非圧縮粘性流の任意形状格子 TVD 対流差分法* (第2報, 非定常三次元ナビエ・ストークス方程式の解法)

松本佳久^{*1}, 塩島壮夫^{*1}, 大宮司久明^{*2}

A TVD Convective-Difference Scheme Using an Arbitrarily Shaped Grid for Analyzing 3-D Unsteady Incompressible Flow (2nd Report, 3-D Navier-Stokes Equations)

Yoshihisa MATSUMOTO, Takeo SHIOJIMA and Hisaaki DAIGUJI

A numerical method for analyzing the 3-D unsteady incompressible viscous flow with complicated boundaries or irregular shaped grids is proposed. In this method, the unsteady Navier-Stokes equations in terms of the primitive variables are solved using a time-splitting method and the convective-difference scheme which is stabilized by means of the TVD conception. Poisson's equation for pressure is integrated using Gaussian Integration in order to remove the spurious errors, and solved by the iteration scheme. For irregular grids the finite-difference operators derived by the least squares polynomial approximation are used. As a numerical example, a complex recirculating flow in a three-dimensional cavity was calculated.

Key Words: Numerical Analysis, Incompressible Navier-Stokes Equations, TVD Scheme, Finite-Difference Method, Convective-Difference Scheme, Three-Dimensional Cavity Flow

1. 緒 言

近年の数値流体力学の進歩は著しく、特に圧縮性流れの分野では特性の方法と TVD の概念を取り入れた高精度・高解像度の上流化スキームが開発されこの分野の長年の課題が解決されつつある⁽¹⁾。この成果は圧力が陽に計算できない非圧縮性流れの分野にも影響し、圧縮性流れの計算スキームが取り入れやすいような計算法が注目をあつめている。例えば 1960 年代に提案された Chorin の擬似圧縮性法⁽²⁾ がそれで、最近定常解法から非定常解法へと拡張され、近似因子化法や特性の方法による TVD 上流化⁽³⁾ が行われている。

Leith の対流差分法⁽⁴⁾ も実質微分が時空間の流跡線の内微分であることに着目し、運動方程式を流跡線に沿って積分して解く方法で、精度は一次であるがその誤差は二次の中心差分に近い精度のよい方法である。また、上流側の格子点を用い計算されるため上流の効果を計算領域全体に持ち込みやすく安定性も高い。この Leith 法は FEM にも拡張され⁽⁵⁾、高粘性流体の数値計算⁽⁶⁾ にも利用される一方、差分法では二次精度に

拡張され、著者らにより粘性を考慮した渦度方程式による二次元解析⁽⁷⁾、基礎変数法による三次元解析⁽⁸⁾、TVD の考えを取り入れた非定常・定常一般曲線座標系^{(9)~(11)} への拡張がなされている。また圧力の平滑操作は必要とするが非構造格子にも適用できる任意形状格子対流差分法⁽¹²⁾ も開発された。

本報では先の任意形状格子を用いた二次元流れの解法⁽¹²⁾ に改良を加え、高レイノルズ数流れで圧力の平滑化を必要としない三次元流れ解析に適用できる計算法を提案する。運動方程式の時間積分には時間分離法を用い 2 段階に分けその第 1 段階に対流差分法を適用し、圧力のポアソン方程式の解法には棚橋らが GSMAC 法⁽¹³⁾ で用いた境界積分形の方程式を用いる。また既報同様計算の安定化のために TVD⁽¹⁴⁾ の考えを導入して、安定化と高精度化をはかる。計算例として立方体空所内の三次元流れ解析について示す。

おもな記号

諸量は適宜無次元化されているものとする。

p : 静圧

t : 時間

u : 流速 (u, v, w)

x : 空間座標 (x, y, z)

* 原稿受付 1996 年 1 月 11 日。

^{*1} 正員, 出光石油化学(株) (〒299-01 市原市姉崎海岸 1-1)。

^{*2} 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

- ν : 動粘性係数
 δt : 時間間隔
 Re : レイノルズ数
 添 字
 i, j, k : 格子点の番号
 n : 時間ステップ
 $*$: 流跡線の上流側の時間 t^n の値

2. 基礎方程式

非定常三次元非圧縮粘性流の基礎方程式は物体力を無視すれば,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \nabla^2 u \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

式(1)に fractional step 法の一つである時間分離法を適用すれば,

$$\frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u \cdot \nabla u = \nu \nabla^2 u \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla p \quad \cdots \cdots (4)$$

式(4)の発散を取り ($\nabla \cdot u^{n+1} = 0$) を用いれば次の圧力のポアソン方程式が導かれる。

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \tilde{u}^{n+1} / \Delta t \quad \cdots \cdots (5)$$

xt 空間内の点 (x_i, t^{n+1}) を通る流跡線を考え, その Δt 時間前の流体素片の位置を (x_i^*, t^n) とすれば

$$x_i^* - x_i = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} u dt \quad \cdots \cdots (6)$$

式(3)に対流差分法を適用し, また式(4)を陰的に差分化すれば

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^* + \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla^2 u dt \quad \cdots \cdots (7)$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \Delta t \nabla p_i^{n+1} \quad \cdots \cdots (8)$$

ただし, 式(6), (7)の積分は流跡線に沿って取るものとする。

式(7), (8)は次のように導くこともできる。式(1)を一つの流跡線に沿って積分すれば

$$u_i^{n+1} = u_i^* + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (-\nabla p + \nu \nabla^2 u) dt \quad \cdots \cdots (9)$$

時間分離法を適用すれば

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^* + \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla^2 u dt \quad \cdots \cdots (10)$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla p dt \quad \cdots \cdots (11)$$

上式は式(7)と同じで, また下式は有限要素法で圧力項を1ランク低い精度の補間関数や数値積分を適用し計算していることになれば式(8)になる。

3. 数値解法

3.1 計算格子

計算格子は図1に示すような任

意の六面体格子で一つの格子点を八つの格子セルが共有し, 辺の長さだけでなく方向も滑らかに変化し, 直交性は極端に悪くないものとする。格子点に速度 u を, 格子セル中心に圧力 p を定義する。

3.2 任意形状格子の差分演算子 先の二次元解析で導いた差分演算子を三次元に拡張する。一つの格子点の周りに26点の格子点がある図1の場合を考え, この26点の格子点の内各座標方向に均等に m ($26 \geq m \geq 9$) 個の格子点を選ぶ。今, これらの点で囲まれる空間の関数 $u(x)$ を局所座標 $\bar{x}$ の二次関数で近似すれば,

$$u(x) = u_0 + \sum_{i=1}^9 C_i \phi_i(\bar{x}) \quad \cdots \cdots (12)$$

ただし

$$\phi_1 = x - x_0 = \bar{x}, \quad \phi_2 = y - y_0 = \bar{y}$$

$$\phi_3 = z - z_0 = \bar{z}, \quad \phi_4 = \phi_1^2$$

$$\phi_5 = \phi_2^2, \quad \phi_6 = \phi_3^2$$

$$\phi_7 = \phi_1 \phi_2, \quad \phi_8 = \phi_2 \phi_3, \quad \phi_9 = \phi_3 \phi_1$$

未定係数 C_i は m 格子点の条件

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^9 C_i \phi_{ik} \quad \cdots \cdots (13)$$

が平均的に満足されるように重み付き最小二乗法によって決定される。式(13)の残差の二乗の和を

$$R = \sum_{k=1}^m W_k^2 \left\{ \sum_{i=1}^9 C_i \phi_{ik} - (u_k - u_0) \right\}^2 = 0 \quad \cdots \cdots (14)$$

と置けば, R が最小になるためには

$$\frac{\partial R}{\partial C_n} = 2 \sum_{k=1}^m W_k^2 \left\{ \sum_{i=1}^9 C_i \phi_{ik} (u_k - u_0) \right\} \phi_{nk} = 0 \quad (n=1, 2, \dots, 9) \quad \cdots \cdots (15)$$

ただし, W_i は重み関数で後の計算例では $W_i = |x_i - x_0|^{-3}$ ととられた。式(15)は C_i に関する連立一次方程式で

$$\sum_{i=1}^m a_{in} = f_n \quad (n=1, 2, \dots, 9) \quad \cdots \cdots (16)$$

Fig. 1 Grid and definition points of variables

ただし

$$a_{in} = \sum_{k=1}^m W_k^2 \phi_{nk} \phi_{ik}$$

$$f_n = \sum_{k=1}^m W_k^2 \phi_{nk} (u_k - u_0)$$

ここで行列 a_{ni} の逆行列を a_{in}^{-1} で表せば

$$C_i = \sum_{n=1}^9 a_{in}^{-1} f_n = \sum_{k=1}^m b_{ik} (u_k - u_0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし

$$b_{ik} = W_k^2 \sum_{n=1}^9 a_{in}^{-1} \phi_{nk} \quad \dots\dots\dots (18)$$

格子点 0 における差分演算子はこれらの関係式から

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = C_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} (u_k - u_0) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\nabla^2 u = 2 \sum_{n=4}^6 C_n = 2 \sum_{n=4}^6 \sum_{k=1}^m b_{nk} (u_k - u_0) \quad \dots\dots\dots (20)$$

次に圧力の定義点の周りの 8 格子点で囲まれた空間を考え、関数 $p(x)$ を局所座標系 $\bar{x}$ の双一次多項式で近似する。

$$p(x) = \sum_{i=1}^8 C_i \phi_i(\bar{x}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1, \quad \phi_i = \bar{x}_{i-1}, \quad (i=2, 3, 4), \\ \phi_5 &= \phi_2 \phi_3, \quad \phi_6 = \phi_3 \phi_4, \quad \phi_7 = \phi_4 \phi_2, \\ \phi_8 &= \phi_2 \phi_3 \phi_4 \end{aligned}$$

である。未定係数 C_i は 8 格子点条件

$$\sum_{i=1}^8 \phi_{in} C_i = p_n \quad (n=1, 2, \dots, 8) \quad \dots\dots\dots (22)$$

から決定される。ただし ϕ_{in} は n 番目の格子点の ϕ_i である。行列 (ϕ_{in}) の逆行列を (ϕ_{in}^{-1}) とすれば

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_0 = C_{i+1} = \sum_{k=1}^8 \phi_{k,i+1}^{-1} p_k \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (23)$$

3.3 速度の計算

ここでは任意形状格子は滑らかに変化するものとして積分の起点の位置と関数値を三重二次ラグランジュ多項式で近似する。なお解が不安定にならないように関数値の補間には TVD の考えを取り入れる。流跡線に沿う積分を台形公式で近似すれば

$$x_i^* = x_i - \bar{u}_i \Delta t \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\bar{u}_i = u_i^* + \nu (\nabla^2 u_i^* + \nabla^2 u_i^n) / 2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

点 x^* の値 f^* は三重二次ラグランジュ補間多項式から求められる。

$$x_{ijk}^* = \sum_{r,s,t=1}^3 N_{rst}(\xi^*) x_{i-2+r, j-2+s, k-2+t} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$f_{ijk}^* = \sum_{r,s,t=1}^3 N'_{rst}(\xi^*) f_{i-2+r, j-2+s, k-2+t} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし

$$N_{rst}(\xi^*) = C_r(\xi^*) C_s(\eta^*) C_t(\zeta^*) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$C_i(\alpha) = -\alpha(1-\alpha)/2$$

$$C_2(\alpha) = 1 - \alpha^2$$

$$C_3(\alpha) = \alpha(1+\alpha)$$

$$N'_{rst}(\xi^*) = C'_r(\xi^*) C'_s(\eta^*) C'_t(\zeta^*) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$C'_1(\alpha) = -\alpha^- - \frac{1}{2} |\alpha| (1 - |\alpha|) \beta_1$$

$$C'_3(\alpha) = \alpha^+ + \frac{1}{2} |\alpha| (1 - |\alpha|) \beta_2$$

$$C'_2(\alpha) = 1 - C'_1(\alpha) - C'_3(\alpha)$$

$$\alpha = \alpha^- + \alpha^+$$

$$\alpha^\pm = (\alpha \pm |\alpha|) / 2$$

$$\beta_1 = \min \text{mod} \left\{ 1, b \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(f_i - f_{i-1})} \right\}$$

$$\beta_2 = \min \text{mod} \left\{ 1, b \frac{(f_i - f_{i-1})}{(f_{i+1} - f_i)} \right\}$$

$$\min \text{mod}(x, y)$$

$$= \text{sign}(x) \max [0, \min |x|, y \text{ sign}(x)]$$

b は 1~3 に取られるパラメータで、 b 大のほど三重二次補間の領域を広くする。

まず、 $\bar{u}_i = u_i$ として式(24)から上流側の座標 x_i^* を求め、式(26)をニュートン法で解いて ξ^*, η^*, ζ^* を計算する。なお、収束までには数回の計算を必要とする。次にこの ξ^* を用いて式(27)から式(25)の $\bar{u}$ の計算に必要な上流側の値を求める。この補間関数は三重二次補間関数に TVD の考えを取り入れたもので、高レイノルズ数で解が不安定にならないように変化の激しい所だけを三重一次式にするものである。さらに $\bar{u} = (u^* + u) / 2$ としてこのステップを繰返せば精度をあげることができる。また、式(8)の新しい時刻の速度は先に導いた式(23)を用いて次のように求められる。

$$(u_i)_0^{n+1} = (\bar{u}_i)_0^{n+1} - \Delta t \sum_{k=1}^8 \phi_{k,i+1}^{-1} p_k \quad (i=1, 2, 3)$$

3.4 圧力の計算

圧力のポアソン方程式(5)をそのまま図1の格子配置で離散化すると spurious 誤差のために煩雑な平滑操作が必要となる。これを回避するために棚橋らが GSMAC 法⁽¹³⁾ で用いた積分形の圧力方程式を用いる。以下に簡単にその方法について述べる。

式(5)を計算領域 v にわたり積分すると

$$\iiint_v \nabla^2 p dV = \frac{1}{\Delta t} \iiint_v \nabla \cdot \bar{u} dV \quad \dots\dots\dots (30)$$

ガウスの発散定理を用い境界積分形にすれば

$$\iint_r \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{\Delta t} \iint_r \bar{u} \cdot n d\Gamma \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし n は境界における外向き単位法線ベクトル。今、左辺の積分を図2の平面上 i におけるベクトルを用いて近似的に表すと

$$\begin{aligned} \iint_i \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_i &\approx A_1^i p_2 - A_1^i p_1 \\ &+ A_2^i (p_j - p_i) + A_3^i (p_k - p_i) \\ &= -A_1^i p_1 - B^i \quad (i=1, 2, \dots, 6) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A_1^i &= (a \times b) \cdot (a \times b) / 12 V \\ A_2^i &= (a \times b) \cdot (b \times c) / 12 V \\ A_3^i &= (a \times b) \cdot (c \times a) / 12 V \\ V &= (a \times b) \cdot c / 6 \end{aligned}$$

さらに右辺の境界積分は

$$\begin{aligned} \iint_i \tilde{u} \cdot n d\Gamma_i &= D^i \\ &= \tilde{u} \cdot (a \times b) / 2 \quad (i=1, 2, \dots, 6) \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

これら関係式を用いて離散化し、圧力 p_1 について整理し反復法を適用すると

$$p_1^{m+1} = \frac{1}{A_1} (B^m - D) \dots\dots\dots (34)$$

ただし

$$A_1 = \sum_{i=1}^6 A_1^i, \quad B = \sum_{i=1}^6 B^i, \quad D = \sum_{i=1}^6 D^i$$

m は繰返しのレベルを示す。なお、 p_i, p_j, p_k, p_l などは格子点の圧力で、先に導いた任意格子のための演算子係数を用いて

$$p_0 = \sum_{k=1}^8 \phi_k^{-1} p_k \dots\dots\dots (35)$$

Fig. 2 Definition of vectors for integration

より容易に算出できる。

4. 数値計算例

近年の計算機の発達に伴い三次元の流れ解析が一般的になり、計算スキームの妥当性を検証する例題として立方体空所内の流れ、曲がりベンド管内の流れ、あるいはバックステップのある流れ等が頻繁に解かれるようになってきた。ここではそのうちの立方体内の流れを計算し既存の報告との比較を行い本計算スキームの妥当性の検証を行う。また得られた流れの結果に対し若干の考察を加える。なお本計算法が不規則非直交格子にも十分適用できることを円柱をよぎる流れ解析などで確認した。

立方体内の流れ解析は単純ではあるが流体力学における興味ある基本的な流れ要素を多く含み、実験や数値計算による多くの可視化の結果がある。実験的研究では、古くは Mills⁽¹⁵⁾、Pan ら⁽¹⁶⁾ のもの、最近では望月らの比較的低レイノルズ数での結果⁽¹⁷⁾、Koseff-Street のレイノルズ数 10 000 までの結果⁽¹⁸⁾ が代表的である。数値計算では Takami ら⁽¹⁹⁾、Goda⁽²⁰⁾ によるものが最初で、QUICK 法を用いた Takemoto-Nakamura の $Re=10\,000$ の結果⁽²¹⁾ もある。この三次

Fig. 3 Computational grid

Fig. 4 Velocity vector ($Re=1000$)

元の課題の中心は、同様な系の二次元解析(正方空所内の流れ)では現れない、Taylor-Görtler 状の縦渦が発生することによる主渦の速度や形の変形、また非定常性や非対称性の出現するレイノルズ数が検討されてきた。なお、数値計算スキームによる解像度の差、実験値との比較に関しては棚橋がまとめたワークショップの報告⁽²²⁾がある。各種計算スキームによって差はあるが計算値はだいたい実験値に一致している。

計算に用いた直交不規則格子(31×31×31)を図 3 に示す。最小格子間距離は少ない格子で中央の解像度も

保持できるよう壁と第 1 格子点の距離は 0.0152 とした。境界条件は上面($y=1$)の境界以外の格子点に x 方向速度 $u=1$ を与え他の境界は固定壁とした。領域内部の速度の初期値は零、時間刻みはいずれのレイノルズ数($Re=400, 1\,000, 2\,000, 3\,200$)においても 10^{-2} と一定にして計算した。なお、定常状態に達したかどうかの判定はすべての格子点において次式が成立した場合とした。

$$\varepsilon = \max(|u^{n+1} - u^n|) < 10^{-4}$$

Fig. 5 Pressure contours

Fig. 6 Position of primary vortex center ($z=0.5$)

Fig. 7 Velocity vector ($Re=3\,200$) upper row $t=30$, lower row $t=140$

Fig. 8 Velocity vector on plans parallel to the bottom wall

定常解はレイノルズ数 2000 以下の場合に得られ、その 1000 の場合の $z=0.5$, $x=0.5$, $y=0.5$ の面における速度ベクトルを図 4 に示す。対称面 ($z=0.5$) 上の渦の状態は二次元解析の結果と酷似しているが、上流上面の渦は二次元解析ほどはっきりしない。図 5 にはこの断面の圧力の等高線を示した。既報のような spurious 誤差は認められず、積分形の圧力方程式を用いることにより一応改善されていることがわかる。図 6 には本解析で得られた対称面の渦中心の位置を、棚橋がまとめた文献の中から渦の位置の記載のあるものを他の文

献(23)からの報告値とともに示した。レイノルズ数の増加とともに中心の位置は中央に移動するが、レイノルズ数 1000 と 2000 では差がなくなる。格子点数を考慮すれば、本解法の結果もほぼ同じ位置にあり、十分に使用できる水準に達していると考ええる。次にレイノルズ数 3200 の結果について述べる。この場合は無次元時間 $t=150$ まで計算したが定常解は得られず周期性のある流れとなった。その流速ベクトルを図 7 に示す。 $t=90$ ごろからは非対象性がわずかに認められ、さらに $z=0.5$ 面の下流底部の渦が消失してしまうときがある。そのような状態 ($t=150$) の下流底部の様子を図 8 に示した。対象面に Taylor-Görtler 状渦が非対称な位置で接近していることがわかった。ただしこの非対称性は上流面にはほとんど認められず、またレイノルズ数 2000 ではこのようなことは起こっていない。Iwatus ら⁽²³⁾, Freitas ら⁽²⁴⁾ もレイノルズ数は若干異なるが同様な現象を報告している。すなわち非定常性はレイノルズ数 2000~3000 の間で始まり、4000 では非対称な流れに移行する結果を得ている。Taylor-Görtler 渦は主渦の遠心力とそれに伴う圧力こう配、さらに固体壁近傍の速度の釣合いが重要であることから、この渦をとらえることはかなりの解像度を必要とするといえる。本検討では格子が粗く Taylor-Görtler 状の渦構造を正確にとらえることはできなかったが、ここに提案した対流差分法は高レイノルズ数の非定常な流れを安定に精度よく解析できる手法といえる。

5. 結 言

以上本論文には任意格子に適用できる非圧縮粘性流の三次元差分法について述べたが、これを要約すれば次のようになる。

(1) 非定常三次元ナビエ・ストークス方程式を時間分離法を用い二段階に分離して、その第 1 段階に対流差分法を適用し陽的に時間進行する方法を提案した。

(2) 差分演算子には任意形状格子にも適用できる最小二乗近似多項式や補間式を用い、さらに高レイノルズ数域で発生する解の不安定性を回避するため TVD の概念を導入した補間法を用い、高レイノルズ数での精度と安定性を改善した。

(3) 圧力の Spurious 誤差は境界積分形の方程式を用いることにより発生を抑え、煩雑な平滑化操作を取り除いた。

(4) 最後に三次元立方体空所内の流れを数値計算例に取り上げ、各レイノルズ数における流れの特徴を示しながら、非定常な高レイノルズ数まで本解法が適

用できることを示した。

文 献

- (1) 例えば, 大宮司久明, 機論, 57-540, B(1991), 2509-2515.
- (2) Chorin, A. J., *J. Comput. Phys.*, 2-1(1967), 12-26.
- (3) 例えば, Mchugh, P. R. and Ramshaw, J. D., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 21(1995), 141-153.
- (4) Leith, C. E., *Method Comput. Phys.*, 4(1965), 1-28.
- (5) Benqu J. P., ほか 2 名(川井編), *Finite Element Flow Analysis*, (1982), 295-302, University of Tokyo Press.
- (6) 寒河江勝彦・ほか 2 名, 機論, 55-517, B(1989), 2618-2625.
- (7) 大宮司久明・ほか 2 名, 41-346, B(1975), 1810-1819.
- (8) 大宮司久明, 機論, 43-375, B(1977), 4101-4108.
- (9) 松本佳久・大宮司久明, 機論, 57-540, B(1991), 2614-2620.
- (10) 松本佳久・大宮司久明, 機論, 58-551, B(1992), 2108-2113.
- (11) Matsumoto, Y. and Daiguji, H., *Proc. 4'th Int. Symp. Comput. Fluid Dyn.*, Davis, 1(1991), 777-782.
- (12) 塩島壮夫・大宮司久明, 機論, 55-515, B(1989), 1930-1936.
- (13) 例えば, 河合秀樹・ほか 2 名, 機論, 55-515, B(1989), 1922-1929.
- (14) Chakravathy, S. R. and Osher, S. A., *AIAA Paper*, 85-0363(1985).
- (15) Milla, R. D., *J. R. Aeronaut. Soc.*, 69(1965), 714-718.
- (16) Pan, F. and Acrivos, A., *J. Fluid Mech.*, 28(1967), 643-655.
- (17) 望月修・ほか 3 名, 機論, 56-524, B(1990), 898-903.
- (18) Koseff, J. R. and Street, R. L., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 106(1984), 390-398.
- (19) Takami, H. and Kuwahara, K., *J. Phys. Soc.*, 37-6(1974), 1695-1698.
- (20) Goda, K., *J. Comput. Phys.*, 30(1976), 76-95.
- (21) Takemoto, Y. and Nakamura, Y., *Proc. 10'th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn.*, Beijing, (1986), 224-227.
- (22) 棚橋隆彦編, 第 3 回 JSME-CFD ワークショップ: 三次元立方体キャビティ内の流れ, (1990), 日本機械学会.
- (23) Iwatus, R., ほか 4 名, *Fluid Dyn. Res.*, 5(1989), 173-189.
- (24) Freitas, C. J. and Street, R. L., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8(1988), 769-802.