軸流中の細長円筒上の層流境界層*
(係数の漸近解析による級数解の拡張)山下 新太郎*¹, 桜井 孝成*², 近藤 邦和*¹The Laminar Boundary Layer on a Long Thin Cylinder in Axial Flow
(Extension of Series Solutions Using Asymptotic Analysis of Coefficients)

Shintaro YAMASHITA, Takatsugu SAKURAI and Kunikazu KONDO

The laminar boundary layer in axial flow along a long thin cylinder with constant temperature is investigated by expanding in powers of a variable ξ that was used by Seban & Bond [J. Aero. Sci., 18(1951), 671.]. The series solutions for the skin friction, the local Nusselt number and the other boundary-layer parameters are obtained up to about 20 terms, and by utilizing Padé approximants, their singular points on a complex plane are evaluated. Euler transformations then yield more convergent expansions, and by reflecting the known asymptotic behavior of the solutions on the extended series solutions, reasonable solutions are obtained for sufficiently large ξ . It is clarified that the solutions by the method of analytic continuation using Padé approximants are also reasonable. Padé approximants are applied further to velocity and temperature distributions.

Key Words: Boundary Layer, Axisymmetric Flow, Shear Flow, Skin Friction, Heat Transfer, Padé Approximants, Euler Transformation

1. 緒 論

本研究は一般的な軸流中の細長円筒上の層流の速度・温度境界層を解析したものである。この問題は境界層に及ぼす各種の影響のうち、横方向曲率効果に関する問題の代表として古くから理論的に興味をもたれてきたものであり、実際上も海中ケーブルの摩擦抗力や細線を利用した気体の熱伝導率の測定法⁽¹⁾に関連して重要である。

この問題については、最初に Seban-Bond⁽²⁾ が境界層の比較的薄い所での表面摩擦係数や熱伝達率などについて3項までの級数解を求め、後に Kelly⁽³⁾ が数値の修正を行った。境界層が厚い十分下流では、速度場に対する漸近解が Glauert-Lighthill⁽⁴⁾ と Stewartson⁽⁵⁾、温度場に対して Bourne-Davies⁽⁶⁾ により得られている。これらの級数解と漸近解がともに妥当でない中間の領域については、運動量積分方程式に基づく近似解⁽⁴⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾ があるが、定量的には正しくなく、級数解と漸近解の間の内挿の目安を与えるものと

して用いられている。Jaffe-Okamura⁽⁸⁾ は流れ方向の微分を差分で近似することにより、表面摩擦などの境界層パラメータと速度分布を求めている。

さて、Seban らの級数は収束半径が有限で、単に項数を増すだけでは解の改善にはならない。しかし、摂動展開を高次まで拡張し、その係数を解析することで収束性のよい解が得られる可能性がある⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。Curle⁽⁹⁾ は表面摩擦と排除面積について級数解を20項まで求め、その特異点を評価して、オイラー変換により流れ方向の全領域で妥当な解を調べている。Curle はコーシー・アダマールの定理に基づく比の方法(Ratio Method)によりこの級数の収束半径を求めた。この方法は特異点が実数の場合に有効であるが、この級数の特異点は実は複素平面上にある。しかし、実軸からのずれが小さいため、収束半径の評価としてはやや大きい程度であり、オイラー変換により全領域で妥当な解が得られたものである。

本研究では、円筒上の速度境界層についての級数解の特異点を Padé 近似⁽¹⁰⁾ を応用して評価し、Curle⁽⁹⁾ より正しい値を得た。これに基づき、オイラー変換により解を拡張した。さらに、円筒表面温度が一定の場合の温度境界層についても、同様な級数解析により局所ヌセルト数の級数解を拡張した。次に速度場に対

* 原稿受付 1996年8月21日。

*¹ 正員、岐阜大学工学部 (〒501 11 岐阜市柳戸1-1)。*² 正員、(株)東芝中部システムセンター (〒451 名古屋市中西区名西2-33-10)。

する Glauert-Lighthill⁽⁴⁾ と温度場に対する Bourne-Davies⁽⁶⁾ の漸近解から、漸近的な解の挙動を拡張された級数解に反映させることで、流れ方向の全域で妥当な解を求めた。また Padé 近似そのものによる解析接続の解の有効性を調べ、Padé 近似による速度分布と温度分布を求めた。

2. 流れの基礎式

図1のように速度 U の一様な軸流中に半径 a の円筒が置かれているとする。座標系を、原点が円筒先端の中心にある円筒座標系とし、軸方向距離を x 、半径方向距離を r 、対応する速度成分を u, v とする。非圧縮性流体の軸対称流れの境界層の連続、運動量、エネルギーの式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 ν は流体の動粘度、 α は温度伝導率であり、境界条件は次式である。

$$\begin{aligned} r=a: u=v=0, \quad T=T_1, \\ r \rightarrow \infty: u=U, \quad T=T_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

式(1)を満たすように流れの関数 ϕ を導入する。

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(5)$$

Seban-Bond⁽²⁾ に従い、次のような新たな変数 ξ と η を導入する。

$$\xi = \frac{4}{a} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{r^2 - a^2}{4a} \quad \dots\dots\dots(6)$$

流れの関数 ϕ は、無次元関数 $f(\xi, \eta)$ により次式のように表される。

$$\phi = a \sqrt{\nu x U} f(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots(7)$$

温度 T に対し、無次元化温度 $g(\xi, \eta)$ を次のように定義する。

$$g(\xi, \eta) = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(5)～(7)から速度成分 u, v は次式となる。

$$u = \frac{U}{2} \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v = \frac{a}{2r} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \xi} - f \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

Fig. 1 Flow field and a coordinate system

式(2)、(3)は、式(6)～(9)により次のように変換される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 + \xi \eta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ + \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 + \xi \eta) \frac{\partial g}{\partial \eta} \right] + f \frac{\partial g}{\partial \eta} \\ + \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 σ はプラントル数である。式(4)の境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta=0: f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad g=1, \\ \eta \rightarrow \infty: \frac{\partial f}{\partial \eta} = 2, \quad g=0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12)$$

3. 摂動解

式(10)～(12)の解を、円筒前縁からの摂動解として、 f, g を ξ のべきで次式のように展開する。

$$f(\xi, \eta) = f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \dots \quad \dots\dots(13)$$

$$g(\xi, \eta) = g_0(\eta) + \xi g_1(\eta) + \xi^2 g_2(\eta) + \dots \quad \dots\dots(14)$$

式(13)を式(10)に代入して、 ξ のべきで整理した係数式から $f_n(\eta)$ に関する以下のような一連の常微分方程式系が得られる。

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} n \geq 1: f_n''' + f_0 f_n'' - n f_0' f_n' + (n+1) f_0'' f_n \\ = -\eta f_{n-1}''' - f_{n-1}'' \\ + \sum_{r=1}^{n-1} [(n-r) f_r' f_{n-r}' - (r+1) f_r f_{n-r}'] \end{aligned} \quad \dots\dots(16)$$

ここでダッシュは η に関する微分を表す。同じように $g_n(\eta)$ に対しては、以下の方程式系を得る。

$$\frac{1}{\sigma} g_0'' + f_0 g_0' = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned} n \geq 1: \frac{1}{\sigma} g_n'' + f_0 g_n' - n f_0' g_n = -\frac{1}{\sigma} (\eta g_{n-1}'' - g_{n-1}') \\ - \sum_{r=1}^n [(r+1) f_r g_{n-r}'] + \sum_{r=1}^{n-1} [r f_n' g_r] \end{aligned} \quad \dots\dots(18)$$

式(12)の境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta=0: f_n = f_n' = 0 (n \geq 0), \quad g_0 = 1, \quad g_n = 0 (n \geq 1) \\ \eta \rightarrow \infty: f_0' = 2, \quad f_n' = 0 (n \geq 1), \quad g_n = 0 (n \geq 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここではプラントル数を Seban-Bond⁽²⁾ の解析と同じ $\sigma=0.715$ として、式(15)～(19)を数值的に解く。数値計算は $\eta \leq 16$ として刻み幅 0.0004～0.001 で FORTRAN の 4 倍長計算で行った。その結果から表面摩擦、排除面積、運動量面積、局所ヌッセルト数が級数解で得られる。

無次元表面摩擦は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{a\tau}{\mu U} &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} \\ &= 1.328 \, 2 \xi^{-1} + 0.694 \, 32 - 0.164 \, 14 \xi + \cdots \\ &\cdots \cdots \cdots (20)\end{aligned}$$

排除面積 Δ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_{r=a}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) 2\pi r dr \\ &= 2\pi a \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [2\eta - f(\xi, \eta)] \cdots \cdots \cdots (21)\end{aligned}$$

これを、 $4\nu x/Ua^2$ を前に出して整理すれば、無次元値として次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\pi a^2} &= \frac{4\nu x}{Ua^2} (3.441 \, 6 \xi^{-1} + 0.035 \, 856 \\ &\quad + 0.210 \, 11 \xi + \cdots) \cdots \cdots \cdots (22)\end{aligned}$$

運動量面積 Θ は次式

$$\Theta = \int_{r=a}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) 2\pi r dr \cdots \cdots \cdots (23)$$

で定義されるが、式(2)を積分した次なる関係(運動量積分方程式)。

$$\rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} = 2\pi a \tau \cdots \cdots \cdots (24)$$

により無次元で次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\Theta}{\pi a^2} &= \frac{4\nu x}{Ua^2} (1.328 \, 2 \xi^{-1} + 0.347 \, 16 \\ &\quad - 0.054 \, 715 \xi + \cdots) \cdots \cdots \cdots (25)\end{aligned}$$

局所ヌッセルト数 Nu は次式で定義される。

$$Nu = \frac{2\pi a}{T_1 - T_0} \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a} \cdots \cdots \cdots (26)$$

$\sigma=0.715$ の場合には次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{Nu}{4\pi} &= -\frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0.589 \, 80 \xi^{-1} + 0.332 \, 66 \\ &\quad - 0.078 \, 544 \xi + \cdots \cdots \cdots (27)\end{aligned}$$

Table 1 Coefficients of series solutions

n	$\frac{a\tau}{\mu U}$	$\frac{\Delta}{\pi a^2}$	$\frac{\Theta}{\pi a^2}$	$\frac{Nu}{4\pi}$
0	1.328229345	3.441575315	1.328229345	0.589803643
1	0.694322202	0.035855864	0.347161101	0.332675870
2	-0.164144378	0.210111911	-0.054714793	-0.078544325
3	0.101584360	-0.204858388	0.025396090	0.048547041
4	-0.075960237	0.197883173	-0.015192047	-0.036043268
5	0.061298692	-0.193923100	0.010216449	0.028723745
6	-0.051160960	0.192029808	-0.007308709	-0.023532031
7	0.043227559	-0.191232335	0.005403445	0.019367238
8	-0.036487293	0.190857445	-0.004054144	-0.015751987
9	0.030452561	-0.190458673	0.003045256	0.012459881
10	-0.024880200	0.189747152	-0.002261836	-0.009382729
11	0.019654518	-0.188550825	0.001637877	0.006474819
12	-0.014731883	0.186794704	-0.001133222	-0.003726505
13	0.010111718	-0.184495796	0.000722266	0.001150376
14	-0.005819919	0.181769947	-0.000387995	-0.000226614
15	0.001898551	-0.178850990	0.000118659	0.000336793
16	-0.001601075	0.176125657	-0.000094181	-0.000230967
17	-0.004623443	-0.174191504	-0.000256858	-0.000768659
18	0.007112757	0.173950813	0.000374356	0.000793167
19	-0.009016210	-0.176762692	-0.000450810	-0.000866982
20	0.010286840	0.184691212	0.000489850	0.000932194

これらの級数解の係数を 21 項まで表 1 に示す。

4. 解の拡張

4.1 係数の漸近解析 表 1 を調べると、 Δ を除く級数では $n=14 \sim 16$ でそれまでの係数の符号の規則的な変化に異常が見られる。Curle⁽⁹⁾ は τ のこの異常性について、Glauert-Lighthill⁽⁴⁾ の漸近解

$$\begin{aligned}\frac{a\tau}{\mu U} &= \frac{2}{\beta} + \frac{1.154 \, 4}{\beta^2} - \frac{7.041 \, 0}{\beta^3} + \cdots \\ \beta &= \ln \left(\frac{4\nu x}{Ua^2} \right) = \ln \left(\frac{\xi^2}{4} \right)\end{aligned} \cdots \cdots \cdots (28)$$

から、大きな ξ に対する τ の隠れた逆対数的挙動によるものと推定し、 τ^{-1} の級数を調べた。そしてその係数の符号が規則的に交互に変わることから、収束半径を決める特異点が負の実軸上の $\xi = -1.058$ (Curle の変数では -0.374) であると評価し、その特異点をオイラー変換 $z = \xi/(\xi + 1.058)$ により無限遠に追い払い、収束性のよい新たな変数 z での級数を得た。さらにその級数の一部を漸近解で置き換えることにより、 $z=1$ 付近で収束性のよい残りの級数を与えた。

Θ , Nu についてもそれぞれ Glauert-Lighthill⁽⁴⁾, Bourne-Davies⁽⁶⁾ により漸近解が得られており、大きな ξ での解の逆対数的挙動が認められる。そこで Θ^{-1} , Nu^{-1} で調べてみると、 Nu については符号の不規則性は消えるが、 Θ については逆数で調べても符号の不規則性が存在する。級数の係数の大きさや符号が不規則に変わる場合には、特異点の位置を探すのに後述の Padé 近似が有効である。Padé 近似については文献(10)に詳しいが、このほかに成書⁽¹²⁾⁽¹³⁾ がある。本研究では Padé 近似を用いてこれらの級数の特異点を調べた。

τ については、Curle⁽⁹⁾ が示したように、下流での漸近解の逆対数的挙動から逆数で調べたほうが収束性がよいと考えられる。そこで τ^{-1} で調べるとその級数は式(20)より次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\mu U}{a\tau} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+1} \\ &= 0.752 \, 88 \xi - 0.393 \, 56 \xi^2 + 0.298 \, 77 \xi^3 + \cdots \\ &\cdots \cdots \cdots (29)\end{aligned}$$

表 2 の a_n 欄に、この級数の最初の 21 項の係数を示す。関数の対数微分に対する Padé 近似で特異点を調べると、原点から最も近い特異性は、複素平面上の点

$$-0.95 \pm 0.15i \cdots \cdots \cdots (30)$$

の近傍に存在する。係数の符号の変化が規則的であることから、特異点は実軸上にあると見られたが、この方法によれば複素数であることがわかる。この共役複

Table 2 Coefficients of series for $\mu U/a\tau$

n	a_n	b_n	c_n	d_n
0	0.7528820	0.7152379	-0.2847621	-0.9634239
1	-0.3935636	0.3600468	-0.1399532	0.4817119
2	0.2987747	0.2610176	-0.0723157	-0.2044768
3	-0.2624006	0.2044234	-0.0455766	-0.0998106
4	0.2472478	0.1678529	-0.0321471	-0.0468921
5	-0.2417790	0.1424806	-0.0241860	-0.0275124
6	0.2412616	0.1238192	-0.0190379	-0.0183998
7	-0.2433641	0.1095009	-0.0154991	-0.0132344
8	0.2467726	0.0981638	-0.0129474	-0.0100236
9	-0.2506673	0.0889631	-0.0110369	-0.0078952
10	0.2544967	0.0813463	-0.0095628	-0.0064097
11	-0.2578706	0.0749361	-0.0083972	-0.0053295
12	0.2605072	0.0694667	-0.0074564	-0.0045177
13	-0.2622041	0.0647448	-0.0066838	-0.0038908
14	0.2628239	0.0606268	-0.0060399	-0.0033956
15	-0.2622858	0.0570037	-0.0054963	-0.0029969
16	0.2605614	0.0537911	-0.0050324	-0.0026705
17	-0.2576726	0.0509231	-0.0046325	-0.0023994
18	0.2536903	0.0483469	-0.0042847	-0.0021716
19	-0.2487337	0.0460200	-0.0039800	-0.0019778
20	0.2429687	0.0439079	-0.0037111	-0.0018116
21				-0.0016676
22				-0.0015420

素数の特異性により収束半径は約 0.96 となり, Curle の収束半径は過大評価であったと考えられる。

次にオイラー変換により級数を拡張する。オイラー変換は次式で与えられる。

$$z = \frac{\xi}{\xi + c}, \quad c > 0 \quad (31)$$

この変換により物理的に意味のある範囲は $0 \leq z < 1$ に移り, 物理的な特異性である無限速は $z=1$ に固定される。ここでもし, 級数の邪魔な特異点が複素数 $\xi_0, \xi_0^* = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha < 0$) であるならば, オイラー変換によりこれらが移る点, z_0, z_0^* が原点から最も遠くなるという意味での最適オイラー変換は, 式(31)の定数 c が $c = -\alpha$ の場合であり, またオイラー変換された級数が収束するための条件は, $c < -2\alpha$ である⁽¹⁰⁾。この変換により複素 ξ 平面上の特異性が複素 z 平面上では $|z| > 1$ に移り, 収束半径は 1 となる。

これより, 式(29)に対する最適オイラー変換は次式である。

$$z = \frac{\xi}{\xi + 0.95} \quad (32)$$

Curle⁽⁹⁾ の収束半径は過大評価であったが, そのオイラー変換は収束するための条件を満たしている。式(29)を式(32)でオイラー変換すると次のような展開となる。

$$\begin{aligned} \frac{\mu U}{a\tau} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1} \\ &= 0.71524z + 0.36005z^2 + 0.26102z^3 + \cdots \end{aligned} \quad (33)$$

表 2 の b_n 欄にこの級数の最初の 21 項の係数を示す。

この級数の収束半径は 1 であり, もとの級数の収束半径を超えたところでも収束し, 級数の収束性を十分に改善したといえる。Curle の結果との直接的な比較はしていないが, より最適なオイラー変換を行ったことにより, Curle の得た級数解より収束性が改善されていると考えられる。

この級数は, z が 1 に近づくと収束は当然遅くなる。この収束性を改善するために, ξ が大きいところでの級数解の漸近的挙動を調べる。特異点 $z=1$ の近傍では, 式(28), (32)から τ^{-1} は次のようになる。

$$\frac{\mu U}{a\tau} \sim -\ln(1-z) + A + B[\ln(1-z)]^{-1} + \cdots \quad (34)$$

これより式(33)の主たる特異性は $-\ln(1-z)$ の形をもっている。そこで, これを反映させるよう式(33)を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\mu U}{a\tau} &= -\ln(1-z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}, \\ c_n &= b_n - (n+1)^{-1} \quad (35) \end{aligned}$$

係数 c_n を表 2 に示す。 c_n の値は b_n よりも速く小さくなり, 級数が改善されたことが認められる。さらにこの過程を進める。式(34)から式(35)の級数部分の支配的な特異性は $B[\ln(1-z)]^{-1}$ の形である。これより式(35)を次式のように書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\mu U}{a\tau} &= -\ln(1-z) + B[\ln(1-z)]^{-1} \\ &\quad + B \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+1} \\ B &= -0.963423865 \\ d_0 &= -\gamma_0 B \\ d_1 &= -\gamma_1 B \\ d_n &= c_{n-2} - \gamma_n B \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (36)$$

ここで γ_n は $[\ln(1-z)]^{-1}$ のべき級数展開の係数である。

式(36)の級数の係数 d_n を表 2 に示した。さらにこの過程を進めることも可能であるが, 式(36)の級数部分は十分下流でも収束は速い。

Δ, θ, Nu についても同様な手続きにより収束性のよい級数が得られる。まずこれらの級数を逆数にして Padé 近似により特異性を調べると, その支配的な特異性はすべて表面摩擦と同じ複素平面上の点 $-0.95 \pm 0.15i$ の近傍に存在した。そこで τ と同じオイラー変換(32)により解を拡張し, さらに漸近解⁽⁴⁾⁽⁶⁾を考慮することで以下の結果を得た。

排除面積 Δ については, 次式となる。

$$\frac{\pi a^2}{\Delta} = \frac{Ua^2}{4\nu x} \left[-2\ln(1-z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} \right] \quad (37)$$

運動量面積 Θ については、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi a^2}{\Theta} &= \frac{Ua^2}{4\nu x} \left\{ -2 \ln(1-z) + B[\ln(1-z)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n-1} \right\} \\ B &= -1.426\,847\,731 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

局所ヌッセルト数 Nu については、次式のような。

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{Nu} &= -2 \ln(1-z) + B[\ln(1-z)]^{-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ただし、式(37)～(39)の級数の係数には同じ記号 d_n を用いており、これらの値を表3に示す。

式(36)～(39)の21項までの計算結果を図2、3に示した。図2、3中の破線は、左側はもとの級数解の11項までの計算結果であり、右側は漸近解である。図2、3から拡張された級数解(36)～(39)が全領域で妥当であることがわかる。下流の漸近解は $\nu x / Ua^2 > 100$ で有効であるが、そこでもわずかなずれが見られる。これは漸近解を3項(排除面積は2項)で計算していることによる打ち切り誤差と考えられる。それに対し式(36)～(39)の級数の打ち切り誤差は漸近解に比べれば下流でもかなり小さい。

4.2 Padé 近似の応用 級数解析においてよく使われる Padé 近似は、分数有理形の関数近似であり、関数 $f(x)$ に対する $[L/M]$ Padé 近似は、次のような L 次の多項式 $P_L(x)$ と M 次の多項式 $Q_M(x)$ の比で

ある。

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_L x^L}{1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M} \dots\dots\dots (40)$$

ここで係数 $p_0, p_1, \dots, p_L, q_1, \dots, q_M$ は、関数 $f(x)$ のテイラー展開と式(40)の展開が $L+M$ 次まで一致するように決められる。

Padé 近似は、級数解析において複素平面上的の特異性を調べるのに広く使われており、本研究で、 τ, Δ, Θ, Nu の逆数の級数の特異性を調べるのに用いた。特異性を調べるには、一般に、その関数の対数微分

$$F(x) = -\frac{d}{dx} \ln f(x) \dots\dots\dots (41)$$

に対する Padé 近似の極で調べるのが通例である。式(29)の $\mu U / a\tau$ に対する対数微分は次式のようにになる。

$$\frac{d}{d\xi} \ln \left(\frac{\mu U}{a\tau} \right) = \xi^{-1} - 0.522\,74 + 0.520\,42\xi + \dots \dots\dots (42)$$

式(42)に対する Padé 近似の分母のゼロ点を調べるこ

Fig. 2 Skin friction τ and Nusselt number Nu calculated from improved series

Fig. 3 Displacement area Δ and momentum area Θ calculated from improved series

Table 3 Coefficients of improved series solutions for Δ, Θ, Nu

n	$\frac{\pi a^2}{\Delta}$	$\frac{\pi a^2}{\Theta}$	$\frac{4\pi}{Nu}$
0	-1.7239636	-1.4268477	-1.7927267
1	-0.7266957	0.7134239	0.8963633
2	-0.4112766	-1.1658581	-0.2399006
3	-0.2633181	-0.4029057	-0.1776826
4	-0.1808046	-0.1982788	-0.0787607
5	-0.1300419	-0.1146106	-0.0456948
6	-0.0967400	-0.0730625	-0.0306672
7	-0.0738718	-0.0498567	-0.0220719
8	-0.0576196	-0.0358027	-0.0167235
9	-0.0457538	-0.0267640	-0.0131835
10	-0.0368989	-0.0206712	-0.0107140
11	-0.0301692	-0.0164047	-0.0089181
12	-0.0249745	-0.0133210	-0.0075680
13	-0.0209101	-0.0110313	-0.0065248
14	-0.0176920	-0.0092911	-0.0057003
15	-0.0151166	-0.0079415	-0.0050359
16	-0.0130355	-0.0068759	-0.0044915
17	-0.0113389	-0.0060210	-0.0040392
18	-0.0099444	-0.0053254	-0.0036585
19	-0.0087894	-0.0047520	-0.0033347
20	-0.0078259	-0.0042738	-0.0030566
21		-0.0038709	-0.0028156
22		-0.0035280	-0.0026051

Table 4 Coefficients of [10/10] Padé approximants

(a) Non-dimensional skin friction $\mu U/\alpha \tau$

n	P _n	Q _n
0	0.1328229E+01	
1	0.8753269E+01	0.6067436E+01
2	0.2481089E+02	0.1563155E+02
3	0.3951624E+02	0.2225313E+02
4	0.3876134E+02	0.1907497E+02
5	0.2413693E+02	0.1005635E+02
6	0.9487727E+01	0.3194078E+01
7	0.2265805E+01	0.5724986E+00
8	0.3029306E+00	0.5039563E-01
9	0.1926052E-01	0.1577893E-02
10	0.3945344E-03	0.3830000E-05

(b) Non dimensional displacement area $\pi a^2/\Delta$

n	P _n	Q _n
0	0.3441575E+01	
1	0.2778761E+02	0.8063677E+01
2	0.9516730E+02	0.2750719E+02
3	0.1805171E+03	0.5173252E+02
4	0.2074749E+03	0.5848903E+02
5	0.1482998E+03	0.4055303E+02
6	0.6500293E+02	0.1679055E+02
7	0.1656800E+02	0.3825953E+01
8	0.2214863E+01	0.4022948E+00
9	0.1315842E+00	0.1397689E-01
10	0.2393989E-02	0.3999007E-04

(c) Non-dimensional momentum area $\pi a^2/\theta$

n	P _n	Q _n
0	0.1328229E+01	
1	0.8083960E+01	0.5824897E+01
2	0.2100924E+02	0.1433621E+02
3	0.3046018E+02	0.1940668E+02
4	0.2700185E+02	0.1574749E+02
5	0.1508560E+02	0.7825990E+01
6	0.5282706E+01	0.2334076E+01
7	0.1116544E+01	0.3915342E+00
8	0.1313824E+00	0.3218117E-01
9	0.7324383E-02	0.9415389E-03
10	0.1314592E-03	0.2256331E-05

(d) Local Nusselt number $4\pi/Nu$

n	P _n	Q _n
0	0.5898036E+00	
1	0.3316121E+01	0.5058370E+01
2	0.7810776E+01	0.1052303E+02
3	0.9927080E+01	0.1148701E+02
4	0.7258993E+01	0.6874390E+01
5	0.2947662E+01	0.2044226E+01
6	0.5194006E+00	0.1341817E+00
7	-0.3645133E-01	-0.7260767E-01
8	-0.2782816E-01	-0.1549008E-01
9	-0.3358525E-02	-0.7967105E-03
10	-0.1048483E-03	-0.2824008E-05

とで特異点の位置が評価され、4・1節においてこれを用いた。

Padé 近似の別の有用性は、その本来の関数近似の性質による解析接続の可能性である。それは、Padé 近似の大きな特徴である不変特性に基礎をおく⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾。不変特性というのは、 $P_M(x)/Q_M(x)$ が関数 $f(x)$ に対する $[M/M]$ Padé 近似ならば $P_M[Az/(1+Bz)]/Q_M[Az/(1+Bz)]$ は関数 $f[Az/(1+Bz)]$ への Padé 近似であるということである。これにより $[M/M]$ Padé 近似は最適なオイラー変換と同じ収束性をもつことになり、複素数や負の値をもつ物理的には無意味な特異点によって決められる級数の収束円を超えて解析接続ができる。

そこで、 τ, Δ, θ, Nu の逆数の級数に対して Padé 近似を行う。例えば、 τ についての $[10/10]$ Padé 近似は次式のようなものである。

$$\frac{\mu U}{\alpha \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{1.328 + 8.753\xi + \cdots + 0.00395\xi^{10}}{1 + 6.067\xi + \cdots + 0.00000383\xi^{10}} \quad (43)$$

これを含めて他のすべての級数に対する $[10/10]$ Padé 近似の係数を表 4 に示す。図 4 は τ と Nu に対する Padé 近似の結果を示したものである。図 4 中の破線は 4・1 節の拡張された級数 (36), (39) によるものである。 τ に対する Padé 近似と式 (36) の 23 項までの計算結果の数値的な比較を表 5 に示した。 $\nu x/Ua^2$

Table 5 Comparison of non-dimensional skin friction $\mu U/\alpha \tau$

$\nu x/Ua^2$	[5/5]	[7/7]	[10/10]	Eq. (36)
0.1	1.62230	1.62230	1.62230	1.62230
0.5	0.97487	0.97489	0.97489	0.97488
1.0	0.80628	0.80637	0.80638	0.80633
5.0	0.55048	0.55180	0.55193	0.55155
10.0	0.47628	0.47936	0.47981	0.47919
50.0	0.34528	0.35807	0.36174	0.36104
100.0	0.29824	0.31761	0.32465	0.32473
200.0	0.25410	0.28056	0.29246	0.29447
500.0	0.19959	0.23420	0.25431	0.26161
1000.0	0.16192	0.20025	0.22692	0.24097

Fig. 4 Skin friction τ and Nusselt number Nu based on Padé approximants

Fig. 5 Velocity distribution

Fig. 6 Temperature distribution

$\xi=200$ において [10/10] Padé 近似と式(36)による値の差は 1% 以下であり, $\nu x/Ua^2 < 100$ ではさらに差が小さく, [10/10] Padé 近似で十分な精度が得られている. Δ , Θ , Nu についても, Padé 近似は同程度の精度をもっていた.

速度分布と温度分布を Padé 近似で求めたのが図 5, 6 である. 速度分布の摂動解への Padé 近似は, 円筒表面近くの η の小さいところでは τ と同程度の収束性を示すが, ξ の大きい場合には, η の大きいところで高次の項が重要となり収束性が急激に悪化する. 温度分布についても η の大きいところでは収束性が悪くなり, ξ の大きい場合の近似値を得るのが難しくなる.

摂動解の高次の項がさらに得られれば, より高い数値精度で ξ の大きいところで妥当な近似値が得られ

るが, 高次になるほど f_n, g_n の変動が大きくなり数値計算は困難になる. したがって Padé 近似でこれ以上の改善を求めるのは難しいと思われる.

5. 結 論

一様な軸流中の細長円筒上の層流の速度・温度境界層を, Seban-Bond⁽²⁾ の変数で展開する摂動法により調べ, その級数を拡張した.

表面摩擦, 排除面積, 運動量面積, 局所ヌセルト数の級数解を 20 項程度まで求め, Padé 近似によりその複素平面上の特異点の位置を評価した. すべての級数に対しその特異性を追い払うオイラー変換を適用することで, 収束性のよい新たな変数 ξ での級数を得た. さらに漸近的な解の挙動から, これを級数解に反映させることでより収束性のよい解を得た.

Padé 近似そのものによる解析接続の解の有効性を調べた. その結果, 実用上重要な $\xi \leq 200$ 程度において [10/10] Padé 近似で精度のよい解が得られた.

速度分布と温度分布についても Padé 近似を応用した. 円筒表面付近では, Padé 近似の収束性はよいが境界層の外層部にいくにつれ収束性が悪くなり, ξ の大きいところの外層部までは Padé 近似で近似しえなかった.

本解析には名古屋大学大型計算機センターを使用したことを付記する.

文 献

- (1) Irvine, F., Jr., Ph. D. Thesis, Univ. Minnesota, (1956).
- (2) Seban, R. A. and Bond, R., *J. Aeronaut. Sci.*, **18**(1951), 671-675.
- (3) Kelly, H. R., *J. Aeronaut. Sci.*, **21**(1954), 634.
- (4) Glauert, M. B. and Lighthill, M. J., *Proc. R. Soc., London, Ser. A*, **230**(1955), 188-203.
- (5) Stewartson, K., *Q. Appl. Math.*, **13**(1955), 113-122.
- (6) Bourne, D. E. and Davies, D. R., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **11**(1958), 52-66.
- (7) Bourne, D. E., Davies, D. R. and Wardle, S., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **12**(1959), 257-260.
- (8) Jaffe, N. A. and Okamura, T. T., *ZAMP*, **19**(1968), 564-574.
- (9) Curle, S. N., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **372**(1980), 555.
- (10) Hunter, D. L. and Baker, G. A., Jr., *Phys. Rev.*, **B, 7**(1973), 3346-3376.
- (11) Van Dyke, M., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**(1984), 287-309.
- (12) Baker, G. A. Jr., *Essentials of Padé Approximants*, (1975), Academic Press.
- (13) Pozzi, A., *Applications of Padé Approximation Theory in Fluid Dynamics*, (1994), World Scientific.