GSMAC-FEM を用いた非 Newton 流体の解析*

(Carreau 流体の急縮小円管流れ)

藤 枝 忠 臣^{*1}, 西 田 振 一 郎^{*2}
加 藤 保 真^{*3}, 棚 橋 隆 彦^{*4}

Analysis of Non-Newtonian Fluids by GSMAC-FEM

(Flow of Carreau Fluids through an Axisymmetric Abrupt Contraction)

Tadaomi FUJIEDA, Shin-ichiro NISHIDA,
Yasumasa KATO and Takahiko TANAHASHI

In a previous paper, we proposed a simple, low-storage finite element scheme for three-dimensional flow analysis of non-Newtonian fluids. The scheme is based on the GSMAC (generalized simplified marker and cell) finite element method, and employs rational Runge-Kutta time integration in order to maintain stability for high viscosity flow. In the present work, the flow of Carreau fluids through an axisymmetric abrupt contraction is calculated to confirm the applicability of the present scheme at low shear rates. The numerical results agree with numerical solutions calculated by Kim et al., and by means of comparing the results for two contraction ratios (1:4, 1:2), we investigate how the contraction ratio affects the velocity profiles at the plane of contraction and the pressure drop distance.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Finite Element Method, Incompressible Viscous Flow, Pipe Flow, Computational Fluid Dynamics

1. 緒 言

プラスチック成形の分野では計算機による数値解析が広く活用されている⁽¹⁾。しかし、現在市販されている樹脂流動解析ソフトの多くは Hele-Shaw 流れ、軸対称流れ、Stokes 流れなどの近似に基づいている。そのため、より詳細な流動解析を目的とした三次元任意形状解析が可能なスキームの開発が望まれている。

溶融樹脂流動の三次元任意形状解析を行う場合、次の二つの問題が生じる。第一に、溶融樹脂の多くはせん断速度の減少とともに見かけの粘度が増加する擬塑性と呼ばれる非ニュートン性を示す。そのため局所的な見かけの粘度の増加に伴い拡散数の制約による不安定性が生じる。第二に、三次元任意形状の流動解析では多数の計算格子からなる非構造格子が必要であり、計算効率が著しく低下する。

これらの問題に対し、筆者らは時間進行法に二段階有理 Runge-Kutta 法⁽²⁾、圧力解法に element-by-element の流速・圧力同時緩和法⁽³⁾を用いた三次元非 Newton 流体解析スキ-

ームを提案し、べき乗則流体の急縮小管内流れ問題でその有効性を確認した⁽⁴⁾。また、筆者らの提案したスキームは要素係数行列を近似積分公式^{(5),(6)}で計算しているため三次元任意形状の流動解析を低容量で行うことができる。しかし、実際のプラスチック成形プロセスにおける溶融樹脂流動のせん断速度は広範囲にわたるのに対し、溶融樹脂流動をべき乗則流体で記述できるせん断速度の範囲は限られている。例えば、射出成形の保圧過程などにおける低せん断速度域では、見かけの粘度のせん断速度依存性が無視できる場合もある。本報では、流体モデルとして低せん断速度域における溶融樹脂の挙動を表現できる Carreau 流体^{(7),(8)}を取り上げ、急縮小管内流れ問題で筆者らのスキームの検証を行うとともに、縮小比が流動パターンに与える影響を調べる。

主な記号

$b1, b2, c2$: 有理 Runge-Kutta 法の定数
 Cu : Carreau 数 $\lambda^* U^* / L^*$
 n : べき乗則指数
 p : 無次元圧力 $p^* / (\rho^* U^{*2} / Re)$
 d : 無次元変形速度テンソル

* 原稿受付 1996 年 7 月 11 日。

^{*1} 学生員、慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

^{*2} (株)日立製作所 (〒101 10 東京都千代田区神田駿河台 4-6)。

^{*3} 正員、旭硝子(株) (〒221 横浜市神奈川区羽沢町 1150)。

^{*4} 正員、慶應義塾大学理工学部。

- Re : Reynolds 数 $= \rho^* U^* L^* / \eta_0^*$
 t : 無次元時間 $= t^* / (Re L^* / U^*)$
 $\mathbf{u}$: 無次元流速ベクトル $= \mathbf{u}^* / U^*$
 η : 無次元化された見かけの粘度 $= \eta^* / \eta_0^*$
 η_0^* : ゼロシア粘度
 τ_w^* : 壁面せん断応力
 U^* : 代表速度
 L^* : 代表長さ

なお、添え字の*は有次元量を意味する。

2. Carreau 流体

溶融樹脂は見かけの粘度がせん断速度に依存する非ニュートン性を示す。この非ニュートン性を表現する数学的モデルとして一般にべき乗則流体モデルがよく用いられる。以下にべき乗則流体における見かけの粘度を示す。

$$\eta^* = K^* \dot{\gamma}^{(n-1)} \quad (1)$$

ここで、 η^* は見かけの粘度、 $\dot{\gamma}^*$ はせん断速度、 K^* 、 n はべき乗指数の係数を示す。一般の溶融樹脂は $n < 1$ であり、せん断速度の減少に伴い見かけの粘度が増加する擬塑性を示す。このモデルでは $\dot{\gamma}^* \rightarrow 0$ において見かけの粘度が無限大となり、低せん断速度域における実際の溶融樹脂の挙動を表現できない。これに対し、Carreau 流体はゼロシア粘度を定義し、 $\dot{\gamma}^* \rightarrow 0$ における見かけの粘度の特異性を回避している。Carreau 流体では、見かけの粘度は式(2)で表される。

$$\eta^* = \eta_0^* \left[1 + (\lambda^* \dot{\gamma}^*)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (2)$$

ここで、 η_0^* はゼロシア粘度、 λ^* は時定数である。Carreau 流体では、せん断速度が小さい場合 Newton 流体と一致し、せん断速度が高い場合はべき乗則流体と一致する。このモデルは低せん断速度域における溶融樹脂の挙動をよく表現する。Carreau 流体の流動曲線を Fig.1 に示す。

Fig. 1 Flow curve of Carreau fluid

3. 支配方程式

解析対象が非圧縮純粘性流体で温度場および外力の影響が無視できる場合、支配方程式は以下に示す連続の式および Navier-Stokes 方程式となる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + Re \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta \mathbf{d}) \quad (4)$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla) \quad (5)$$

Carreau 流体の場合は η が定数にならず、式(2)のように表される。これを三次元に拡張すると以下ようになる。

$$\eta = \left[1 + (Cu \sqrt{2\mathbf{d} : \mathbf{d}})^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (6)$$

4. 数値解法

本報では、空間の離散化は通常の Galerkin 法で、八節点六面体要素を用いて流速変数を要素内双一次補間、他の変数を要素内一定補間した。時間進行法は、式(3),(4)を流速について陽的に、圧力と連続の式について陰的に離散化した SMAC 法⁽⁹⁾に準拠した時間前進のアルゴリズムを、高粘性域において安定な二段階有理 Runge-Kutta 法⁽²⁾を応用し改めたものを用いる。なお、圧力解法に element-by-element で高速に解ける流速・圧力同時緩和法を用いる⁽³⁾。また要素係数行列に対して、近似解析公式^{(5),(6)}を用いることにより低容量化を計った。詳細は前報⁽⁴⁾を参照されたい。

5. 検証モデルおよび解析条件

解析モデルである急縮小円管内流れのモデル図を Fig.2 に示す。解析モデルは Kim らの二次元軸対称有限要素解析⁽⁸⁾と同じ縮小比 4:1 [$D_d = 1$, $D_u = 4$, $Z_d = 8$, $Z_u = 8$; (mesh1)] および縮小比 2:1 [$D_d = 1$, $D_u = 2$, $Z_d = 3$, $Z_u = 5$; (mesh2)] とした。境界条件として、流入口で十分発達したべき乗則流体の流速分布、流出口で流速の法線方向微分ゼロおよび圧力ゼロ、管壁面はすべり無しの境界条件を与えている。初期条件として管全域に渡って十分発達したべき乗則流体の流速分布を与えている。ここで代表長さは細管直径で、代表流速は十分に発達した細管部の平均流速である。

解析条件は $Re = 0.0, 0.2, 2.0$, $Cu = 0.01, 1.0, 100$, $n = 0.2, 0.4$ で、時間刻みは mesh1 で $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$, mesh2 で $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ とした。また有理 Runge-Kutta 法の定数は $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $c_2 = 0.5$ として二次精度の時間進行とした。解析格子は mesh1 で要素数 18400 要素, mesh2 で要素数 49752 要素の有限要素メッシュを用いた。本解析で用いた有限要素メッシュを Fig.3 に示す。Collins-Schowalter⁽¹⁰⁾ が整理したべき乗則流体のべき乗則粘度指数 n , Reynolds 数 Re

と助走区間距離の相関より、本解析条件の範囲では解析上の流路出口で流れは十分に発達する。解析に使用した計算機は IBM 社のワークステーション RS/6000-37T で、単精度変数で数値解を求めた。

Fig. 2 Flow in axisymmetric abrupt contraction

6. 解析結果および検討

他者の解析結果と比較し、本スキームの検証を行うため、縮小比 4:1 の解析結果を以下に示す。

6.1 見かけの粘度分布 $Re = 0$, $n = 0.2$ の条件のもとで $y = 0$ 断面における見かけの粘度の分布の Carreau 数依存性を Fig.4 に示す。Carreau 流体は、せん断速度の高い壁面付近では見かけの粘度が低く、せん断速度の低い管中心付近では見かけの粘度が高い擬塑性流体の性質を示す。この傾向は Carreau 数が大きくなるほど顕著になる。本解析結果は、この性質を良好に再現している。 $Cu = 0.01$ の場合見かけの粘度はほぼ一定であり、Newton 流体とみなすことができる。Carreau 数が大きくなるに従い、壁面での見かけの粘度が低く、管中心付近で見かけの粘度が急激に増加する傾向すなわち擬塑性が強く現れている様子が分かる。また、Carreau 流体はゼロシア粘度を定義しているため、無次元化された見かけの粘度の最大値は 1 となっている。

Fig. 3 Finite-element mesh

(a) $C'u = 0.01$ (b) $C'u = 1.0$ (c) $C'u = 100$ Fig. 4 The viscosity profiles ($Re = 0.0, n = 0.2, \text{mesh1}$)

6.2 流線図 Fig.5 に本解析により得られた流線図を Kim らの解析結果の流線図とあわせて示す。Carreau 数が小さくなるほどコーナー部における二次渦が大きくなる傾向がみられ、Kim らの解析結果と定性的に一致した。

6.3 急縮小部における軸方流速分布 急縮小部における軸方向流速分布の Reynolds 数依存性、べき乗則粘度指数依存性および Carreau 数依存性を、Kim らの二次元軸対称有限

要素解析結果⁽⁸⁾と比較して Fig.6 に示す。Reynolds 数が増加すると慣性の影響により管中心部の速度の発達を押さえられる。Carreau 数が増加する、あるいは、 n の値が減少する。すなわち、擬塑性の性質が強くなると管中心部で見かけの粘度が増加し、管中心部での流速が小さくなる傾向を示す。本解析でもこの傾向が再現された。また、本解析結果は Kim らの解析結果と良好に一致している。

Fig. 5 The stream lines ($Re = 0.0, n = 0.2, \text{mesh1}$)

6.4 中心軸上における軸方向流速分布 中心軸上の軸方向流速分布の Reynolds 数依存性, べき乗則依存性, および Carreau 数依存性を Fig.7 に示す。大口経管を流れてきた流体が, 縮小部により加速され, 細管に流れ込む様子が本解析により再現された。 $Re = 0.0$, $Re = 0.1$ の場合は慣性の影響はほとんど現れていない。 $Re = 10$ では慣性の影響で縮小部の影響が上流側に現れている。本解析結果は Kim らの結果と良く一致したが, 擬塑性の性質が強い $Cu = 100$, $n = 0.2$ の条件において, 縮小部に流入する際本解析結果は Kim らの結果に比べ数 % 程度速度の発達が早くなった。

6.5 圧力損失距離 Fig.8 に本解析により得られた流路急縮小による圧力損失距離 L_{eq} の Carreau 数依存性を示す。圧力損失距離 L_{eq} は次式で定義される。

$$L_{eq} = \frac{\Delta p - (\Delta p_{up} + \Delta p_{down})}{4\tau_w} \quad (7)$$

ここで, Δp は流入部から流出部までの全圧力損失計算結果, Δp_{up} と Δp_{down} はそれぞれ大口経管と細管の完全発達流れの理論的圧力損失である。また, τ_w は細管部完全発達流れの壁面せん断応力である。Carreau 数が増加すると圧力損失距離が増加する結果が得られた。また, 本解析結果は, Kim らの結果と良好に一致した。

6.6 縮小比による影響 Fig.9 に縮小比の変化による影響を示す。非ニュートン性が現れる ($Cu = 100$, $Cu = 1$) の場合について縮小比 4:1 と 2:1 の比較を行う。(a) は縮小部の軸方向流速分布, (b) は圧力損失距離である。縮小部の軸方向流速分布を比較すると, 縮小比 2:1 の場合は管中央部での軸方向流速が, より平坦な分布となる。圧力損失距離を比較すると, 縮小比が大きくなると, 管の急縮小のともなう抵抗が増加するため, 圧力損失距離が増加することが分かる。

7. 結 言

本報では, 筆者らが提案した溶融樹脂の三次元流れ解析スキームを, 低せん断速度域における溶融樹脂の挙動が表現できる Carreau 流体モデルに適用し, 三次元急縮小管内流れを解析の結果, 以下の知見を得た。

- (1) 本スキームにより, Carreau 流体の解析を安定に行うことができた。
- (2) 縮小比 4:1 の急縮小部の軸方向流速分布について, 本解析結果は Kim らの二次元軸対称解析結果と良好に一致した。
- (3) 縮小比 4:1 の管路の急縮小にともなう過剰圧力損失について本解析結果は Kim らの解析結果と良好に一致した。
- (4) 縮小比による影響を調べた結果, 縮小比が 2:1 の場合, 縮小部における流速分布が管中央部においてより平坦な分布となる。また縮小比が大きくなるほど圧力損失距離は増加する。

(a) The effect of Reynolds number ($n = 0.4$, $Cu = 100$)

(b) The effect of power-law index ($Re = 0.0$, $Cu = 100$)

(c) The effect of Carreau number ($Re = 0.0$, $n = 0.2$)

Fig. 6 The axial velocity profiles at the plane of contraction (mesh1)

(a) The effect of Reynolds number ($n = 0.4, Cu = 100$) (b) The effect of power-law index ($Re = 0.0, Cu = 100$) (c) The effect of Carreau number ($Re = 0.0, n = 0.2$)

Fig. 7 The axial velocity profiles on center line (mesh1)

Fig. 8 Pressure drop distance ($n = 0.2, Re = 0.0$, mesh1) (a) The axial velocity profiles at the plane of contraction ($Re = 0.0, n = 0.2$, mesh2) (b) Pressure drop distance ($Re = 0.0, n = 0.2$, mesh2)

Fig. 9 The effect of contraction ratio

参考文献

- (1) 天野, 射出成形用 CAE をどう利用するか, プラスチックス, **38-8** (1987), 25-36.
- (2) Wambecq, A., Rational Runge-Kutta Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations, *Computing*, **20** (1978), 333-342.
- (3) 加藤・棚橋, 流速と Bernoulli 関数の同時緩和法を用いた三次元非圧縮粘性流れの有限要素解析 (第 1 報, $Re=5000$ の立方体キャビティ内流れ), 機論, **57-540, B** (1991), 2640-2647.
- (4) 加藤・藤枝・棚橋, 流速・圧力同時緩和法による非ニュートン流れの三次元有限要素解析 (べき乗則流体の急縮小管内流れ), 機論, **61-592, B** (1995), 4305-4311.
- (5) Mizukami, A., Some Integration Formulas for a Four-Node Isoparametric Element, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **59** (1986), 111-121.
- (6) 斉藤, GSMAC3D の開発 (III) 有限要素法解析で発生する数値不安定現象とその抑制手法, 旭硝子研究報告, **39** (1989), 167-194.
- (7) Boger, D.V., Viscoelastic Flows through contraction, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19** (1987), 157-182.
- (8) Kim-E, M.E., Brown, R.A., and Armstrong, R.C., The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through axisymmetric sudden contraction, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **13** (1983), 341-363.
- (9) Amsden, A.A. and Hirt, C.W., The SMAC Method - A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows, *Los Alamos Scientific Lab. Rep.*, LA-4370 (1970).
- (10) Collins, M. and Schowalter, W.R., Behaviour of non-Newtonian fluids in the inlet region of pipe., *AIChE J.*, **9-6** (1963), 804-809.