ &\quad (i \neq j, k=j-18, 1 \leq i \leq 48, 19 \leq j \leq 32) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ik} &= \{1 - Rd(i \rightarrow i)\} \epsilon_i \Delta S_i \\ &\quad (i=j, k=j-32, 1 \leq i \leq 48, 33 \leq j \leq 48) \\ c_{ik} &= -Rd(j \rightarrow i) \epsilon_j \sigma \Delta S_j \\ &\quad (i \neq j, k=j-32, 1 \leq i \leq 48, 33 \leq j \leq 48) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ベクトル T_a, T_b, T_c は式(6)で表される。

$$T_a = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ \vdots \\ T_{18}^4 \end{bmatrix}, T_b = \begin{bmatrix} T_{19}^4 \\ \vdots \\ T_{32}^4 \end{bmatrix}, T_c = \begin{bmatrix} T_{33}^4 \\ \vdots \\ T_{48}^4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ベクトル Q_a, Q_b, Q_c は、式(7)で表される。

$$Q_a = \begin{bmatrix} Q_{1\Delta S_{11}} \\ \vdots \\ Q_{18\Delta S_{18}} \end{bmatrix}, Q_b = \begin{bmatrix} Q_{19\Delta S_{19}} \\ \vdots \\ Q_{32\Delta S_{32}} \end{bmatrix}, Q_c = \begin{bmatrix} Q_{33\Delta S_{33}} \\ \vdots \\ Q_{48\Delta S_{48}} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで逆問題を解くにあたり、未知数は、 Q_a (18 個)、 T_b (14 個)、 Q_b (14 個)であり、 T_a 、 T_c 、 Q_c は既知である。したがって、 b のヒータ要素は、温度も熱流束も与えられない不完全境界であり、 c の被加熱物要素は両者とも与えられた過剰規定境界となっており、式(2)の左辺の行列(ABC)が逆行列をもてば、解は一意に決まるが、方程式の本数は式(1)より48本で、未知数は先にあげた46個であり、方程式の数が未知数の数よりも多く条件過多な問題となっているため、一般的には近似解のみが存在する。

式(2)のうち、式(8・a)に示すような被加熱物要素に関するエネルギー式のみを用い、これを式(8・b)のように展開し、これに B_c^{-1} を左からかけることによって未知数であるヒータ要素の絶対温度の四乗のベクトル T_b を式(8・c)のように求めることができる。ここで、 B_c^{-1} は、特異値分解法⁽²⁾⁽³⁾により求めることができる。

$$(A_c B_c C_c) \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{bmatrix} = (Q_c) \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$(B_c)(T_b) = \{(Q_c) - (A_c)(T_a) - (C_c)(T_c)\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

$$(T_b) = (B_c)^{-1} \{(Q_c) - (A_c)(T_a) - (C_c)(T_c)\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

このようにして求められたベクトル T_b の値を式(2)に代入することにより、未知であった Q_a および Q_b を求めることができる。逆行列 B_c^{-1} を求める際、行列 B_c は特異値分解法により以下のように表される。

$$(B_c) = (U)(W)(V)^T \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 U 、 V は正規直交行列であり、 W は特異値で構成される対角行列である。後述の特異値を表す行列のランクとはこの行列 W のランクである。ここで、逆行列を作る際にこの特異値の逆数が入ってくるので、この中に非常に小さい値が含まれていると逆行列 B_c^{-1} の中に非常に大きい値が入り、解 T_b が大きく振動し、物理的に適切でない解が得られるため、この行列 W のランクを適切に決めて、小さい特異値を零とおくことにより逆問題でよく発生する振動解を防げるといわれている⁽³⁾。この行列のランクが大きすぎると、解は適切化されずに振動解となり、逆に下げ過ぎるとなめらかになり過ぎ、一部の情報の欠落から誤差を含

む解になる。本報では、この行列 W のランクの適切な決定方法として、HansenらのLカーブ法⁽⁵⁾の適用を試みた。これは、ランクをいろいろと変えて求めた T_b についてベクトルノルム $\|T_b\|$ と残差のノルム $\|B_c T_b - b\|$ をそれぞれ横軸、縦軸に両対数でプロットした線上で、両ノルムがバランスよく小さい値をとる点でのランクの値を行列 W の最適なランクであるとするものである。この操作により、 T_b のばらつき(振動)と各要素のエネルギー式の残差をバランスよく小さい値に抑えることが可能となるといわれている。ここで、 b は式(8・b)の右辺を示す。また、ベクトルノルムは下記の式(10)で定義される。

$$\|K\| = \left(\sum_{i=1}^N |k_i|^2 \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

5. 解析結果および考察

5・1 正確な測定値を入力とした場合

まず初めに、各ヒータ要素に対し一様な熱流束 $1.0 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ 、灰色固体壁の表面温度300 Kおよび被加熱物の表面温度500 Kを与えた順問題を解き、そのとき得られた被加熱物の熱流束およびその表面温度500 Kをもとに、逆に初めに与えたヒータの一様な熱流束 $1.0 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ が推定できるかを調べた。その結果を図2に示す。行列 W のランクが14のフルランクのときは、ほぼ $\pm 0.1\%$ の誤差でヒータの一様な熱流束分布を再現することができる。これは後述(5・3節)の被加熱物表面に任意の熱流束分布を与えた逆問題とは異なり、あらかじめ順問題を解き、そこで得られた被加熱物表面の熱流束分布をそのまま逆問題の入力としているためである。これは、解に自由度のある前報⁽¹⁾の場合も同様の結果が得られており、逆問題の入力が、その原因となる現象(この場合、ヒータの熱流束分布)に対し正確に対応した値である場合、逆問題解析で行列のランクを減らす必要はなく、精度よく原因現象を推定でき

Fig. 2 Heat-flux profiles of heater elements

ることがわかった。これは、被加熱物表面の熱流束分布の測定値が正確であれば、逆問題解析でヒータの熱流束分布を精度よく求められることを意味する。

5.2 誤差を含む測定値を入力とした場合 次に、5.1節の逆問題解析の入力(被加熱物表面の熱流束分布測定値)にランダムな誤差を重ねたものを逆問題の入力とし、逆に初めの順問題に与えたヒータ熱流束 $1.0 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ を推定する場合の測定誤差の影響を調べた。これは、被加熱物表面の熱流束分布として誤差を含む測定値が与えられたときに、逆問題解析で求められるヒータ熱流束分布の推定誤差を調べることを意味する。被加熱物の熱流束に重ねさせたランダム誤差としては、平均零、分散が $\epsilon = \pm 2, \pm 5\%$ の正規分布に従う乱数列を使用した。図3, 5にはそれぞれの大きさの誤差を含む入力について計算されたヒータの熱流束分布を示す。

図3に示すように ϵ が $\pm 2\%$ の場合、行列 W のランクが14のフルランクのとき、ヒータの熱流束分布の推定値として激しく振動する解が得られた。そこで、ランクを変えて求めた T_b を用いて図4に示すような

Lカーブを作成すると、解ノルムと残差ノルムがバランスよく小さくなる行列 W のランクとして、Lカーブの折れ曲がりの角に対応するランク数11が求まる。これにより小さな特異値3個が零となり、図3に示すように最大で $\pm 10\%$ 程度の誤差を含む比較的なめらかな解が得られた。また、行列 W のランクをさらに削減して4とし、小さな特異値10個を零とした場合、再び解のばらつきは増加した。これより、Lカーブ法によりふく射伝熱負荷逆問題の特異値行列のランクが適切に定められていることがわかる。

逆問題の入力の誤差の分散が $\epsilon = \pm 5\%$ の場合は、行列 W のランクが14のフルランクでは解である絶対温度の四乗が負となり、ヒータ熱流束を求められない。行列 W のランクを一つ減らし13としても、図5に示すように解は大きく振動している。そこでLカーブ法を用いて同様に決定した行列 W の適切なランク11を用いると、比較的安定した解が得られるが、 $\epsilon = \pm 2\%$ の場合と比べると誤差は大きく、最大でおよそ $\pm 20\%$ 程度になっている。また、行列のランクをさらに削減して4とすると、誤差は最大で 50% になる。

Fig. 3 Heat-flux profiles of heater elements ($\epsilon = \pm 2\%$)

Fig. 5 Heat-flux profiles of heater elements ($\epsilon = \pm 5\%$)

Fig. 4 L-curve ($\epsilon = \pm 2\%$)

Fig. 6 Heat-flux profiles of heater elements

5.3 任意の入力を与えた場合 次に、温度 500 K の被加熱物表面に $5.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ の均一的な熱流束を得ようとする場合、各ヒータにどれだけ負荷をかければよいかといった逆問題の解析を行い、その結果得られたヒータの熱流束分布を図 6 に示す。この逆問題は、前述の逆問題と異なり被加熱物要素に対し任意の熱流束、温度を与えたため、式の数が未知数の数より多い条件過多問題において、任意の分布の出力を与えるのに必要な入力分布を求める問題となり、これを完全に満足する解は一般的には存在せず、誤差最小となる近似解を求めることになる。特異値の行列のランクが 14 のフルランクの場合、図 6 に示すように解は振動している。そのため先ほど同様に図 7 に示す L カープを用いて適切な行列 W のランクを 11 と決定した。この場合図 6 より比較的ばらつかないで安定した解が得られることがわかる。行列 W のランクをさらに削減して 4 とすると、図 6 に示すようにばらつきは再び増加する。

次に、逆問題解析で得られた T_b の正確性を確認するために、式(8・c)で得られた T_b を式(8・a)に代入して再度被加熱物の熱流束 Q_c を計算し、得られた被加熱物の熱流束分布を図 8 に示す。これにより、行列 W

のランクが 14, 11 のいずれの場合も、被加熱物要素のうち要素番号 40, 41, 42 についてのみあらかじめ入力として与えた熱流束 $5.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ と比べておよそ +6~−13% 程度の誤差が生じ、それ以外の部分ではほぼあらかじめ与えた被加熱物の熱流束分布を推定できていることがわかる。これにより、ランク 14 のときの解も、被加熱物を所与の熱流束で加熱するという目的は、ランク 11 の場合と同様ほぼ満たしており、解の一つであることがわかる。しかしながら、図 6 に示すようにランクが 14 のときのヒータの熱流束分布は大きく振動しており、よりなめらかな分布のランク 11 のときの解のほうが実用的であることがわかる。また行列 W のランクを 4 とした場合、図 8 に示すようにあらかじめ与えた被加熱物の熱流束 $5.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ との誤差が、行列 W のランクが 14, 11 の場合よりも拡大するため、被加熱物表面に均一熱流束を与えるためのヒータ出力分布推定という逆問題の目的に合わなくなってくるがわかる。

また、上述の図 8 に示された被加熱物の要素番号 40~42 における熱流束誤差は、このような方程式の数に比べて未知数が少ない場合、図 1 のようなヒータの配置では、被加熱物に与えた任意の入力条件を満たす

Fig. 7 L-curve

Fig. 9 Heat-flux profiles of heater elements

Fig. 8 Heat-flux profiles of heated objects

Fig. 10 Heat-flux profiles of heated objects

解は存在せず、近似解しか得られないことから生じたものである。特に被加熱物に接近して設置されているヒータ要素 25, 26 は、この二つのヒータの間隔が遠いため、被加熱要素 40, 41, 42 の熱流束を同一の値にすることはできないということである。

そこで、図 1 の壁面要素番号 12 もヒータ要素とし、同様に被加熱物表面に $5.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ の均一熱流束、500 K の均一温度を与えるのに必要なヒータの熱流束および温度の分布を逆問題を解いて求めた。そのヒータ熱流束分布を図 9 に示す。また、このようなヒータによって得られる被加熱物の熱流束分布を図 10 に示す。この場合は式の数が 48 本、未知数の数が 47 個でやはり条件過多の問題となっている。

図 9 で、行列 W のランクが 15 のフルランクのとき、得られたヒータの熱流束はかなり振動しているが、L カーブ法により求めた行列 W の適切なランク 12 を用いると比較的なめらかな解が得られる。図 10 で、行列 W のランクが 15, 12 の場合、目標値 $5.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ にほぼ一致し、逆問題の解析結果に対応した被加熱物の熱流束は、図 8 で被加熱物の要素番号 40, 41, 42 の部分に生じていた誤差は解消された。したがって、図 1 のヒータ配置では被加熱物に与えた均一加熱条件を満たせず、ヒータ配置の変更が必要であることが示された。またこのとき、図 8 のようなグラフを作ること、被加熱物表面に目的の熱流束を得るための必要最小限の変更方法を容易に見いだせることが示された。また、特異値の行列 W のランクをさらに減らして 4 とした場合、被加熱物表面の熱流束の誤差が増加し、適切ではないことがわかる。

6. 結 言

加熱炉内の被加熱物表面に与えた熱流束と温度の条

件を満足させるのに必要な、炉内に配置された複数本のヒータの熱流束分布を求める負荷逆問題解析を行い、以下の結論を得た。

(1) 被加熱物の熱流束と温度の分布として順問題の解である正確な測定値を用いると、その原因である各ヒータの熱流束分布をほぼ正確に推測できる。

(2) (1) の測定値に 2~5% のランダム誤差が含まれると、ヒータの熱流束分布の推定値に 10~20% の誤差が生じる。この逆問題解析において、推定値の振動を抑え、かつ誤差の少ない解を得るための特異値の行列の適切なランク数は、L カーブ法によって求めることができる。

(3) 被加熱物表面に任意の熱流束、温度の分布を得ようとする場合、方程式数が未知数よりも多い条件過多であると、一般にはその条件を完全に満たせず、実現された被加熱物の表面熱流束に誤差が生じるが、ヒータの配置を適切に変えることにより、その誤差を少なくすることができた。また、この場合にも逆問題解析に使用する特異値の行列のランクは、L カーブ法で求めることができる。

本研究は、平成 7 年度文部省科学研究費一般研究 B (07455090) の助成を受けた。記して、感謝の意を表す次第である。

文 献

- (1) 上藤一彦・ほか 4 名, 機論, **61**-585, B(1995), 1768-1774.
- (2) Press, W. H., ほか 3 名, *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd ed., (1992), 51, Cambridge Univ. Press.
- (3) 久保司郎, 逆問題, (1992), 5, 培風館.
- (4) 谷口博・ほか 4 名, パソコン活用のモンテカルロ法による放射伝熱解析, (1994), 103, コロナ社.
- (5) Hansen, P. C. and O'leary, D. P., *SIAM J. Sci. Comput.*, **14** 6(1993), 1487-1503.