自動振動を有する2次元チャンネル内噴流の数値解析* (第3報, OGY法による能動制御)

飯田 誠一^{*1}, 小河原 加久治^{*1}, 竹澤 聡^{*2}

Numerical Simulation for Jets Exhausting into a Two-Dimensional Channel with Self-Induced Oscillation (3rd Report, Active Control by OGY Method)

Sei-ichi IIDA, Kakuji OGAWARA and Satoshi TAKEZAWA

In the previous papers, we showed that a plane jet discharging into a channel exhibits self-sustained flip-flop motion which changes from periodic to chaotic oscillation at a certain Reynolds number. The present report deals with feedback control of the flip-flop jet based on the OGY method which is known to be useful in changing an unstable orbit into a stable orbit in the phase space of a nonlinear system. The method is first tested using model equations of both one- and two-dimensional systems, and is confirmed to work fairly well. The OGY method is applied to the numerical database of the flip-flop jet. It is found that for a certain range of control parameters, the unstable chaotic state can be reduced to a stable periodic state by the feedback input of short-interval and small-amplitude velocity perturbation.

Key Words: Chaos, Flip-Flop Jet, Numerical Analysis, Nonlinearity, Active Control

1. 緒言

筆者らは第一報⁽¹⁾で急拡大部を有する2次元流路内に噴き出される噴流の諸特性の一つとして、噴出口直後に生じる剥離再循環領域が関与する噴流のフリップフロップ現象に着目し、その挙動をカオスの解釈にそって考察した。その際、臨界レイノルズ数 Rec が存在し、これを境として解の挙動がリミットサイクルからストレンジアトラクターへ変化する過程を、ウェーブレット解析などにより定性的に示した。また、第二報⁽²⁾ではニューラルネットワークを用いて噴流のフリップフロップの挙動を推定する力学系モデルを構築し、周期解に対するモデル化の同定、およびカオスである非周期解の推定を短期的に予測できることの可能性を報告した。今までの非周期解に対する方策は、短期的予測や確率分布データに基づく統計的モデルなどを用いた推定により、不規則現象への突入をできる限り回避するのが通例であった。しかし最近では、積極的に不規則性を利用して、非線形力学系を制御する研究も進んでおり、なかでも

OGY (Ott-Grebogi-Yorke) 法と呼ばれる制御方法が注目を集めている⁽³⁾。OGY法の基本的な考え方は、カオス挙動を示す系に対してフィードバック制御を行って軌道の安定化をはかろうとするものである。その際、図1(a)に示す従来の制御法のように位相空間のすべての方向に対して同じように安定化させるのではなく、図1(b)に示すように不動点 (*fixed point*) 近傍に軌道が入り込んできたときのみ制御力を作用させて安定方向を通る軌道へ収束させるという方法をとる⁽⁴⁾。

Fig. 1 Comparison of control methods

* 原稿受付 1996年4月18日。

^{*1} 正員, 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

^{*2} 正員, 北海道大学大学院。

その有用性はダフティング系の一次元振動システムモデル⁽⁵⁾やヘノンマップやローレンツアトラクターに対して既に報告されている⁽³⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかし、多次元流れ場に対してOGY制御法を適用した研究は、これまで報告されていない。そこで、本研究では2次元チャンネル内噴流の実用的な流れに現れる非周期運動から位相空間内の固有ベクトルを求めて周期軌道の特定を行い、OGY制御による安定化を試みた。

2. 計算条件

本研究では2次元チャンネル内に噴出する非圧縮性粘性流体の流れを数値的にシミュレートした。計算対象には、図2に示すように流路長さと流路幅とで構成される、アスペクト比(L:H)が6:1である2次元流路の左端中央部に、吹きだし幅D ($D \leq H$)で放物形速度分布をもつ噴流が流入する場合を想定した。出口境界条件が注目する観測点での流れに影響を及ぼさないことを確認するため、アスペクト比12:1の場合まで予備計算を行い領域を決定した。また、HとDの比は5:1で一定とした。境界条件は、壁面で滑りなし、 $x/H=6$ における流出境界条件は $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ とした。

計算スキームにはMAC法を用い、非定常項を修正オイラー法、対流項(非線形項)を1次精度の風上差分、粘性項には2次精度の中心差分を用いて、解の安定化を図った。流れ関数のポアソン方程式は、2次精度の中心差分で離散化した。計算領域の分割数はx方向50、y方向50で等間隔の直交格子を用いた。流れ場を代表するパラメータはレイノルズ数 $Re = \frac{HU_0}{\nu}$ (H : 2次元チャンネル高さ、 U_0 : 噴流中心速度、 ν : 流体の動粘性係数)であり、本研究の過程ではこれを唯一の可変パラメータとした。また、計算の時間ステップは $dt = 0.024$ で、時刻 t は代表長さ H と代表速度 U_0 を用いて無次元化してある。

Fig.2 Flow configuration and coordinate system

3. OGY制御のアルゴリズム

OGY制御のアルゴリズムについて簡単に説明する。

- (a) 後述するように(図5参照)、時間遅れによる再軌道構成からなる相空間で、不動点を求めるためにポアンカレ断面上でのカオスアトラクターから任意の周期軌道を抽出する。その際、ノルム $\|Z_n Z_{n-1}\| \ll 1$ を満たすポアンカレ写像上の点集合 (Z_n, Z_{n+1}) を選びだし、その軌道の中心点を探索し、次式の線形関係式から不動点を近似する。

$$Z_{n+1} = \hat{A}Z_n + \hat{B} \dots \dots \dots (1)$$

なお、 Z_n は目的変数ベクトル、 $\hat{A}$ は共分散行列として得られる係数行列ベクトル、 $\hat{B}$ は残差ベクトルである。

- (b) ポアンカレ断面上で、周期軌道中心近傍の固有値、固有ベクトルを推定する。このとき行列 $\hat{A}$ の安定方向固有値 λ の絶対値が1より小さければ不動点を通過する単一周期の軌道の上に Z_{n+1} を落ちつかせることが可能である。
- (c) 制御パラメータを変化させると、周期軌道の中心点近傍での移動量 $g(=Z_n - Z^*)$ に対するゲイン K を得る。この積 $K \cdot g$ が増幅もしくは減衰された状態フィードバック量となるので、これより制御パラメータの摂動量 ΔP が決定される。実際、移動量 g の決定が最も困難であり、本研究でも g を解析的に求めることができない。そこで、今回は移動量の最適値を求めるために後述する安定度最大値(図8参照)を目安としたランダムサーチ的手法をとっている。
- (d) 軌道の固有値と摂動量 ΔP との関係は次のようになる。

$$\Delta P = \frac{\lambda_u \cdot \xi_t \cdot f_u}{\lambda_u - 1 \cdot g \cdot f_u} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 ΔP を制御パラメータに与える摂動量、 λ_u を周期軌道中心付近の不安定方向固有値、 ξ_t を周期軌道中心点を原点としたポアンカレ断面上の点の座標、 f_u を周期軌道中心点付近の写像行列の転置行列の固有ベクトルとする ΔP の運用であるが、カオスのエルゴード性に従ってアトラクターがポアンカレ断面の $\|Z_n Z_n\| < r$ を満足して通過するとき、上式により制御パラメータにインパルスに摂動を与えて、アトラクターを制御する。したがって本研究では、 Re 数に摂動レイノルズ数 ΔRe が付加されることになる。

ここで用いたOGY法の特徴としては,

(a) システムに関する方程式など解析的な知識が不要であること.

(b) わずかな外力 (摂動) で制御可能であること.

などがあげられる⁽⁴⁾

4. 軌道の再構成とポアンカレ断面

具体的な適用例について説明する. 2次元チャンネル内噴流の周期解から非周期解へ移行する臨界レイノルズ Re_c は計算の結果 $Re_c = 5000$ 付近に存在している. よって, Re 数がこれより高ければ, 第一, 二報で確認されたように流れ場内に非周期性が現れる. 図3 は $Re = 5 \times 10^4$ で認められたフリップフロップ現象の速度ベクトル図であり, 上下壁面方向に流れ場が振動していることが認められ, Re 数の増加と共に不規則な挙動が顕著になる.

図4 に計算により初期の過渡域を除いて得られた $x/H = 3.0, y/H = 0.0, Re = 5 \times 10^4$ における時系列を示す. なお, 縦軸は流れ方向垂直変動速度 (噴流出口中心速度で無次元化), 横軸は時刻 (無次元) を示し計算点は $10dt$ ごとにプロットした.

そこで, 図4 の時系列データ $\{X_t\}$ ($X_t = \frac{V}{U_0}$ と定義する.) に対して

$$h_t^{(k)} = (X_t, X_{t+\tau}, \dots, X_{t+(k-1)\tau}) \dots \dots \dots (3)$$

のような k 個の連続する時系列を時間遅れ τ をとって抽出し t を変化させると k 次元に埋め込まれた空間内に軌道が構成される.

対象とする力学系の本来の次元を d とすると,

$$k \approx 2 \times d + 1 \dots \dots \dots (4)$$

の関係を満たせば系の規則が k 次元空間内に埋め込まれることが保証されている. ただし, 時間遅れ τ の最適値は, 時系列 $\{X_t\}$ の性質に依存するのでいまのところ経験的に決めるほかはない.

図5 は, 時系列データ $\{X_t\}$ を正規化し, 再軌道構成によって $k=3$ の空間次元に対して展開して得られたアトラクターである. これより, アトラクターの特徴づけの一つとして, 不動点の推定し易そうなポアンカレ断面を作成する. ポアンカレ断面上の不動点 Z_* の近傍領域 σ では $Z_* = F(Z_*, P_0)$ の微分同相写像となっており, 3次元空間中のベクトル場の解曲線の挙動は2次元平面のダイナミクスとして帰着することができる. ここに, P_0 は摂動量 P の名目値である.

Fig.3 Flow pattern of flip-flop jet

Fig.4 Velocity trace in chaotic oscillation

Fig.5 Attractor in 3-Dimension

Fig.6 Poincaré section
 $X[t+2\tau]=6.0$

解析可能な断面は3次元方向それぞれに幾つか考えられるが、図6に $X_{t+2\tau} = 0.6$ における $\xi_t(X_t, X_{t+\tau})$ の2次元平面(ポアンカレ断面)を $\frac{d\xi_{t+2\tau}}{dt} > 0$ の向きに通過する点群を示す。点群が稠密になる領域は座標空間 ξ_t の $\xi_t(0.3, 0.3)$ 付近に存在しているが、OGY制御を十分機能させるためには ξ_t より不動点 ξ_0 を正確に決定することが重要となる。これについては、図中の矢印とともに、次節で詳しく説明する。

5. 安定固有値, 固有ベクトルの決定

図5の軌道から周期軌道の中心座標 Z_* を求めるために、封じ込めるべきリミットサイクルのポアンカレ断面上の任意の点を初期値 Z_* として仮定する。[2×2]の写像(線形変換)行列 $\hat{A}$ の成分の決定は、 ξ_t の座標値に対して Z_* の近傍で軌道半径の誤差±3.0%を許容して、 ξ_t の最小二乗近似にて求めた。近似に用いた ξ_t の組み合わせは100通りとした。得られた行列 $\hat{A}$ より

$$Z_* = (I - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad \dots\dots\dots (5)$$

が求められるので、 $Z_{**} = Z_*$ として再度推定を行う。結局、誤差 $|Z_* - Z_{**}|$ が小さくなるように繰り返し計算を行って最終的な Z_* を決定する。ここでは、 $\xi_t(0.322, 0.338)$ となった。このとき、行列 $\hat{A}$ は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.801 \\ 0.801 & 1.000 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、得られた固有値は安定方向に $\lambda_s = 0.199$, 不安定方向に $\lambda_u = 1.801$ である。この、 λ_s の値が1より小さければ小さいほど安定性は強まる。また、それぞれの固有ベクトルは

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$V_u = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

図6の点群に計算された固有ベクトルの安定方向を実線、不安定方向を破線の矢印で表示した。よって、制御された場合にはポアンカレ断面上のバラついた点の分布は安定方向の固有ベクトルに則って直線化され、周期軌道が維持される。なお、不動点の定義できる Re 数には範囲もしくは限界があると推察されるが、このことについては本論文では触れない。

6. 制御結果

非線形のシステムを次式で構築されるものとみなす。

$$Z_{n+1} = F(Z_n, P) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 Z_n は n 周期目の2次元の列状態ベクトル、 P はカオス発生に最も大きな影響を及ぼす制御パラメータで、本研究ではレイノルズ数に相当し、この変化量が速度変動に認められる微小な摂動量として作用する。制御の観測点は $x/H = 3.0$ の噴流中心軸上とした。この位置を選んだ理由は

- (a) 噴流両側に非対称な剥離再循環領域が形成され、速度変動の周期および非周期現象を把握しやすいこと。
- (b) ポアンカレ断面から得られた制御量がカオスの挙動の制御に最も威力を発揮した。

などによる。 $x/H = 3.0$ で入手された時系列データを位相空間上で解析し、入力すべき ΔP および時刻 t を決定して実際の制御位置(噴流流入部)に状態フィードバックの制御入力が与えられる。制御入力 U ($U = \Delta Re$) の定義は

$$U = \Delta P \cdot \nabla^2 V \quad \dots\dots\dots (10)$$

であり、 ∇ はベクトル演算子である。

図7に $Re = 5 \times 10^4$ の場合のOGY制御したときの時系列データの変化の様子を示す。明らかに、制御された信号はほぼ周期的秩序をもって安定化しており、朱ら⁽⁵⁾によってダフィング系へのOGY制御を適用した報告と定性的な一致を見せている。なお、制御後の信号は速度変動の負の方向に弱い傾きをもって振幅が微小に増えており、更に時間が経過すると、おそらくは再び不規則性が復活してくることが予想される。

フィードバック制御の効果が現れるには制御点と観測点との距離から時差が生じる。図7から確認される様に、制御開始時刻から安定化の開始までおよそ無次元時間75の遅れを要することが示された。これらの解析結果を基に、ポアンカレ断面の Z_* 近傍通過時刻が制御最適時刻であると判断し、ここでは U を瞬時に入力した。

図8は縦軸にOGY制御の前後における時系列の乱れ度をそれぞれ S_u , S_s として算出した信号の安定度 ΔS ($\Delta S = \frac{S_u - S_s}{S_u}$)、横軸に摂動量 $\Delta P/P$ の大きさをとり、制御の最適摂動量を示したものである。この結果から、 $Re = 5 \times 10^4$ に対しておよそ6%の大きさで最も安定することがわかり、この程度の摂動(制御入力)によって制御が可能であることが確かめられた。

制御が達成される場合の、位相空間内のルートを図9に模式的に示す。すなわちカオス解を構成する不安定な軌道から、唯一の周期軌道に封じ込められるはずである。これを実際の2次元平面のダイナミクスの軌道図に置き換えて表わすと図10の(a),(b)となる。これは、 $Re = 5 \times 10^4$ の場合であり、計算時刻 $t = 249$ において制御を開始した。(a)は制御前の不規則な軌道が描かれているのに対して、(b)では単純な8の字を描く単一周期に落ちついており位相空間でも制御の効果が確認された。なお、図10(b)における無次元周期はおよそ36である。

制御の目的からすると希望する軌道に封じ込められているか否かの検討が必要であるが、ここでは評価方法の一つとして軌道の接線方向ベクトルの比較を行った。その結果、図には示さないが $t = 249$ 前後でのポアンカレ断面通過時の軌道の方向ベクトルと、安定した単一周期の場合の方向ベクトルとが一致することが確認された。

図11に不動点近傍通過条件 $\|Z_n Z_*\| \leq r$ における r の値を図7の場合 ($r = r_*$) よりも5倍に広げたときの時系列信号を示した。制御が有効に機能している時間が短くなっており、 $t = 480$ 付近では制御が破綻して制御前のカオス状態に戻っていることがわかる。この原因としては r の拡大により係数行列 $\dot{A}$ の固有値と線形写像域が変化し、一度安定方向に制御されても、時間の経過につれて写像によるずれが増大し $\|\xi_{i+1} \cdot f_u\| \neq 0$ となって、安定方向の軌道に乗ることができなくなったためと考えられる。

以上を整理すると、不規則運動中の周期軌道の発見に際し本研究では解析的手法が使えないが、ある Re 数で位相空間上の不動点を求め、周期軌道が発見できた場合でも、制御に成功する時としない場合があり、制御に成功した不動点付近は安定方向と不安定方向とがほぼ直

交することが明らかになった。

Fig.7 Velocity trace controlled by OGY method

Fig.8 Optimum value of control parameter

Fig.9 Variation of phase-space trajectory

Fig.10 Phase-space trajectory; (a)Unstable loop and (b)stable loop

7. 結 言

2次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流がカオス状態にあると判断される自励振動現象に対してOGY制御を試みた。そして、この非線形システムのカオス軌道をインパルスな制御入力により単一周期軌道に封じ込めることができることを明らかにした。

OGY制御を行う際、目的とする周期軌道上にカオス軌道を封じ込めるには、ポアンカレ断面の選択に決定的な定説がないので、任意のポアンカレ断面上の安定方向固有ベクトルの決定方法や不動点近傍を通過する条件などを整えることが重要となる。実際に、本解析結果により不動点通過判定 $\|Z_n Z_*\| \leq r$ の与え方によっては、制御されたシステムの持続時間に影響の現れることが見いだされた。また、インパルスな制御入力に対して、長時間にわたり安定した周期軌道が実現されたが、その状態はしだいに破綻して再度カオス軌道へと移行する傾向も認められた。したがって、更に長時間安定した軌道を保つには、システムの監視を行って再制御を施す必要があると考えられる。

本研究では制御入力の決定に際しては事前に流れ場の状態を解析して、制御時期や入力量をあらかじめ決定している。実用上の観点からは、未知の不安定な非線形システムを実時間で制御することが望ましいわけで、今後の検討課題である。

参考文献

- (1) 飯田・ほか2名, 機論, **62-600**, B(1996), 3029-3035.
- (2) 飯田・ほか2名, 機論, **62-603**, B(1996), 3882-3889.
- (3) Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A., *Phys. Rev. Lett.*, **64**, (1990), 1196-1199.
- (4) 安田・ほか4名, 機論, **60-572**, C(1994), 1256-1261.
- (5) 朱・石飛, 機講論, No. **95-10**, (1995), 17-18.
- (6) Shinbrot, T., Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J.A., *Nature*, **363-3** (1993), 411.
- (7) Ding, M., Scott, K.J.A., *World Scientific*, (1991), 17.

Fig.11 Velocity trace; effect of parameter r