歳差運動ならびに回転運動をする円柱まわりの流れの
数値シミュレーション*尾形 秀樹^{*1}, 赤松 映明^{*2}, 新谷 昌孝^{*3}Numerical Flow Simulation for Nutating Motion
and Rotating Motion of Circular Cylinder

Hideki OGATA, Teruaki AKAMATSU and Masataka SHINTANI

Unsteady incompressible viscous flows generated by nutating motion and rotating motion of a circular cylinder are analyzed numerically by the discrete vortex method with viscous diffusion model proposed by Ohgami and Akamatsu. This method is applied to the rotational coordinates. The calculation is executed for Reynolds numbers $Re=50, 1\,000$ and radii of orbit $R=3a, 0.9a, 0.32a$ (a =radius of the circular cylinder). Stream lines show that the rotating cylinder imparts to the fluid stronger motion than the nutating cylinder. The calculated force indicates that the hydrodynamic force caused by the fluid viscosity is directed toward the center of the orbit.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Unsteady Flow, Viscous Flow, Circular Cylinder, Nutating Motion, Rotating Motion, Discrete Vortex Method, Viscous Diffusion Model

1. 緒言

円柱の歳差運動(公転)と回転運動(公転+自転)はともに単純な運動様式であるにもかかわらず、これらの流れの差異も含めてその特性は明かでない。歳差運動は歳差式遠心血液ポンプや、波浪水面下の水平円柱(水平没水円柱)^{(1),(2)}まわりの流れに特徴的な運動であり、それぞれの分野で研究がなされている。

本研究ではこれらを単純化、つまり歳差式遠心血液ポンプのケーシングや水平没水円柱の水面の影響を除いた運動として、二次元無限領域内で円軌道を描きながら歳差運動(すりこぎ運動)ならびに回転運動を開始する円柱のまわりの非圧縮・非定常粘性流れを、粘性拡散モデルを用いた離散渦法⁽³⁾によって計算する。まず、この方法を回転座標系に適用する方法を示した後、公転半径とレイノルズ数をパラメータとして流れの数値解析を行う。

なお、計算に用いる離散渦法は流れ場に格子を形成する必要がなく、本研究のような二次元無限領域内の流れを解析するのに適している。また、粘性の効果を導入するために大上・赤松⁽³⁾によって提案された粘性拡散モデルは、新谷・赤松^{(4),(5)}によって具体的な問題に適用する方法が提示され、最近、大上⁽⁶⁾は類似の手法で円柱まわりの流れの計算を行なっている。従来

の離散渦法と比べた本計算方法の特徴については文献^{(3)~(7)}を参照していただきたい。

2. 計算方法

2・1 粘性拡散モデルを用いた離散渦法 粘性拡散モデルを用いた離散渦法の詳細な説明とその手順については文献^{(3)~(5)}に示されており、ここでは簡単にふれておく。

まず物体表面をN分割し、流れが物体表面を貫かないという境界条件、および総循環がゼロというケルビンの循環定理により、各表面要素で生成される離散渦の大きさを決定する。 i 番目の離散渦を中心位置 (ξ_i, η_i) 、循環 Γ_i 、渦コア半径 δ_i のガウス型の渦度分布で表わすと、任意の点 (x, y) での渦度 ω は、

$$\omega = \sum_i \frac{\Gamma_i}{\pi \delta_i} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2}{\delta_i^2} \right\} \quad (1)$$

となる。

ところで渦度の輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad \nu: \text{動粘性係数} \quad (2)$$

は $\mathbf{u}_d = -\nu \nabla \omega / \omega$ で定義される粘性拡散速度を用いることにより、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) \omega\} = 0 \quad (3)$$

と書き換えられる。この式は速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)$ で移動する閉曲線に沿って循環が保存されることを示している。

* 原稿受付 1994年3月30日。

^{*1} 学生員、京都大学学部生 (〒606 01 京都市左京区吉田本町)。^{*2} 正員、京都大学工学部。^{*3} 学生員、京都大学大学院。

Nutating motion

Rotating motion

Fig. 1: Nutating motion and rotating motion

したがって物体表面から放出された離散渦を、その循環を一定にしたまま距離 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)\Delta t$ (Δt : 時間刻み幅) だけ移動させることで粘性流れが表現できる。

離散渦を移動させた後、再び境界条件とケルビンの定理に従って表面で生成される渦を決定し、以後これらを繰り返しながら時刻を進めていく。

これが粘性拡散モデルを用いた離散渦法の概略であり、剥離点の設定などの特別な配慮を必要とせず境界層の発達や剥離現象を扱うことができる。

2.2 歳差運動と回転運動 歳差運動と回転運動の様子をFig. 1に示す。歳差運動は点Oに対して公転(角速度 Ω)のみを行なっているのに対し、回転運動はさらに同じ角速度の自転も加わっている。

円柱表面上の境界条件は、両運動ともに流体が物体表面を貫かないことは共通しているが、接線方向の速度を異にしている。そこで次のように考えることによって歳差運動と回転運動を区別して表現することができる。

回転運動の場合、角速度 Ω で自転している円柱はその内部領域に一樣な渦度 2Ω を持つ流体で置き換えることができる。さらにこの渦度が円柱表面に接する流体に及ぼす影響は、円柱の中心においた反時計まわり方向の循環 $\Gamma_0 = 2\pi a^2\Omega$ (a : 円柱の半径) によるものと等しい。すなわち自転する円柱と循環 Γ_0 とは等価である。一方歳差運動ではこのような循環を置く必要はない。

したがってある時刻までに物体表面上の渦層ならびに表面から放出された渦による総循環を $\sum_i \Gamma_i$ とすると、静止状態から出発した流れに対してケルビンの循環定理は、

$$\text{歳差運動} : \sum_i \Gamma_{ni} = 0 \quad (4)$$

$$\text{回転運動} : \sum_i \Gamma_{ri} = -\Gamma_0 \quad (5)$$

となる。ここに添字 n および r はそれぞれ歳差運動および回転運動を表わす。

Stational coordinates (x', y') Rotational coordinates (x, y)

Fig. 2: Coordinates

次節で述べるように本計算は回転座標系で行なう。運動開始前の静止状態は回転座標系では流体・円柱ともに角速度 $-\Omega$ で自転している状態にある。運動開始後、円柱は見かけ上、回転運動では静止状態に変わり、また、歳差運動では角速度 $-\Omega$ の自転を続けたままである。したがって運動を開始した瞬間に円柱表面上に発生する渦層の渦総循環は回転運動では $-\Gamma_0$ 、歳差運動では零である。

2.3 座標系 計算は静止座標系 (x', y') に対して角速度 Ω で回転する座標系 (x, y) で行なう(Fig. 2)。この座標系では円柱は公転せずに、一樣な渦度 -2Ω を持つ流体の中にある。

回転座標系での連続の式とナビエ・ストークスの式は ρ , p をそれぞれ流体の密度、圧力とすると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{u} \times \Omega \quad (7)$$

となる。ただし、 $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, $\Omega = (0, 0, \Omega)$ である。ナビエ・ストークスの式には遠心力 $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ とコリオリの力 $2\mathbf{u} \times \Omega$ が現われている。しかし $\mathbf{r}$ および Ω がそれぞれ x, y 方向成分および z 方向成分しか持たないことに注意してこれらの rot をとるといずれも零になる。したがって式(7)の rot をとると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (8)$$

$$\therefore \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) \omega\} = 0 \quad (9)$$

すなわち回転座標系でも速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)$ で移動する閉曲線に沿って循環が保存される。

ところで回転・静止両座標系での渦度 ω , ω' の間には、

$$\omega = \omega' - 2\Omega \quad (10)$$

なる関係が成立する。静止座標系に関する式(2)および(3)において、 $\omega, \mathbf{u}, \mathbf{u}_d$ を $\omega', \mathbf{u}', \mathbf{u}'_d$ と書きあらため、式

Fig. 3: Inviscid flow viewed from rotating coordinates

(10) の関係を式 (8) または (9) に代入すると各項は

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega') \quad (11)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_d\omega) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_d'\omega') \quad (\mathbf{u}_d' = -\nu \frac{\nabla \omega'}{\omega'}) \quad (12)$$

と書き換えられ、

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d')\omega'\} = 0 \quad (13)$$

と変形できる。

ここで式 (9) と式 (13) のもつ意味を考えてみる。式 (9) は先に述べたように、回転座標系上で速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)$ で移動する閉曲線に沿って循環が保存されることを示している。この循環のうち離散渦による静止座標系上での寄与を Γ とし、またこの閉曲線が囲む面積を S とすると、回転座標系での速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d)$ に対して保存される循環は式 (10) より $(\Gamma - 2\Omega S)$ である。しかし一般に $\text{div } \mathbf{u}_d \neq 0$ であるのでこの面積 S は流れとともに変化し、したがって離散渦による循環 Γ は保存されない。これでは離散渦の循環が保存されるという粘性拡散モデルの利点が生かされない。しかし式 (13) は速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d')$ で離散渦を移動させることによってその離散渦の循環 Γ が保存されることを示しており、実際の計算ではこちらを用いるほうが便利である。

2.4 非粘性解析 円柱が非粘性の静止流体中で円軌道を描くときの流れは解析的に解くことができる。

いま、回転座標系からみて次の流れ関数 ψ で表わされる流れを考える (Fig. 3)；

$$\psi = \frac{\Omega}{2} r_2^2 - \frac{\Omega R a^2 \sin \theta}{r_1} \quad (14)$$

これは一様な渦度 -2Ω の中に強さ $\Omega R a^2$ の二重吹出しがある流れであり、流線をFig.3に示す。この流れを静止座標系からみれば二重吹出しのみが円軌道を描いている非定常ポテンシャル流れである。

ここで $\psi = \Omega(R^2 + a^2)/2$ とおくと一つの流線は $r_1 = a$ および $r_2 = R$ となる。これより $r_1 = a$ なる円柱壁が正しく形成されていることがわかる。また円柱表面に沿う速度 u を求めると次のようになる；

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\Omega(a + 2R \sin \theta) \quad (15)$$

Table 1: Conditions of computation

		$Re = 1000$	$Re = 50$
$R/a = 3$	$(\Omega \Delta t = 0.06 \text{ rad})$	Case 1	Case 2
$R/a = 0.9$	$(\Omega \Delta t = 0.15 \text{ rad})$	Case 3	Case 4
$R/a = 0.32$	$(\Omega \Delta t = 0.30 \text{ rad})$	Case 5	Case 6

まず、粘性のない場合について円柱に作用する流体力を求めておこう。そのためにベルヌーイの式を用いて円柱表面の圧力を計算する。回転座標系でみているのであるから流体には遠心力とコリオリの力が働き、それぞれの単位体積あたりのポテンシャルエネルギー ϕ_1 および ϕ_2 は表面上で、

$$\phi_1 = -\frac{\Omega^2}{2} r_2^2, \quad \phi_2 = 2\Omega\psi = \text{const.} \quad (16)$$

となる。これらを用いると、一つの流線である円柱表面に対してベルヌーイの式

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_1 + \phi_2 = \text{const.} \quad (17)$$

が成立する。これに式 (15), (16) を代入すると、図3の点Aを基準とする圧力係数 C_p は、

$$C_p = \frac{p - p_A}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -4 \sin^2 \theta - \frac{2a}{R} \sin \theta \quad (U = R\Omega) \quad (18)$$

となる。さらにFig.3に示すように流体力 F_r, F_θ をとり、 $\rho U^2 d/2$ で無次元化してそれぞれ C_r, C_θ とすると、圧力係数 C_p を円柱表面上で積分することにより、

$$C_r = \frac{\pi a}{R}, \quad C_\theta = 0 \quad (19)$$

を得る。

2.5 計算条件 円柱が静止流体中で突然運動し始める場合について計算を行なう。計算条件は歳差運動および回転運動を1対として、表1に示すように公転半径 R と円柱半径 a の比 R/a 、レイノルズ数 $Re = U(2a)/\nu$ を与えて計6対に対して行なった (case 1~6)。ここに代表速度 $U = R\Omega$ である。特に case 3~6 は公転中心が円柱の内部にある時の運動である。

なお、本計算では離散渦のコア半径 δ_i は渦間隔に比例させて広げ、またサブエレメント法^{(4),(8)}も用いた。

またすべての計算に対して共通した条件は、表面分割数 $N = 40$ 、サブエレメント数 $N_{sub} = 10$ である。

3. 結果と考察

3.1 円柱の運動様式に基づく考察 まず回転と歳差、 $R/a > 1$ と $R/a < 1$ の場合の流れの相違を説明するに当たり、流れについての考察を加えておく。Fig. 4は円柱表面上の点P、Qの移動の様子を示す。歳差運

Fig. 4: Moving configuration of cylinder

動、回転運動によって点P, Qはそれぞれ点Pn, Qnおよび点Pr, Qrに移動する。

さて、運動初期の円柱表面上の境界層について考える。まず $R/a > 1$ の場合、回転運動では点P, Qと点Pr, Qrは円柱の進行方向に対して角度 90° の位置にあり、境界層はほぼこれらの点で剥離を起こし渦として後流中に放出されると考えられる。一方、歳差運動では旋回円柱上方の点Pnは進行方向に対して背面となり、点Pnの境界層はより一層容易に剥離を起こす。円柱下方の点Qnでの境界層は円柱の前面に廻り戻されて円柱表面上に留まっており、後流渦として放出されない。つまり旋回円柱内側からの渦の放出は抑制されると考えられる。

また $R/a < 1$ の場合点Qrが点Qの後方に引き下がり、円柱表面上に $R/a > 1$ の場合とは逆の方向の渦の生成を助長することになる。

3・2 渦点分布と流線 円柱表面から放出された離散渦の分布の代表例をFig.5に示す。渦の正負を赤と青で区別して表しており、上述の考察通りの渦の生成が見られる。 $Re = 50$ の渦点の分布は拡散が著しく、渦列としてのパターンは明瞭ではない。

ここではとくに case 1 と case 5 に注目してみる。まず case 1 を見ると、円柱の上部、下部から交互に渦塊が放出されている。しかし歳差運動(N)では円柱下部から放出された正の渦(赤)が回転運動(R)に比べてその占める領域は狭い。これは3・1節で述べたように、歳差運動では円柱下部での剥離が抑制されているためである。次に case 5 を見ると歳差運動では円柱上部は剥離が生じ易く、放出された渦(青)は広い領域を占め波打っており、一方の下部で生成された渦は円柱表面にまわりついて放出されていないことが観察される。

Fig.6は case 1 と case 5 に対する静止座標系での流線で

ある。Case 1 では渦点分布でも見られた正負交互の渦がA, B, Cの順に放出されている。また上で述べたように歳差運動では2番目に放出された正の渦Bは弱く、またFig.5, 6の case 1 をみると歳差運動の方が後流渦のまわり込みが早いことがわかる。

Case 5 は $R/a < 1$ の流れである。他の $R/a < 1$ の流れも定性的にこれと同じであり、時刻が進むにつれて同心円状の流線群が形成されていくのが観察される。流体が非粘性の場合、2・4節で述べたように円軌道を描く円柱は二重吹出しで表現できるので、運動の初期は粘性のある場合でも二重吹出し流れに類似している。その後粘性の影響で流体は円柱に引きずられてこのような旋回流になる。各時刻における流線を観察した結果、case 3~6 にみられる同心円状の流線群が現れるのは回転角がおよそ 400° の時であることがわかる。また流線の間隔をみると、回転運動の方が歳差運動よりも強い旋回流が発生していることがわかる。このことと case 1 の回転運動でのみ正の渦Bが認められたことから、回転運動の方が歳差運動よりも激しい運動を流体に与えるといえる。これは回転運動には円柱の自転が加わっていることを考えるとわずける。

3・3 速度変化 二重吹出し流れから旋回流への移行を確認するために、回転座標上で円柱の上方 $a/2$ の点において x 方向の速度成分の時間変化を調べた。Fig. 7は Case 3, 4 についてこの点の静止座標系に対する無次元化流速 u/U の時間経過を示している。式(14)の非粘性流れの二重吹出しの項のみをみると、 $r_1 = 1.5a$, $\theta = \pi/2$ の位置での流速は $u/U = 0.44$ である。旋回流が形成されるにしたがって u/U は正から負の方向に変わる。 400° 付近から負、すなわち円柱の進行方向に速度を持つようになる。円柱から放出された渦点の分布を確認した結果、これは最初に放出した渦が再び円柱にぶつかる時刻にほぼ対応することがわかる。これはまた同心円状の流線が現れ始める時刻でもある。

これらの速度変化の様子は次のように解釈することができる。時刻ゼロの瞬間は流れは非粘性と考えられるから上で示したように 0.44 となるが、しだいに円柱に引きずられてその値を減じる。回転角が 400° 付近に達するとはじめに放出した負の渦と衝突し、円軌道の外側に負の渦度場が形成される。これによって円柱の近くでは円柱の進行方向への速度が誘起される。

4. 結論

計算を行なうにあたり、まず粘性拡散モデルを用いた離散渦法の回転座標系への適用方法を示した。計算によって得られた知見は以下の通りである。 $R/a = 3$,

Fig. 5 : Distributions of discrete vortices (N) ; Nutating motion, (R) ; Rotating motion

Fig. 6: Stream lines on the stationary coordinates for Case 1 and Case 5

Fig. 7: Variations of x-directional non-dimensional velocity u/U at the position $(0, 1.5a)$

$Re = 1000$ の流れにおいて歳差運動と回転運動の渦の出方に、剥離の違いによる顕著な差がみられた。また $R/a < 1$ の流れでは、円柱が約 400° 回転すると同心円状の流線群が現れ始めた。その流れは歳差運動よりも回転運動の方が速い。総じて、回転運動の方が歳差運動よりも激しい運動を流体に加えるといえる。なお Fig. 5 の色付け作業に協力願った和田雄一郎君に謝意を表す。

文 献

- (1) 大塚・池田, 関西造船協会誌, **213**, (平2), 177-186.
- (2) 大塚・池田, 関西造船協会誌, **219**, (平4), 135-141.
- (3) 大上・赤松, 機論, **54-505**, B(昭63), 2283-2290.
- (4) 新谷・赤松, 機論, **60-572**, B(平6), 112-19.
- (5) M. Shintani and T. Akamatsu, Comp. Fluid Dyn. J., **3-2**, (1994), 237-254.
- (6) 大上・綾野・藤原・細川, 機論, **61-582**, B(平7), 372-378.
- (7) 大上・藤原・細川, 機論, **57-544**, B(平3), 4092-4099.
- (8) R. I. Lewis, *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge University Press, (1991), 27-32.