電気粘性流体の運動方程式と降伏応力に関する理論的検討*

榎 原 孝 文*¹, 棚 橋 隆 彦*²Theoretical Study on Equation of Motion
and Yield Stress of Electrorheological Fluid

Takafumi MAKIHARA and Takahiko TANAHASHI

The flow of ER fluid has been analyzed theoretically using the constitutive equation of Bingham fluid. However it is necessary to take account of internal rotation in ER fluid, because it is suspension containing particles. The equation of motion of ER fluid is derived using not only the constitutive equation of stress for Bingham fluid but also the micropolar electrically conducting fluids theory, assuming the equilibrium equation of angular momentum. For yield stress which is the characteristics of ER fluid, the interaction of particles which polarized by applied electric field leads us to the conclusion based on a two-body problem at the cutting surface of cluster. A theoretical equation is derived by dipole-dipole interaction. Yield stress in this study is not dynamic yield stress but static yield stress.

Key Words: Electrorheological Fluid, Internal Angular Momentum, Yield Stress, Dipole-Dipole Interaction, Micropolar Fluid

1 緒言

電気粘性流体とは電場を加えることによって見かけ上、粘度を変化させることのできるコロイド溶液の総称である。絶縁性流体中に微粉末を分散させたもので、分散質と分散媒の組み合わせに応じて、現在、様々な種類の流体が開発されている。

電気粘性流体の特徴は電場で粘度を見かけ上制御できること、粘度の変化する範囲が広いこと、応答性が良好なこと、および消費電力が比較的小さいことにある。流体が電場の下で粘度を変化させる(実際には、粘度が変化するだけではなく流体のせん断に対する降伏応力が変化するのである)現象は一般に電気粘性効果と呼ばれる。電気粘性流体においては見かけ上の粘度は電場の強さの二乗に比例して大きくなる。これらの特徴を生かして、現在、ダンパ・クラッチ・バルブ等への適用の試みがなされている^{(1)~(3)}。

以上のように電気粘性流体の工学的な応用、製法に関する研究が進む一方で、電気粘性効果のメカニズムの解明などの基礎研究^{(4)~(6)}は遅れているのが現状で

ある。中でも流動を記述する基礎方程式の研究のような流体力学における理論的な研究はいまだ十分に行われていない。基礎方程式に関する研究は、Bingham 流体としての取扱い⁽⁷⁾⁽⁸⁾にとどまっている。電気粘性流体が極性流体の一つであると考えれば、極性効果を考慮する必要がある。そこで、本論文では応力テンソルに Bingham 流体の応力テンソルを用い、平衡の角運動量方程式から極性効果を見積もることにより、マイクロポーラ電磁流体⁽⁹⁾としての電気粘性流体の運動方程式を誘導した。この結果、電気粘性流体に対して、Bingham 流体として取り扱うだけでなく、その極性効果を考慮し、電場と流れ場の相互作用である電気粘性流体の流動を記述できる。

さらに、降伏応力の構成式を決定することに関しては、これまで、降伏応力が体積分率に比例し、電場の二乗に比例する実験式が提案されているが、ここでは近藤・杉本⁽¹⁰⁾が実験で用いた含水系の電気粘性流体に対してよい近似を与える、懸濁微粒子の電気分極を点双極子で扱うモデルを用いて、理論式を誘導する。ただし、本論文では彼らが流動状態における降伏応力(動的降伏応力)を考えたのに対し、流動を考慮しない降伏応力(静的降伏応力)について考える。これは降伏応力が流動曲線において、歪速度の極小さい部分で定義されるものであるためである。理論の過程では Klingenberg

* 原稿受付 1996年3月8日。

*¹ 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員、慶應義塾大学理工学部。

が提案している、クラスターが滑り帯で一様に切断されるモデルを仮定している。これは理論が流動速度の極小さいことを考えているために、クラスターが切断されて、小さいクラスターを形成するまでに到らないという考えに基づく仮定である。この結果、近藤・杉本の理論式とは異なり、重量比が一定であれば降伏応力が懸濁粒子径にはよらないことが分かる。さらに、誘導した理論式の適用範囲についても言及する。

主な記号

a	: 懸濁粒子の直径
B	: 磁束密度ベクトル
b	: 外力ベクトル
C	: 静電容量
D	: 電束密度ベクトル
d	: 変形速度テンソル
E	: 電界ベクトル
e	: 3 階交代テンソル
f_{em}	: 電気力
g	: 電磁運動量ベクトル
H	: 磁界ベクトル
I	: 慣性モーメント
j	: 電流密度ベクトル
M	: 磁化ベクトル
n	: 法線ベクトル
P	: 電気分極ベクトル
p^*	: 圧力
p_0	: 静圧
p_m	: 電磁圧力
p_g	: 流体の重量比
T_0	: 電磁場がないときの応力テンソル
T^a	: 粘性応力の反対称成分
T^s	: 粘性応力の対称成分
T_{em}	: Maxwell 応力テンソル
v	: 速度ベクトル
w	: 流体粒子の角速度ベクトル
δ_{ij}	: Kronecker のデルタ
ε_0	: 真空の誘電率
ε_l	: 溶媒の比誘電率
ε_d	: 含水率 0% の電気粘性流体の比誘電率
ε_s	: 電気粘性流体の比誘電率
η	: 電気粘性流体の粘性率
η_0	: 溶媒の粘性率
θ	: クラスター角度

λ	: クラスター間距離
μ_0	: 真空の透磁率
ρ	: 密度
ρ_e	: 電荷密度
τ	: 緩和時間
τ_0	: 降伏応力
τ_B	: 回転 Brown 運動緩和時間
ϕ	: 体積分散率
Ω	: 懸濁粒子の角速度ベクトル

2 運動方程式

2.1 質量保存則

平均化された電気粘性流体の密度は一定で、電気粘性流体に対する連続の方程式は

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (1)$$

と書ける。

2.2 運動量保存則

電気粘性流体に対しては電場を印加するが、磁場は印加されない。よって、電磁運動量は 0 となる。また、電気粘性流体は電場によって電気分極が引き起こされるが、磁気分極は生じない。電荷はなく流体は中性で電流は流れない。よって、電気粘性流体に作用する電気力 f_{em} は

$$\begin{aligned} f_{em} &= \nabla \cdot T_{em} - \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= P \cdot \nabla E + P \times (\nabla \times E) \end{aligned} \quad (2)$$

である。ここで、 P 、 E は電気分極ベクトル、電界ベクトルである。よって、運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= -\nabla p^* + \nabla \cdot (T^s + T^a) + \rho b \\ &\quad + P \cdot \nabla E + P \times (\nabla \times E) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 T^s 、 T^a は粘性応力の対称部分と反対称部分であり

$$p^* = p_0 + \int_0^E \left\{ \frac{\partial(vP)}{\partial v} \right\}_{T, E, H} \cdot dE \quad (4)$$

である。ここで、 H は磁界ベクトルである。積分項は電場をかけたために現れる圧電効果である。角運動量保存則を用いると、粘性応力の反対称部分の発散は

$$\nabla \cdot T^a = \frac{1}{2} \nabla \times (P \times E) \quad (5)$$

と書ける。また、粘性応力の対称部分の発散は Bingham 流体の応力テンソルを用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^s = \nabla \cdot \left\{ 2 \left(\eta + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\mathbf{d} : \mathbf{d}}} \right) \mathbf{d} \right\} \quad (6)$$

となる。ただし、 $\mathbf{d}$ は変形速度テンソルである。式(5)、式(6)を式(3)に代入すると運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p^* + \nabla \cdot \mathbf{T}^s + \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E}) + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \rho \mathbf{b} \quad (7)$$

となる。ただし、誘導磁場が無視できる場合

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

である。

2.3 角運動量保存則

電気粘性流体に対する角運動量保存則をここでは角運動量の平衡方程式

$$\mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) = 0 \quad (9)$$

として記述する。ここで、 $\mathbf{T}_0$ 、 $\mathbf{T}_{em}$ は

$$\mathbf{T}_0 = -p_0 \mathbf{I} + \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_{em} = \mathbf{DE} + \mathbf{BH} - p_{em} \mathbf{I} \quad (11)$$

である。ただし、 p_0 、 $\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 p_{em} はそれぞれ静圧、恒等テンソル、電束密度ベクトル、磁束密度ベクトル、電磁圧力である。これらを式(9)に代入すると、応力テンソルの対称部分はなくなり、式(9)は

$$\mathbf{e} : \mathbf{T}^a + \mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0 \quad (12)$$

となる。一般に反対称テンソル $\mathbf{T}^a$ に対して恒等式

$$\mathbf{e} : \mathbf{T}^a = 2\mathbf{T}^a \quad (13)$$

が成立する。上式に $\mathbf{e}$ を内積して $\mathbf{T}^a$ について解くと

$$\mathbf{T}^a = -\frac{1}{2} \mathbf{e} : (\mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (14)$$

が導ける。よって、粘性応力テンソルの反対称部分の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^a = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (15)$$

と書ける。ただし、電気粘性流体に対して $\mathbf{M} = 0$ である。

2.4 電場の方程式

電気粘性流体に対する電場の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

となる。

2.5 電気分極の緩和方程式

電気粘性流体に対して、電気分極ベクトルは分極率テンソル χ_{ij} を用いて

$$\mathbf{P} = \chi_{ij} \mathbf{E} \quad (18)$$

となる。等方性が成立する場合

$$\chi_{ij} = \chi \delta_{ij} \quad (19)$$

となり、スカラー χ が物性値として既知であればよい。そして、多くの場合、電気分極に対する緩和方程式は不要である。しかし、強誘電体で粒子の回転 Brown 運動を考慮する場合には、磁性流体と同様に緩和方程式が必要である。この回転の緩和方程式は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \quad (20)$$

と記述できる。一方、角運動量の緩和方程式は

$$\frac{I}{\tau_B} (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{w}) = \mathbf{P} \times \mathbf{E} \quad (21)$$

と書くことができる。ここで

$$\frac{I}{\tau_B} = 6\eta_0\phi \quad (22)$$

である。式(21)を式(20)に代入すると、電気分極の緩和方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{w} \times \mathbf{P} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \\ &\quad - \frac{1}{6\eta_0\phi} \mathbf{P} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (23)$$

が導かれる。Table 1 にマイクロポーラ電磁流体と電気粘性流体の方程式系の比較を示す。

3 降伏応力

3.1 粒子間引力

外部電場 E_0 により懸濁粒子表面上に誘電分極 P が生ずる。この時、粒子表面上に現れる表面電荷密度 σ_P は

$$\sigma_P = |\mathbf{P}| \cos \delta = P_n \quad (24)$$

となる。分極した粒子 2 上の電荷が、同様に分極した粒子 1 上の任意の点 A につくる電位 V は次式で表される⁽¹¹⁾。

$$V = \frac{Pa^3}{3\epsilon_0\epsilon_l r^2} \cos \delta \quad (25)$$

2 粒子の座標系を Fig.1 に示す。この時、電界 E と電位 V には

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Table 1 Micro Polar Fluid and Electrorheological Fluid

	Micro Polar Fluid	Electrorheological Fluid
Material	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
Field	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{b} + \mathbf{f}_{em}$	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p^* + \nabla \cdot \mathbf{T}^s + \nabla \cdot \mathbf{T}^a + \rho \mathbf{b}$
	$\mathbf{f}_{em} = \nabla \cdot \mathbf{T}_{em} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}$	$+ \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E})$
	$\rho \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \rho \mathbf{l} + \mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em})$	$p^* = p_0 + \int_0^{\mathbf{E}} \left(\frac{\partial(v\mathbf{P})}{\partial v} \right)_{T, \mathbf{E}, \mathbf{H}} \cdot d\mathbf{E}$
	$\rho \frac{du'}{dt} = -p' \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}$	$\mathbf{T}^s = 2(\mu_0 + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}}) \mathbf{D}$
	$+ \rho r + Q_{em} + \Phi_v$	(Constitutive Equation of Bingham)
		$\nabla \cdot \mathbf{T}^a = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E})$
Electro Magneto	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
Field	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	---
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	---
Constitutive	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$	---
Equation	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
	$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v}$	$\mathbf{P} = \chi_{ij} \mathbf{E} \quad (\chi_{ij} = \chi \delta_{ij}: \text{isotropic})$
Others	$u' = u_0 + u_{em}^{(i)}, u_{em}^{(i)} = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial w_{em}^*}{\partial T} \right)_{\rho, \mathbf{E}, \mathbf{H}}$	$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{P} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$
	$p' = p_0 + p_{em}^{(i)}, p_{em}^{(i)} = v \left(\frac{\partial w_{em}^*}{\partial v} \right)_{T, \mathbf{E}, \mathbf{H}}$	$- \frac{1}{6\eta\phi} \mathbf{P} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{E})$
	$w_{em}^* = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$	$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$
		$\frac{I}{\tau_B} (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{w}) = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$

の関係があるから、点 A における電界の x 成分 E_x は電位の勾配をとることにより、次のようになる。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2Pa^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_l r^3} \sin \delta \cos \delta \cos \psi \quad (27)$$

極座標表示による球の面素 dS は、次式で書ける。

$$dS = a^2 \sin \beta d\beta d\varphi \quad (28)$$

この時、粒子 2 により粒子 1 が受ける力の x 成分 F_x は粒子 1 の電荷と式 (27), (28) をかけ、粒子表面に

わたって積分することにより得られ、次のようになる。

$$F_x = -\frac{2P^2 a^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_l} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^3 \sin \delta \cos \delta \sin \beta \cos \psi}{r^3} d\beta d\varphi \quad (29)$$

ここで

$$f_\alpha \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^3 \sin \delta \cos \delta \sin \beta \cos \psi}{r^3} d\beta d\varphi \quad (30)$$

とおくと、 f_α クラスターの角度 θ に対して Fig.2 のような値をとる。

Fig.1 Coordinate of Two Particles

Fig.2 Relation between Angular of Cluster and f_α

3.2 分極の算出

分極の大きさは構成方程式

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_l \mathbf{E} \quad (31)$$

の絶対値をとることによって決めることもできるが、ここでは粒子の平均的な分極の大きさを電極間に単一粒子を持ち込んだときの静電容量の変化から求める。この時静電容量の変化を ΔC_1 とすると

$$2\Delta C_1 = \frac{1}{V^2} \int \int \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dv \quad (32)$$

の関係がある⁽¹²⁾。ただし、 dv は電極板間の単位体積である。この式は積分を行うことができ

$$\begin{aligned} 2\Delta C_1 &= \frac{1}{V^2} P E_0 \frac{4\pi a^3}{3} \\ &= \frac{P}{Vd} \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。電極板間に N 個の粒子を持ち込んだ場合の静電容量の変化は

$$\Delta C_1 = \frac{N}{2Vd} \cdot P \frac{4\pi a^3}{3} \quad (34)$$

となる。

一方、平行極板での静電容量の変化 ΔC_2 は

$$\Delta C_2 = \frac{S}{D} \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l) \quad (35)$$

と書ける。ここで S は極板の面積である。 $\Delta C_1 = \Delta C_2$ とすると分極 P は

$$P = \frac{3E_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l)}{2\pi a^3 n} \quad (36)$$

ただし、 n は単位体積当たりの粒子数である。

3.3 降伏応力の理論式

式 (36) を式 (29) に代入

$$F_x = -\frac{3E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l)^2}{2\varepsilon_l \pi^2 a^4 n^2} f_\alpha \quad (37)$$

ここで、粒子と溶媒の比重が等しいとすると、単位体積当たりの粒子数 n は

$$\begin{aligned} n &= \frac{p_g}{4\pi a^3 / 3} \\ &= \frac{3p_g}{4\pi a^3} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。式 (37) を式 (38) に代入すると

$$F_x = -\frac{4E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l)^2}{\varepsilon_l p_g^2} f_\alpha \quad (39)$$

となる。また、極板間の全容積を v_d とすると、極板間にできる単位面積当たりのクラスターの数は

$$\begin{aligned} m &= \frac{2anv_d/d}{v_d/d} \\ &= \frac{2an}{v_d/d} \\ &= \frac{3p_g}{2\pi a^2} \end{aligned} \quad (40)$$

となる。ここで、降伏応力を次のように定義する。

$$\tau_0 = |F_x| \times m \quad (41)$$

この時、降伏応力 τ_0 は式 (39)(40) から

$$\tau_0 = \frac{4E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l)^2}{\pi \varepsilon_l p_g} f_\alpha \quad (42)$$

と表せる。Fig.3 にクラスターの角度と降伏応力の関係、Fig.4 に実験結果、Fig.5 実験結果と理論値の比較を示す。

Fig.3 Relation to Angular of Cluster and Yield Stress

Fig.4 Experiment⁽¹⁰⁾

4 検討

4.1 分極の見積の改良

Fig.4 によれば実験結果は以下のように整理されている。

$$\tau_0 \propto \frac{E_0 \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_d)}{p_g} \quad (43)$$

理論式では懸濁粒子が含水率 0% のときの電気粘性流体の誘電率 ϵ_d ではなく溶媒の誘電率 ϵ_l であるので、少し異なっている。このため、Fig.5 に見られるように結果が異なっていると考えられる。これは Fig.5 に示すように本理論式の値にほぼ一致している近藤・杉本の理論結果⁽¹⁰⁾ にも見られる。ここで、Fig.5 の実験とは Fig.4 中の直線を示している。これを回避するためには式 (32), (35) を改良しなければならない。分極の大きさを見積もるとき、溶媒に含水率 0% でない粒子を

Fig.5 Comparison of Present Theory, Experiment⁽¹⁰⁾ and Another Theory⁽¹⁰⁾ Fig.6 Comparison of Modified Theory and Experiment⁽¹⁰⁾

持ち込んだときの静電容量の増加を考える過程を踏んでおり、粒子の含水率があるときとないときでの実験が行われているのとは異なるためである。式 (35) は式 (32) に合わせて式を考慮しているため変更は容易であるが、式 (32) は電気粘性流体の懸濁粒子の分極のメカニズムを考慮して修正しなければならず容易なことではない。この問題を解決する方法を考えると、ある実数パラメーター α を用いて式 (32) を

$$2\Delta C_1 = \alpha \frac{1}{V^2} \iint \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dv \quad (44)$$

と書き、 α を実験結果に合うように選ぶことが考えられる。降伏応力の理論式を誘導した過程を経て、 α の値を決定してみる。この時、分極は次のように書ける。

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{3E_0 \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_d)}{2\pi a^3 n} \right\} \quad (45)$$

ゆえに、降伏応力の理論式は

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{4E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_d)^2}{\pi \varepsilon_l p_g} f_\alpha \right\} \quad (46)$$

となる。 $\alpha = 1.17$ のときの降伏応力を Fig.6 に示す。ただし、Fig.6 の実験は Fig.4 中の直線を示す。このとき理論結果は実験結果に一致することが分かる。そして、分極の大きさが

$$P = \frac{1}{1.17} \left\{ \frac{3E_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_d)}{2\pi a^3 n} \right\} \quad (47)$$

このとき、理論過程は実験状況を再現する過程を踏んでいるといえる。そして、この結果 ΔC_1 は次のようになる。

$$2\Delta C_1 = 1.17 \frac{1}{V^2} \int \int \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dv \quad (48)$$

つまり、粒子に水を含ませたときの静電容量の増加は極板間に粒子を持ち込むだけより大きいことになる。この係数 α の値に関する議論は今後更になさなければならないが、電気粘性流体のメカニズムの解明に役立つものであると考えられる。

4.2 粒子径と降伏応力の関係について

本理論の結果において降伏応力は重量比 p_g (もしくは体積分率 ϕ) には依存するものの粒子径には依存しない結果となった。粒子径が c 倍になったとき、クラスター数は式 (40) より

$$m = \frac{3p_g}{2\pi(ca)^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{3p_g}{2\pi a^2} \right) \quad (49)$$

と $1/c^2$ 倍になる。二粒子間に働く力は式 (29), (30) より

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{2P^2(ca)^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_l} f_\alpha \\ &= -c^2 \left(\frac{2P^2 a^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_l} f_\alpha \right) \end{aligned} \quad (50)$$

と c^2 倍なる。式 (41) の定義に従い、式 (49), (50) を用いて降伏応力を求めると次のようになる。

$$\tau_0 = \frac{4E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_l)^2}{\pi \varepsilon p_g} f_\alpha \quad (51)$$

これは式 (42) に一致する。つまり、 $p_g = \text{const.}$ のとき、降伏応力は粒子径に依存しないことが分かる。そしてこの結果は宮本・太田が計算結果⁽¹³⁾に一致する。

4.3 式 (42) の適用範囲について

静的降伏応力の理論式 (42) を誘導するとき、二粒子間の力を二体問題として扱ったのはすでにみた通りである。しかし、二体問題として考えるためには粒子間距離がクラスター間の距離に比べて、十分小さく

なければならない。なぜなら、粒子間の力はその中心間の距離 r の三乗に逆比例することが式 (30) から分かるからである。ここでは、上述の仮定を満たす体積分率を求め、本理論式 (42) の適用範囲を考える。

Fig.3 からクラスターの角度 $\theta = 27^\circ$ のとき、粒子間の力は最大になることを述べた。このとき粒子間の距離 r は

$$r = \frac{2a}{\cos 27^\circ} = 1.12 \times 2a \quad (52)$$

であるから、 $r \simeq 2a$ と考えられる。つまり、粒子間距離はほぼ粒子の直径に等しい。

一方、全極板間にできるクラスター数 M は式 (38) を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} M &= 2an \times S \\ &= \frac{3p_g S}{2\pi a^2} \end{aligned} \quad (53)$$

このとき、クラスター間の距離 λ は

$$\lambda = \sqrt{\frac{S}{M}} = a \sqrt{\frac{2\pi}{3p_g}} \quad (54)$$

となる。 λ と r の三乗の比をとると次のようになる。

$$\left(\frac{r}{\lambda} \right)^3 = \left(2 / \sqrt{\frac{2\pi}{3p_g}} \right)^3 \quad (55)$$

この値がほぼ 0 と見なせる p_g を求めればよい。一般に、ある値が代表量に比べてオーダーが二桁異なる場合はその値を無視することができるので、式 (55) の値が 0.01 になるときの p_g を求めると $p_g = 0.11$ となる。つまり、粒子の重量比もしくは体積分率が 10% 程度までは本理論が適用できると考えられる。

5 結言

流れ場と電場の相互作用である電気粘性流体は、これまで Bingham 流体として取り扱われるだけであった。本論文では電気粘性流体を Bingham 流体として取り扱うだけでなく、極性流体として取り扱うべく、マイクロ・ポーラ電磁流体の立場に立って電気粘性流体の運動方程式を誘導した。この過程において極性効果は電場が分極ベクトルに及ぼすトルクを内部角運動量に等しいとすることによって考慮されている。また、電気粘性流体の最大の特徴である降伏応力に対しては、近藤・杉本と同様に粒子間相互作用を考慮することによって理論式を得た。この理論式は流動を全く考慮しておらず、静的降伏応力の理論式である。

(1) マイクロ・ポーラ電磁流体の立場から Bingham 流体の応力テンソルを用いて、極性効果を考慮した電気粘性流体の運動方程式を得た。この結果、電場との相互作用を考慮できるようになった。

- (2) 双極子双極子相互作用により電気粘性流体の静的降伏応力に関する理論式を得た。この結果、降伏応力は重量比が一定のとき粒子径に依存しないことが分かった。また、理論式の適用範囲は重量比10%以下の電気粘性流体である。

参考文献

- (1) 森下・他2名, 機論, 56-524, C(1990), 78-84.
(2) 森下・三井, 機論, 56-529, C(1990), 49-54.
(3) 森下・他2名, 機論, 58-550, C(1992), 62-68.
(4) Marshall, L. and Zukoski, C.F., J.Chem.Soc.Far. Trans.1, 85-9, (1989), 2785-2795.
(5) Klingenberg, D.J., et al, J.Chem.Phys., 91-12, (1989), 7888-7895.
(6) Klingenberg, D.J., et al, J.Chem.Phys., 94-9, (1990), 6160-6169.
(7) Atkin, R.J., J.Rheo., 35-7, (1991), 1441-1461.
(8) 築地・他3名, 油圧と空気圧, 25-4, (1994), 556-561.
(9) 棚橋, 岡永, 井門, 機論, 56-523, B(1990), 112-119.
(10) 近藤・杉本, 産業安全研究所研究報告, RIIS-RR-22-3, (1973).
(11) 飯田, 電磁気学(下), (1971), 丸善, 403.
(12) 高橋, 電磁気学, (1959), 裳華房, 97.
(13) 宮本・太田, 機論, 59-562, B(1993), 48-54.
-