磁場下における電磁熱流体の立方体 Cavity 内自然対流解析*

(第1報, 垂直印加磁場の影響, 可視化実験との比較)

中井 太二郎^{*1}, 棚橋 隆彦^{*2}

Numerical Analysis of Natural Convection in Thermoelectrically Conducting Fluids in a Cubic Cavity under a Constant Magnetic Field (1st Report, Effect of Perpendicular Magnetic Field, Comparison of Visualized Experimental Results)

Taijiro NAKAI and Takahiko TANAHASHI

When electromagnetic fields are applied to thermoelectrically conducting fluids such as melted metals, the velocity, electromagnetic and temperature distributions are interrelated. Therefore the behavior of thermoelectrically conducting fluids is complicated under electromagnetic fields. In this work, we propose coupling GSMAC (generalized simplified marker and cell) finite element method with the ϕ -method, and discuss the natural convection of a thermoelectrically conducting fluid in a cubic cavity under a constant magnetic field. In the case of mercury (Prandtl number $Pr=0.025$, Grashof number $Gr=3.75 \times 10^7$) under a magnetic field, the temperature distributions obtained using the present numerical method agree qualitatively with the visualized experimental results, obtained using a thermosensitive liquid crystal sheet.

Key Words: Thermoelectrically Conducting Fluid, Natural Convection, ϕ -Method, Perpendicular Magnetic Field, Visualized Experiment

1. 緒 言

水銀やナトリウムのような液体金属は、磁場下において複雑な流動現象を引き起こす。一般に、空気や水などの自然対流では、密度差から生じる浮力が流体に作用する。しかし、液体金属では、浮力のみならず電磁気的な力すなわち Lorentz 力が作用し、流体運動に影響を与える。また、電磁気的な加熱効果により流体内部に発熱 (Joule 発熱あるいは誘導加熱と呼ぶ) を伴う。このように液体金属つまり電磁熱流体は、電磁場の影響により速度場に Lorentz 力、温度場に Joule 発熱が生じ、一般の熱流体と異なる挙動を示す。

電磁熱流体に関する工学的な研究は、主にフローカブラー⁽¹⁾といった核融合炉の冷却系の伝熱制御問題、電磁力を利用したコールド・クルーシブル⁽²⁾による液体金属の形状制御問題、あるいは超電導船などの新しい推進機関の開発に関連して行われてきた。今後、電磁熱流体の物理的挙動に関する研究は、実験・数値解

析の分野に問わずますます重要になるとと思われる。

電磁熱流体解析における電磁場の解析スキームの代表的なものに、 A 法⁽³⁾、 B 法⁽⁴⁾、 ϕ 法⁽⁵⁾などが挙げられる。 A 法は、磁気ベクトルポテンシャル A を変数とする解法で、磁場のソレノイダル性 (磁荷不在の法則) を恒等的に満足する。しかし、Coulomb ゲージ、Lorentz ゲージなどの数値上の問題点を抱えている。 B 法は、誘起磁場を考慮した磁束密度 B を直接変数とする解法 (原始変数法) で、境界条件の設定が容易である。一方、 ϕ 法は、誘起磁場が印加磁場より非常に小さく無視できる場合に適用される。自然対流問題では、流速はそれほど大きくないため、誘起磁場は非常に小さい (磁気 Reynolds 数 $Rem \approx 10^{-3}$) と考えられる。

本論文では、電磁場スキームに ϕ 法を適用して、速度と電流密度のソレノイダル性を十分に満足する電磁熱流体の非定常有限要素スキームを提案する。その計算アルゴリズムは、GSMAC 有限要素法⁽⁶⁾のアルゴリズムに従う。解析モデルとして、一様磁場下における立方体 Cavity 内自然対流問題を取り上げる。Viskanta らの実験結果⁽⁷⁾および水銀の可視化実験と比較・検討を行う。そして、電磁熱流体の熱流動的な特性を得られた数値計算結果から議論する。

* 原稿受付 1995 年 12 月 22 日。

^{*1} 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

^{*2} 正員、慶應義塾大学理工学部。

おもな記号

B_0	: 印加磁束密度ベクトル
$B_{\alpha\beta}$	: BTD 行列
C_α	: 勾配ベクトル
c_p	: 定圧比熱
$D_{\alpha\beta}$	: 拡散行列
$E_{\alpha\beta}$	: 移流行列
Ec	: Eckert 数 $= U_r^2/c_p\Delta T$
e	: 重力方向単位ベクトル
Gr	: Grashof 数 $= g\beta_v\Delta TL_r^3/\nu^2$
g	: 重力加速度
H	: Bernoulli 関数 $\equiv p + v^2/2$
Ha	: Hartmann 数 $= \sqrt{\sigma_e/\rho\nu}B_0L_r$
J	: 無次元電流密度ベクトル
L_r	: 代表長さ
M_α	: 質量ベクトル
$M_{\alpha\beta}$	: 質量行列
N_α, N_β	: 線形補間関数
Nu	: 壁面 Nusselt 数
n	: 単位法線ベクトル
Pr	: Prandtl 数 $= \nu/\alpha$
p	: 無次元圧力
Re	: Reynolds 数 $= U_rL_r/\nu$
$S_\alpha, S_\alpha^*, S_\alpha'$	: 境界積分項
T	: 無次元温度
t	: 無次元時間
U_r	: 代表流速 $\equiv \sqrt{g\beta_v\Delta TL_r}$
v	: 無次元速度ベクトル
α	: 温度伝導率
β_v	: 体膨張係数
Γ	: 要素境界領域
$\Gamma_{\alpha\beta}$	: Hourglass 行列
λ	: 同時緩和パラメータ
ν	: 動粘性率
ρ	: 密度
σ_e	: 導電率
ϕ	: 無次元電位ポテンシャル
ϕ_H, ϕ_E	: 修正ポテンシャル
Ω	: 要素内領域
Ω^e	: 要素体積
ω	: 無次元渦度ベクトル $\equiv \nabla \times v$
添字	
$()_\epsilon$	: 要素内一定
$()^n$	: 時間ステップ
$()^{(k)}$	: 同時緩和ステップ
$()_{\alpha,\beta}$	: 局所節点番号 $\alpha, \beta = 1 \sim 8$

2. 数値解析手法

2・1 支配方程式系 電磁熱流体の支配方程式系は、速度場・電磁場・温度場を支配する方程式系からなる。速度場の方程式は、対流項を回転系表示した Navier-Stokes 方程式と連続の式、電磁場の方程式は、Ohm の法則と電荷不在則、そして、温度場の方程式は、Energy 方程式である。以下に無次元化された支配方程式系を示す。ここで用いられた無次元数 Re , Gr , Ha , Pr , Ec は、それぞれ Reynolds 数, Grashof 数, Hartmann 数, Prandtl 数, Eckert 数である。ただし、 H は Bernoulli 関数 ($= p + v^2/2$) である。

・速度場

$$\omega = \nabla \times v \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla H + v \times \omega + \frac{1}{Re} \nabla^2 v + \frac{Gr}{Re^2} Te + \frac{Ha^2}{Re} J \times B_0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3)$$

・電磁場

$$J = -\nabla \phi + v \times B_0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (5)$$

・温度場

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(v \cdot \nabla)T + \frac{1}{PrRe} \nabla^2 T + \frac{Ha^2 Ec}{Re} J^2 \quad (6)$$

ここでは、以下の仮定を設け方程式系を簡単にしている。

- (1) 電磁熱流体は Newton 流体とする。
- (2) 浮力項の密度以外の物性値温度依存性を無視する (Boussinesq 近似)。
- (3) 流れは非圧縮・層流とする。
- (4) 浮力および Lorentz 力以外の外力の影響を無視する。
- (5) 変位電流を無視する。
- (6) 電磁熱流体は電氣的に中性、無極性とする。
- (7) 誘起磁場は無視でき印加磁場は一定直流磁場とする。
- (8) 粘性散逸による発熱を無視する。

2・2 離散化式 式(1)~(6)に対して、Galerkin 法で空間の離散化を行う。速度、電流密度および温度に関して六面体双一次要素による補間、その他の変数に関して要素内一定の補間を適用する。さらに、速度場の時間進行法に関して、式(2)を速度について陽的

に Bernoulli 関数について陰的に時間前進させる。そして、時刻 $(n+1)\Delta t$ の非圧縮の条件 (3) を満足するように速度と Bernoulli 関数を同時緩和法⁽⁸⁾で修正する。同様に、電磁場に関して、式 (4) を電流密度について陽的に電位ポテンシャルについて陰的に疑似進行させ、時刻 $(n+1)\Delta t$ の電荷不在の法則 (5) を満足するように電流密度と電位ポテンシャルを修正する。温度場は、Energy 方程式 (6) を Euler 前進により時間を進行させ、時刻 $(n+1)\Delta t$ の温度を求める。その結果、以下の要素行列方程式系を得る。

・予測子 step ($\mathbf{v}_\beta^n, \mathbf{J}_\beta^n, T_\beta^n$: 既知)

$$\boldsymbol{\omega}_\epsilon^n = \frac{1}{\Omega_\epsilon} \mathbf{C}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha^n \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mathbf{v}_\beta^n}{\Delta t} &= \mathbf{C}_\alpha H_\epsilon^n - \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^n - \mathbf{S}_\alpha \\ &+ M_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\beta^n \times \boldsymbol{\omega}_\epsilon^n + \frac{Gr}{Re^2} T_\beta^n \mathbf{e} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{J}_\beta^n \times \mathbf{B}_0) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{J}}_\beta = \mathbf{C}_\alpha \phi_\epsilon^n + M_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\beta^{n+1} \times \mathbf{B}_0) - \mathbf{S}_\alpha^* \quad (9)$$

・同時緩和反復 step ($\tilde{\mathbf{v}}_\beta^{(0)} = \tilde{\mathbf{v}}_\beta, H_\epsilon^{(0)} = H_\epsilon^n, \tilde{\mathbf{J}}_\beta^{(0)} = \tilde{\mathbf{J}}_\beta, \phi_\epsilon^{(0)} = \phi_\epsilon^n$: 初期値)

$$\phi_{H_\epsilon}^{(k)} = H_\epsilon^{(k+1)} \Delta t - H_\epsilon^{(k)} \Delta t = -\lambda \mathbf{C}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\alpha^{(k)} \quad (10)$$

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^{(k+1)} = \overline{M}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta^{(k)} + \mathbf{C}_\alpha \phi_{H_\epsilon}^{(k)} \quad (11)$$

$$\phi_{E_\epsilon}^{(k)} = \phi_\epsilon^{(k+1)} - \phi_\epsilon^{(k)} = -\lambda \mathbf{C}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{J}}_\alpha^{(k)} \quad (12)$$

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \mathbf{J}_\beta^{(k+1)} = \overline{M}_{\alpha\beta} \mathbf{J}_\beta^{(k)} + \mathbf{C}_\alpha \phi_{E_\epsilon}^{(k)} \quad (13)$$

($\mathbf{v}_\beta^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_\beta^{(k+1)}, H_\epsilon^{n+1} = H_\epsilon^{(k+1)}, \mathbf{J}_\beta^{n+1} = \tilde{\mathbf{J}}_\beta^{(k+1)}, \phi_\epsilon^{n+1} = \phi_\epsilon^{(k+1)}$: 収束値)

・Energy 方程式 (Euler 前進)

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{T_\beta^{n+1} - T_\beta^n}{\Delta t} &= -\frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} T_\beta^n - \mathbf{v}_\epsilon^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{\alpha\beta} T_\beta^n \\ &- \frac{1}{Pr Re} D_{\alpha\beta} T_\beta^n + \frac{Ha^2 Ec}{Re} M_{\alpha\beta} (\mathbf{J}_\epsilon^{n+1})^2 + S'_\alpha \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、下添字 α, β は要素内局所節点番号を表し、本論文では六面体双一次要素を用いるため α, β は 1 から 8 の値をとる。下添字 ϵ は要素内一定を意味し、 λ は同時緩和パラメータ⁽⁸⁾である。また、式 (14) の右辺第一項は BTD 項⁽⁹⁾を表す。BTD 項は二次の時間精度を有し、移流が卓越した問題や時間変動が大きい問題の場合に適用される。本論文では Energy 方程式に BTD 項を付加し温度場の計算精度および安定性を向上させている。式中の各要素係数行列と境界積分項は、それぞれ以下のように計算される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_\Omega N_\alpha N_\beta d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_\alpha = \int_\Omega \nabla N_\alpha d\Omega \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= \int_\Omega \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta d\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega_\epsilon} \mathbf{C}_\alpha \cdot \mathbf{C}_\beta + \Gamma_{\alpha\beta} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = \int_\Omega N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \approx \frac{1}{8} l_\alpha \mathbf{C}_\beta \quad (18)$$

$$M_\alpha = \int_\Omega N_\alpha d\Omega = \frac{\Omega_\epsilon}{8} l_\alpha \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= \int_\Omega (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \nabla N_\alpha) (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \nabla N_\beta) d\Omega \\ &\approx \frac{1}{\Omega_\epsilon} (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \mathbf{C}_\alpha) (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \mathbf{C}_\beta) \quad (20) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_\alpha = \int_\Gamma N_\alpha \left(H_\epsilon \mathbf{n} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (21)$$

$$\mathbf{S}_\alpha^* = \int_\Gamma N_\alpha \phi_\epsilon \mathbf{n} d\Gamma \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S'_\alpha &= \int_\Gamma N_\alpha \left\{ \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v}_\epsilon \cdot \nabla) T \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial n} \right\} d\Gamma \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、拡散行列 $D_{\alpha\beta}$ 、移流行列 $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ 、BTD 行列 $B_{\alpha\beta}$ は離散化ナブラ演算子⁽¹⁰⁾により定式化されている。離散化ナブラ演算子を適用すると、要素係数行列の低容量化および非記憶化が可能となり計算時間を大幅に節約できる。しかし、離散化ナブラ演算子を拡散行列に適用すると、一点求積法による行列公式に一致するため、Hourglass 不安定性⁽¹¹⁾という数値振動が発生する恐れがある。本論文では拡散行列に Hourglass 行列 $\Gamma_{\alpha\beta}$ を付加し、数値不安定性を抑制している⁽¹¹⁾。ただし、式中所ける Ω, Γ は要素内積分領域、境界積分領域をそれぞれ表す。 Ω_ϵ は要素体積を示し、 N_α は線形補間関数とする。 $\overline{M}_{\alpha\beta}$ は集中対角化された質量行列、 $l_\alpha = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ である。

3. 可視化実験

3・1 実験装置および方法 実験装置概略図を Fig.1 に示す。実験装置は、水銀が満たされた一辺 30mm の立方体容器、容器の左右壁を一定温度に保つための恒温水槽、温度制御装置および電磁石から構成される。電磁石は、磁極径 120mm、磁極間隔 50mm を有し、最高 0.75T までの磁場を一様に印加することが可能である。また、立方体容器の左右壁には厚さ 1mm の銅板を用い、他の壁面には厚さ 5mm の透明なアクリ

ル板を使用する。さらに容器前面壁内側には、壁面に沿う水銀の温度分布を可視化するために感温液晶シートを張り付ける。次に、実験方法を以下に述べる。

まず、電磁石より設定の大きさの磁場を重力方向に一樣に印加する。二つの恒温水槽の水温をともに 20 °C に設定し、容器内の水銀の温度を 20 °C の初期温度に保たせる。そして、高温 (左) 壁側の水槽の水温を 30 °C に急に上昇させ、左壁を 30 °C に保つ。感温液晶シートにより、流れが十分に発達する状態まで温度分布を観察する。その可視化結果をビデオカメラに撮影し、モニター画面を写真撮影する。

3・2 実験結果 前面の温度分布の可視化結果を Fig.6 に本論文の数値解析結果と比較して示す。図中の B_0 は、本実験における重力方向の印加磁場の大きさを示し、単位は T である。可視化結果は、十分に流れが発達した状態の温度分布である。磁場なし・磁場ありの場合ともに約 40~50 秒を要した。

4. 数値解析モデル

4・1 計算モデル 計算モデルとして、電磁熱流体の立方体 Cavity 内自然対流問題を取り上げる。作動流体を水銀 ($Pr=0.025$, $Gr=3.75 \times 10^7$) とし、磁場を一樣に重力方向に印加する。Fig.2 に本解析における境界条件を示す。速度場は全壁面で non-slip 条件とし、温度場は左・右壁面をそれぞれ高温・低温壁、残りの壁面を断熱壁の条件とする。また、3 章における水銀の可視化実験では立方体容器の左右壁に銅板、その他の壁面にアクリル板を使用することから、電磁場については左右壁面を導電壁、他の壁面を絶縁壁の条件とする。温度の初期値は $T=0$ として左壁面を急に加熱するインパルススタートを仮定する。

4・2 計算条件 計算条件を Table 1 に示す。計算条件は 3 章の水銀の実験条件に合わせる。 Pr 数や Gr 数などの無次元数は、中間温度 25 °C における水銀の

物性値から算出している。また、代表流速は一般に自然対流問題では直接決定できないため、ここでは浮力のポテンシャルエネルギーと流体の運動エネルギーのつり合いから $U_r = \sqrt{g\beta_v\Delta TL_r}$ として求めている⁽¹²⁾。表中において Ha 数を 31.2, 78.0, 156, 312, 468, 585 と設定してあるが、これは可視化実験において約 0.04, 0.10, 0.20, 0.40, 0.60, 0.75 T ほど磁場を印加した場合に相当する。使用するメッシュは $20 \times 20 \times 10$, $30 \times 30 \times 20$ の不等分割メッシュを用い、流体の境界層の解像度を高めるために壁面付近で細かく格子を配置する。とくに、Case 1, 2, 3 において細かいメッシュを用いているのは、格子依存性による非物理的な数値振動を抑制するためである。ここで、 N_x , N_y , N_z はそれぞれ x 方向, y 方向, z 方向の分割数, Δr_{min} は最小格子幅を表す。 Δt , t_{end} は無次元時間刻み幅, 計算終了無次元時間をそれぞれ表す。また、Poisson 方程式の解法の際の収束判定基準および最大反復回数は、それぞれ速度場、電磁場とも 10^{-2} , 50 回とする。BTD 項は流体の時間変動が大きいと考えられる Case 1 および 2 に付加し、計算の安定性を向上させている。

5. 計算結果および検討

5・1 磁場無しの場合 まず、無磁場 (Case 2-1) における本解析手法の計算精度の定量的な評価のため、Viskanta ら⁽⁷⁾の実験計測データと比較する。計測データは、奥行き z 方向にアスペクト比 0.6 を有する直方体容器内の中心断面上温度分布図である。作動流体はガリウム ($Pr=0.0208$, $Gr=5.19 \times 10^7$) であり、計算条件を Table 1 の Case 2-1 に示す。Fig.3 に流れが十分に発達した状態 (本論文では、“定常状態”という表現を用いず、“流れが十分に発達した状態”という表現を意図的に用いる。なぜなら、電磁熱流体すなわち低 Pr 数流体は流れの特徴として時間経過とともに変動する流れを示し、時間が十分に経過しても本質的な定

Fig.1 Experimental apparatus

Fig.2 Analytical model

Table 1 Calculation parameters

Case	Pr	Gr	Ha	Ec	Δt	BTD	$N_x \times N_y \times N_z$	Δr_{min}	t_{end}
1	0.025	3.75×10^7	—	—	2.0×10^{-3}	○	$30 \times 30 \times 20$	1.12×10^{-2}	60
2	0.025	3.75×10^7	31.2	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	○	$30 \times 30 \times 20$	1.12×10^{-2}	60
3	0.025	3.75×10^7	78.0	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	—	$30 \times 30 \times 20$	1.12×10^{-2}	60
4	0.025	3.75×10^7	156	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	—	$20 \times 20 \times 10$	1.27×10^{-2}	60
5	0.025	3.75×10^7	312	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	—	$20 \times 20 \times 10$	1.27×10^{-2}	60
6	0.025	3.75×10^7	468	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	—	$20 \times 20 \times 10$	1.27×10^{-2}	60
7	0.025	3.75×10^7	585	3.82×10^{-7}	2.0×10^{-3}	—	$20 \times 20 \times 10$	1.27×10^{-2}	60
2-1	0.0208	5.19×10^7	—	—	2.0×10^{-3}	○	$20 \times 20 \times 10$	5.00×10^{-2}	40
2-2	0.054	1.85×10^7	—	—	1.0×10^{-3}	○	$20 \times 14 \times 10$	8.00×10^{-3}	50
2-3	0.054	1.85×10^8	—	—	1.0×10^{-3}	○	$20 \times 14 \times 10$	8.00×10^{-3}	50

Fig.3 Temperature distributions in the x -direction ($Pr=0.0208$, $Gr=5.19 \times 10^7$)

常状態に達することはないからである。)と考えられる瞬間値 $t=40$ の x 方向温度分布図を示す。 $y=0.0$ 上の温度分布は計測データと比較して良好に一致している。しかし、 $y=0.5$ 、 $y=1.0$ の順に本計算結果と計測データとの温度分布の差は大きくなり、全体的に実験データの温度が高くなっている。これは、実験計測の誤差が原因として考えられる。実際に、Viskanta らは実験計測に関して、(1) 流れによる熱電対の傾斜、(2) 断熱壁と作動流体の平均温度としての測定、(3) 比較的小さな容器による測定、により起因する測定誤差の可能性を指摘している。とくに実験データの $y=0.5$ の平均温度が $T=0.5$ 以上であることから、Viskanta らの自然対流実験において、十分な断熱条件が達成できず、高温壁側からの熱の流入が避けられなかったと考えられる。このため、流体の温度は適切な実験条件下温度より、全体的に高い値として測定されたのである。以上の問題点を除くと、本解析結果は上記の実験計測データと定性的な一致を示していると思われる。

5.2 壁面平均 Nusselt 数 ここでは、まず壁面平均 Nusselt (Nu) 数の値により、磁場なしの場合における本解析の数値解と他の研究者による数値解を比較する。Table 2 に Ozoe&Okada⁽⁵⁾による数値解析結果

Table 2 Mean Nusselt number ($Pr=0.054$)

Case	Gr	Ref.(5)	Present
2-2	1.85×10^7	5.7371	5.4112
2-3	1.85×10^8	10.524	10.544

と比較して平均 Nu 数を示す。計算条件は文献 (5) に合わせ Table 1 の Case 2-2、2-3 (熔融シリコン、 $Pr=0.054$) に表す。ただし、温度の初期値は 0.5 とした。本解析の平均 Nu 数は Ozoe&Okada の数値解と比較して、誤差約 6 % の範囲内で良好に一致し本解析スキームの妥当性が示されている。ここで、表中における本解析の平均 Nu 数は、流れが十分に発達した状態と考えられる無次元時間 $t=40 \sim 50$ における時系列データ 100 個の平均値として算出している。

次に、作動流体を水銀とする場合 (Case 1~7) の高温壁側の平均 Nu 数の時間変化を Fig.4 に表す。磁場なしの場合、振動周期性のある流れが示されている。そして、磁場印加にともない振動流から定常流へ遷移し、平均 Nu 数が小さくなる様子がわかる。

上述のように無磁場の場合 (実際本解析では、Case 2 の弱磁場印加の場合も含まれる)、時間経過とともに速度や圧力などが変動する脈動流れが定性的に示されている。その顕著な例として、円柱まわり流れにおける一定周波数のカルマン渦の放出などが有名である。自然対流問題において脈動流れが生じるのは、低 Pr 数流体特有のものと考えられる。一般に、空気や水などの自然対流は Pr 数が 1 に近いあるいは 1 以上であり、時間経過にともない過渡的な流れから定常状態に達する流れを示す。しかし、低 Pr 数流体では温度境界層が速度境界層より厚く、流れの時間変動が直接温度境界層へ影響を与えるため、周期性のある熱流動的な現象を引き起こす。このような低 Pr 数流体の振動周期性のある挙動を、沖・棚橋⁽¹³⁾は最大エントロピー法を用いてスペクトル解析し定量的に評価している。さらに、Hartmann 数、磁気 Reynolds 数などのパラメー

Table 3 Mean Nusselt number (mercury).

Case	Ha	$Nu(\text{hot})$
1	0	4.875
2	31.2	4.969
3	78.0	5.088
4	156	4.570
5	312	3.585
6	468	2.890
7	585	2.554

 Fig.4 Time dependency of mean Nusselt number
 (mercury, $Pr = 0.054$, $Gr = 3.75 \times 10^7$)

 Fig.5 Computed isothermal contours at $t = 60$ (mercury, $Pr = 0.025$, $Gr = 3.75 \times 10^7$, $\Delta T = 0.2$)

Fig.6 Comparison of isothermal contours between visualized numerical and experimental results on the $z = 1$ cross section at $t = 60$ (mercury, $Pr = 0.025$, $Gr = 3.75 \times 10^7$)

ターの違いによる周期流の変化を調べている⁽¹⁴⁾。

参考までに Table 3 に、Case 1, 2 については無次元時間 $t=50\sim60$ における高温壁側の平均 Nu 数の時系列データ 100 個の平均値、Case 3~7 については $t=60$ の平均 Nu 数を示す。とくに Case 1~3 に関して比較した場合、印加磁場強度にともない平均 Nu 数は若干大きくなっている。これは弱磁場下において壁面付近で局所的に対流が促進されるという、Miyazaki ら⁽¹⁵⁾の報告を裏付けている。

5・3 温度分布 Fig.5 に作動流体が水銀の場合 (Case 1~7) の温度分布の計算結果を各 Case それぞれコンタ図で示す。Fig.5 は左壁高温部より $\Delta T=0.2$ 間隔で赤、黄、黄緑、緑および水色の順で色分けされた、流れが十分に発達した状態と考えられる瞬間時 $t=60$ における等温面を示している。磁場なしの場合 (Case 1)、とくに $T=0.8$ (黄)、 $T=0.2$ (水色) の等温面の形状から奥行き z 方向壁面 ($z=0, 1$ 面) 付近より中心断面 ($z=0.5$ 面) 付近の方が強い対流が生じている様子がわかる。これは、低 Pr 数流体に見られる特有な流れであり、慣性項が支配的な影響を及ぼすために中心付近では強い回転流れ、壁面付近では壁面との強いせん断力の作用により弱い対流が形成されたためである。そして、一般的に壁面付近の隅に二次渦が発生することが知られている⁽⁴⁾。次に、比較的弱い磁場を印加すると (Case 2, 3)、中心断面付近の強い回転流れから z 方向に対して温度勾配を持たない二次元的な構造を有する流れとなる。さらに磁場強度の増加に従い (Case 4~7)、中心断面付近の対流は一層抑制され、中心断面上で凸となる丸みを帯びた温度分布を示す。このような温度分布は、主流方向と逆向き (この場合、 x 方向) に作用する Lorentz 力が、 z 方向壁面付近より中心断面付近の方が支配的であることに起因している。

Fig.6 に、水銀の感温液晶シートによる可視化実験結果と数値解析結果 (Case 1~7) を温度分布で示す。温度分布は立方体容器前面 ($z=1$ 面) の可視化結果である。ただし、数値解析結果は流れが十分に発達した状態の瞬間値 $t=60$ 、実験結果は十分に時間が経過した任意の時刻の可視化結果で示す。図中の B_0 と Ha は、それぞれ重力方向の印加磁場の大きさとそれに相当する Hartmann 数を表す。可視化実験と数値解析結果を比較すると、その温度分布の傾向は定性的に一致していると思われる。

6. 結 言

本論文において、GSMAC 有限要素法の計算アルゴリズムを電磁場解析スキーム ϕ 法に適用し、流れ場と

電磁場のソレノイダル性を十分に満足する電磁熱流体の解析スキームを提案した。一様垂直磁場下における電磁熱流体の立方体 Cavity 内自然対流問題を解析した結果、以下の結言を得た。

(1) 磁場なしの場合、本解析結果は他の研究者による実験・数値解析結果と良好に一致し、本解析スキームの妥当性が保証された。

(2) 壁面平均 Nusselt 数の時間変化より、磁場なしおよび弱磁場印加の場合に電磁熱流体特有の振動周期性のある流れが定性的に確認できた。さらに、弱磁場下の対流促進も確認でき、印加磁場強度の増大にともない振動流から定常流へ遷移する。

(3) 等温コンタ図から、磁場なしの場合、低 Pr 数流体によく見られる中心断面付近の強い回転流れの構造を確認することができた。一方、磁場を印加した場合、磁場強度の増大にともない中心断面付近に作用する Lorentz 力が支配的になり、壁面付近より中心断面付近の方が対流が抑制される。

(4) 水銀の感温液晶シートによる可視化結果と数値解析結果を比較すると、ともに良く一致した温度分布を示した。

最後に本研究は、解析領域の分割数が少なく計算結果の解像度としては不十分であった。しかし、磁場下における電磁熱流体の複雑な現象を解明でき、今後の電磁熱流体に関する研究に重要な指針を与える内容である。

文 献

- (1) Ikeda, T., et al, *J. Nucl. Sci. Tech.*, **25**-8 (1988), 615.
- (2) 河瀬・他 2 名, 電子情報通信学会論文誌, **J72**-D-2 (1989), 271.
- (3) Ozoe, H. and Maruo, E., *JSME Int. J.*, **30**-263 (1987), 774.
- (4) 沖・棚橋, 機論, **59**-562, B(1993), 1385.
- (5) Ozoe, H. and Okada, K., *Int. J. Mass Trans.*, **32**-10 (1989), 1939.
- (6) 棚橋・齊藤, 京都大学数理解析研究所講究録, 548(1985), 122.
- (7) Viskanta, R., et al, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **29**-3 (1986), 475.
- (8) 加藤・棚橋, 機論, **57**-540, B(1991), 2640.
- (9) Dukowicz, J.K. and Ramshaw, J.D., *J. Comput. Phys.*, **32** (1979), 71.
- (10) 棚橋・中井, 機論, **62**-595, B(1996), 1036.
- (11) 棚橋, 計算流体力学, (1994), 495, IPC.
- (12) 齊藤・他 3 名, 旭硝子研究報告, **39**-1(1989), 1.
- (13) 沖・棚橋, 機論, **60**-573, B(1994), 1619.
- (14) 沖・棚橋, 機論, **59**-563, B(1993), 2165.
- (15) Miyazaki, K., et al, *J. Nucl. Sci. Tech.*, **24**-5 (1987), 409.