多段軸流圧縮機のリアプノフ法による安定性解析*

稲垣 詠 —*1

Stability Analysis of Axial Flow Compressor Based Lyapunov Method

Eiichi INAGAKI

The multistage axial flow compressor is modeled by the lumped cascade model of interconnected subsystems. Dynamics for each stage of the compressor are established with a state vector which has three state variables of flow rate, pressure and temperature. Compressor characteristics are estimated using the stage stacking method. Lyapunov stability analysis is applied to such a model for each decoupled linear subsystem. A degree of stability is derived from the eigenvalues of symmetric matrices as solutions of the Lyapunov matrix equations. Physically the degree of stability corresponds to the damping coefficient of the Lyapunov function defined at each stage. The degree of stability represents quantitatively the margin between the surge line and the steady state operating lines. The results allow specification of the stage from which the surge will occur when the compressor becomes unstable. The degree of stability is classified into three distribution patterns according to the rotational speed of compressor operation.

Key Words: Gas Turbine, Compressor, Stability, Surging, Lyapunov Stability Analysis, Degree of Stability, Surge Margin, Interconnected Subsystem

1. 緒 言

ガスタービンの構成要素である多段軸流圧縮機は、作動状態が変化する過渡状態のとき、ある条件で不安定状態となりやすく運転不能状態に陥る。この非定常不安定現象の一つがサーgingであり、圧縮機の作動範囲を制限する大きな要因となっている。そのためサーging限界線の予測^{(1)~(3)}、あるいはその現象の解明⁽⁴⁾、作動範囲拡大のための制御⁽⁵⁾等従来から多くの研究が行われてきた。

低回転数域の定常作動点から圧縮機を加速するとき、圧縮機流量は一時的に大きく減少し、出口圧力が上昇するいわゆる逆応答を示すためサーging線に急速に接近する⁽⁶⁾。また、定格回転数のとき負荷遮断が起これば、軸回転数が過回転を起こす前に、まず圧縮機出口圧力が急上昇するが、この場合には圧縮機流量減少をほとんど伴わない点を特徴とする逆応答が起これ、サーging線に接近する。通常ガスタービンの定格運転点とサーging点は接近していることが多く、回転数が高いだけにここでのサーgingは極めて重大であり、種々の制御方策がとられている。

このように動特性の観点から見ると、サーgingが起こる前には共通して逆応答が現れるが、タービンとのマッチングによって定まる定常作動点が圧縮機特性上のどの位置にあるかによって、その様相は異なる。サーging線は、現在までの多くの研究によって静的にほぼ精度よく予測できるまでに至っているが、定常作動点からサーging点までの余裕すなわちサーgingマージンを定量的に評価する手法の確立には至っていないと思われる。動特性解析や制御に必要なのは、あらかじめサーging線を求めておくことよりはむしろ、定常作動点が定まった時点でサーgingマージンが定量的に示されることであり、結果としてサーging線が求まればよいと考える。また、多段軸流圧縮機の場合、サーgingはどの段を起点として始まるのか特定することも、制御上極めて重要である。そこで本研究ではサーgingマージンの定量化とサーging起点段の特定を目的とする。

まず軸流圧縮機は各段をサブシステムとする結合系としてモデル化され、状態変数として流量、圧力のほかに温度を加えて解析する。このとき圧縮機各段のもつエネルギーを包括したリアプノフ関数を定義してリアプノフの安定性解析を適用する。その結果安定度の概念が導かれ、これに基づいて各段ごとの定常点での安定度を調べている。サーging線は安定度が零になる点

* 原稿受付 1996年3月8日。

*1 正員、東京理科大学理工学部 (〒278 野田市山崎 2641)。

として求め、その結果安定度はサージマージンを定量的に評価できるよい指標であると同時にサージ起点段の特定にも使用可能であることが示されている。

2. 圧縮機モデルと解析法

A : $3n \times 3n$ システム行列

A_n : n 段の平均環状面積 m^2

F : 3×3 任意正定値対称行列

G : 流量 kg/s

H : 3×3 対称行列(リアプノフ方程式の解行列)

l_n : n 段の流路の等価長さ m

N : 回転数 rpm

P : 圧力 Pa

PR : 圧力比

R : ガス定数 $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

s : 安定度

t : 時間 s

T : 温度 K

TR : 温度比

v : リアプノフ関数

V : 等価段容積 m^3

x : 状態変数ベクトル

κ : 比熱比

λ : 固有値

ρ : 密度 kg/m^3

σ : 時定数の逆数 s^{-1}

τ : 無次元時間

添 字

c : 圧縮機段

d : 設計点

G : 流量に対する状態変数

n : 段数

P : 圧力に関する状態変数

T : 温度に関する状態変数

0: 定常点

00: 標準大気状態

-: 修正量

2.1 基礎方程式 多段軸流圧縮機は、図1に示

すように段要素と段容積要素とが圧縮機の段数分交互に繰返される一次元管路モデルとする。段要素内では圧力上昇と温度上昇を、容積要素内ではガスダイナミックスを考慮する。

各段の支配方程式は、Willoh⁽⁷⁾の解析モデルを基礎にして、圧縮機 n 段めの流量 G_n , 圧力 P_n , 温度 T_n はそれぞれ次の非線形微分方程式で表される。

Fig. 1 Schematic model of compressor stage

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \frac{1}{V_n}(G_n - G_{n+1}) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{dG_n}{dt} = \frac{A_n}{l_n}(P_{cn} - P_n) \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{d(\rho_n T_n)}{dt} = \frac{\kappa}{V_n}(T_{cn} G_n - T_n G_{n+1}) \dots \dots \dots (3)$$

$$P_n = R \rho_n T_n \dots \dots \dots (4)$$

n 段での容積要素内で気体の状態方程式(4)を用いて密度を圧力に変換すれば、各段の流量、圧力、温度に関する微分方程式で表される。

$$\frac{dG_n}{dt} = \frac{A_n}{l_n}(P_{cn} - P_n) \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{\kappa R}{V_n}(T_{cn} G_n - T_n G_{n+1}) \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{dT_n}{dt} = \frac{RT_n}{V_n P_n} [(\kappa T_{cn} - T_n) G_n - (\kappa - 1) T_n G_{n+1}] \dots \dots \dots (7)$$

ここで圧縮機内の段要素出口の圧力と温度は、段特性によって決まり、それぞれ n 段めの圧力比、温度比を用いて次式で表される。

$$\begin{cases} P_{cn} = P_{n-1} \cdot PR_n & PR_n = f_p(\bar{G}_n, \bar{N}) \\ T_{cn} = T_{n-1} \cdot TR_n & TR_n = f_T(\bar{G}_n, \bar{N}) \end{cases} \dots \dots \dots (8)$$

$$\bar{G}_n = G \frac{\sqrt{T_n/T_{00}}}{P_n/P_{00}}, \bar{N} = \frac{N}{\sqrt{T_1/T_{00}}} \dots \dots \dots (9)$$

n 段めの圧力比と温度比は、単段での特性すなわち流量係数-圧力係数、流量係数-断熱効率特性を適用して段落特性法⁽⁸⁾によって求めることができ、修正流量、修正回転数の関数となる。さらに全段での圧縮機の流量特性は、第1段から順次最終段まで積み重ねて求めることができる。

2.2 結合モデル 式(5)~(7)で時間微分項を零とすると定常点が定まる。圧縮機の定常点は、タービンとのマッチングあるいは出口の絞りによって定まるが、ここではこれらのいずれかの条件によって定常点が定まっているものとする。各段の状態変数を定常点(添字0)からの微小変動量として次式で定義する。

$$x_{Gn} = \Delta G_n / G_{n0}, x_{Pn} = \Delta P_n / P_{n0},$$

$$x_{Tn} = \Delta T_n / T_{n0} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ガスタービンは、軸系の時定数の逆数が熱流体系の時定数の逆数に比べて極めて小さいというスティッフの性質をもつ⁽⁶⁾ため安定性解析のためには回転数一定としても一般性を失うことはない。この条件のもとで式(5)～(7)の線形化を行うと n 段めについて次式を得る。

$$\frac{dx_{Gn}}{d\tau} = \frac{\sigma_{Gn}}{\sigma_d} \left(x_{P,n-1} + \frac{\partial PR_n}{\partial \bar{G}_n} \frac{\bar{G}_{n0}}{PR_{n0}} x_{Gn} - x_{Pn} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{dx_{Pn}}{d\tau} = \frac{\sigma_{Pn}}{\sigma_d} \left[x_{T,n-1} + \left(\frac{\partial TR_n}{\partial \bar{G}_n} \frac{\bar{G}_{n0}}{TR_{n0}} + 1 \right) x_{Gn} - x_{Tn} - x_{G,n+1} \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{dx_{Tn}}{d\tau} = \frac{\sigma_{Tn}}{\sigma_d} \left[x_{T,n-1} + \left(\frac{\partial TR_n}{\partial \bar{G}_n} \frac{\bar{G}_{n0}}{TR_{n0}} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) x_{Gn} - x_{Tn} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} x_{G,n+1} \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(11)～(13)中の σ に関する項はそれぞれ次式で表され、定常点を定めたときに決定できる定数である。時定数の逆数の次元をもつから、時間に関しては、式(15)の設計点の値を用いて無次元化した。式中の A_d , l_d は、それぞれ最終段の平均環状面積、流路の等価長さを表す。式(14)は物理的にはそれぞれ各段の慣性係数、容量係数の逆数に対応している。

$$\sigma_{Gn} = \frac{A_n P_{n0}}{l_n G_{n0}}, \sigma_{Pn} = \sigma_{Tn} = \frac{\kappa R T_{n0} G_{n0}}{V_n P_{n0}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\tau = \sigma_d t, \sigma_d = \frac{A_d P_{d0}}{l_d G_{d0}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また式(11)～(13)の右辺第2項は、それぞれ段落特性法によって求められる各段の流量-圧力比特性、温度比特性の無次元こう配を表している。

ここで各段の状態変数ベクトルを式(16)で定義する。以後ベクトルは太字で、上付き T はベクトル、行列の転置を表すものとする。

$$\mathbf{x}_n = (x_{Gn}, x_{Pn}, x_{Tn})^T \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで圧縮機各段に対し次のベクトル微分方程式で表されるサブシステムを考える。

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{d\tau} = A_i \mathbf{x}_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (17)$$

A_i (3×3 行列) は i 段のサブシステムの内部を特性づける行列であり、要素の中には各段の特性によって定まるこう配 R_n, S_n が含まれており、安定性の解析に重要である。

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_n R_n & -\alpha_n & 0 \\ \eta_n (S_n + 1) & 0 & -\eta_n \\ \eta_n (S_n + \gamma) & 0 & -\eta_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、行列の各要素は次の置換えを行っている。

$$\frac{\sigma_{Gn}}{\sigma_d} = \alpha_n, \frac{\sigma_{Pn}}{\sigma_d} = \frac{\sigma_{Tn}}{\sigma_d} = \eta_n, \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \gamma$$

$$\frac{\partial PR_n}{\partial \bar{G}_n} \frac{\bar{G}_{n0}}{PR_{n0}} = R_n, \frac{\partial TR_n}{\partial \bar{G}_n} \frac{\bar{G}_{n0}}{TR_{n0}} = S_n \quad \dots\dots\dots (19)$$

α_n, η_n はそれぞれ設計点を基準にしたときの慣性係数比の逆数、慣性係数と容量係数の比を表している。

n 段の圧縮機は、式(11)～(13)より各段をサブシステムとする結合システムで表される。

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{d\tau} = A_i \mathbf{x}_i + \sum_{j \neq i} A_{i,j} \mathbf{x}_j \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (20)$$

$A_{i,j}$ (3×3 行列) は各段間の干渉を表す行列である。

$$A_{n,n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & \eta_n \\ 0 & 0 & \eta_n \end{bmatrix},$$

$$A_{n,n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\eta_n & 0 & 0 \\ -\gamma \eta_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (21)$$

圧縮機全体では次のブロック三重対角行列⁽⁹⁾となる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{x}_0) & A_{12}(\mathbf{x}_0) & 0 & \dots & 0 \\ A_{21}(\mathbf{x}_0) & A_2(\mathbf{x}_0) & A_{23}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dots \\ 0 & A_{32}(\mathbf{x}_0) & A_3(\mathbf{x}_0) & A_{34}(\mathbf{x}_0) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1}(\mathbf{x}_0) & A_n(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$ である。

式(22)の行列は、 n 段から構成される圧縮機の場合には $3n \times 3n$ の大きさとなる。各ブロック行列は、圧縮機の総合特性上の定常点が定まれば式(19)から決定できることを表現している。総合特性曲線上の定常点を動かせば行列の値も変化していく。

3. 安定性解析と安定度

圧縮機が安定に作動するためには、まず各段が安定でなければならない。圧縮機各段のリアプノフ関数として、次の二次形式⁽¹⁰⁾を考える。

$$v_i(\mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}_i^T H_i \mathbf{x}_i)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

一般のリアプノフ関数はエネルギーを表しているとはかぎらないが、ここでは状態変数が物理的変数である

から運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和に対応づけられる。ここで、対称行列 $H_i(3 \times 3)$ は、系が安定であれば、任意の正定値対称行列 $F_i(3 \times 3)$ に対するリアプノフ方程式の解として得られる。

$$A_i^T H_i + H_i A_i = -F_i \cdots \cdots (24)$$

式(23)を式(17)の解軌道に沿って時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{d\tau} &= \frac{1}{2} v_i^{-1/2} (\dot{\mathbf{x}}^T H_i + H_i \dot{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\mathbf{x}_i^T (A_i^T H_i + H_i A_i) \mathbf{x}_i}{2(\mathbf{x}_i^T H_i \mathbf{x}_i)^{1/2}} = \frac{-\mathbf{x}_i^T F_i \mathbf{x}_i}{2(\mathbf{x}_i^T H_i \mathbf{x}_i)^{1/2}} \\ &= \frac{-\mathbf{x}_i^T F_i H_i^{-1} H_i \mathbf{x}_i}{2(\mathbf{x}_i^T H_i \mathbf{x}_i)^{1/2}} \leq -\lambda_{\min} \left(\frac{1}{2} F_i H_i^{-1} \right) v_i \\ &= -s_i v_i \\ s_i &= \lambda_{\min} \left(\frac{1}{2} F_i H_i^{-1} \right) \end{aligned} \cdots \cdots (25)$$

を得る。

いま本研究対象の場合、リアプノフ関数はエネルギーを表しているので、式(25)の s_i は圧縮機各段がもっているエネルギーの減衰の程度を表していることになる。行列 FH^{-1} は三次の対称行列であるから固有値は三つの実数となり、このうち大きな固有値に支配される項はリアプノフ関数の減衰が速く、最小固有値が安定性を支配していることとなる。結局 s_i は各段の安定の程度を代表するスカラー量となっているから、定常作動点での圧縮機各段の安定度として評価できる。式(25)中の F は任意に選べるから単位行列とすると、リアプノフ方程式の解行列 H の最大固有値が安定度を支配していることになる。安定度 s がどこかの段で負になればその段から不安定になる。圧縮機は各段間の等価容量が小さく、したがって容量係数の逆数は大きな値となるため各段の結合が強い。そのためある段が不安定になればその影響は直ちに全段に及び、圧縮機がサージを起こすと考えられる。

4. 結果と検討

八段の陸船用の圧縮機を対象にしたときの数値計算例を以下に示す。計算に用いた圧縮機的设计点諸元は段数=8、質量流量=53.2 kg/s、圧力比=7.3、回転数=8500 rpmである。まず段落特性法にしたがって、圧縮機の総合特性を推定した。結果を後出の図9に示す。

各回転数ごとに圧縮機の総合特性曲線上の定常点を定めると、段落特性法により求められている圧縮機各段の状態から式(18)の行列が定まる。これより式(24)のリアプノフ方程式を F_i を単位行列として解き、解行列 H_i を求めれば、式(25)の括弧内の行列が定まり、

三つの実固有値が得られるから、その最小値を選ぶ。以上の手順により圧縮機各段の安定度を求めた。さらに流量が減少する方向に定常点を動かしていき、安定度が零となる段をサージ起点段とした。低、中、高回転数の代表として、圧縮機総合流量特性の相対修正回転数比が60、75、90%の場合について、安定度を求めた結果を図2~4に示す。また、これらに対応した各段の流量特性を図5~7に示す。ここでは段の特性を明確に識別できるように各段の入口を基準にした修正流量を用いて表示している。以後図2~7の記号は、図9の回転数一定線上の定常点に対応している。

回転数60%(図2)のときは、安定度は圧縮機の前段階から後段階に向かうにつれて大きくなる右上がりの傾向を示す。定常点がサージ線に接近するにつれて、後段階の安定度の減少する割合が大きいの、右上がり傾向は維持される。さらにサージ線に接近すると一段めの安定度が零となり、この段からサージに突入することがわかる。この回転数域では図5に示したように前方段の失速が支配的となっている。

Fig. 2 Distribution of degree of stability for $\bar{N}/\bar{N}_d=60\%$

Fig. 3 Distribution of degree of stability for $\bar{N}/\bar{N}_d=75\%$

Fig. 4 Distribution of degree of stability for $\bar{N}/\bar{N}_d=90\%$

Fig. 6 Each stage characteristics and operating points for $\bar{N}/\bar{N}_d=75\%$

Fig. 5 Each stage characteristics and operating points for $\bar{N}/\bar{N}_d=60\%$

Fig. 7 Each stage characteristics and operating points for $\bar{N}/\bar{N}_d=90\%$

回転数 75% (図 3) になると、全体的に安定度が低く、なおかつ全段がほぼ一定の安定度を示すようになる。流量減少に伴って各段の安定度の減少割合もほぼ一定である。すなわち 75% 回転数付近ではサージに入るときは前段、後段がほぼ同時にサージに入ること示している。このときは図 6 に示されているように各段の作動点は特性曲線の傾斜が零となる点の近傍に集中してきており、安定度はこの状態をよく表現している。

回転数 90% (図 4) では、低回転域のときは逆に後方段ほど安定度が低く、また流量減少とともに全段で安定度の変化する割合が大きい。後方段の安定度が大きく減少して、八段めからサージに入る。このときは図 7 からわかるように、八段めが失速状態になっており、後段失速が原因でサージに入ること示している。前方段は十分安定度をもっているが、回転数が高いときは総合特性曲線の傾斜が急である(チョークに近い)ため、前方段の安定度が十分であっても流量変

Fig. 8 Distribution of degree of stability

動範囲が極端に狭くなるために、後方段失速で全段が不安定になる。

図 8 は安定度が零となるときのすなわちサージ限界線上の安定度分布を各段ごとに、回転数比を 5% おきに

Fig. 9 Compressor map and surge line

Fig. 10 Flow coefficient at compressor stage

変えて求めた結果である。回転数の上昇とともに各段の安定度の分布が右上がりから右下がりに移行していき、中間の回転数域ではほぼ全段の安定度分布が平坦になる。この回転数域のとき圧縮機の作動範囲が最も広がっていることが図9からもわかる。

サージングは、圧縮機の特性的こう配(失速特性)、慣性係数、容量係数と密接な関係があり、このことは本報告で示した安定度が式(18)に基づいて算出されていることから明らかである。

図10は、サージ点における各段ごとの流量係数(軸流速度と周速の比)の分布を図2~4に対応させて示したものであり、これから安定度と強い相関をもっている

ことがわかる。逆にいえば安定度は、サージングを支配している種々のパラメータを定量的に取り入れているよき指標であると考えられる。

5. ま と め

多段軸流圧縮機の各段は、段要素と容積要素とからなり、状態変数として流量、圧力、温度を考慮した一次元管路モデルを用いて安定性を解析した。このとき圧縮機は各段をサブシステムとする結合システムとして表されることを示し、リアプノフの安定解析法を適用して、安定度によって各段ごとの状態を明らかにした。一般には圧縮機全体の安定性に対しては各段の干渉も考慮する必要がある。この干渉項は、圧縮機の幾何形状から決まる容量係数が支配的であり段間の干渉が強い場合、本論文では、圧縮機のいずれか一つの段の安定度が零になると全体が不安定になるとしてサージ線を求めた。そのため全体の安定性に対しては十分条件になっている。ここで提案している安定度は、圧縮機の定常作動線が決められれば求められ、サージマージンを定常作動線上で定量的に評価するよき指標となっていること、サージ起点段の特定が可能となったことも大きな特徴である。低回転域では前方段の安定度が低く、高回転域では逆に後段の安定度が低くなること、中回転域では全段でほぼ一定の安定度を示すことから安定度はサージングを支配している種々のパラメータを定量的に取り入れていると考えられる。

本研究に対して、有益なるご助言を賜った東京大学の葉山眞治教授、金子成彦助教授をはじめとして、流体振動研究会の皆様にも深く感謝の意を表す。

文 献

- (1) 竹矢一雄, 機論, 27-183 (1961), 1801-1808.
- (2) 大山耕一, 機論, 44-387 (1978), 3810-3818.
- (3) 西原義美, 機論, 58-555, B (1992), 128-135.
- (4) Greitzer, E. M., *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 98 (1976), 199-217.
- (5) Flowcs Williams, J. E. and Haung, X. Y., *J. Fluid Mech.*, 245 262, (1989), 245 262.
- (6) 稲垣詠一, *GTSJ*, 16-64 (1989), 85-94.
- (7) Willoh, R. G. and Seldner, K., *NASA TMX-1880* (1969).
- (8) 新版空気機械工学便覧(基礎編), (1979), 138-139, コロナ社.
- (9) 稲垣詠一・武田芳和, 機講論, No. 938 3 (1993-11), 442-444.
- (10) Siljak, D. D., *Large Scale Dynamic Systems*, (1978), 34-35, North-Holland.