非構造格子用最小二乗推定対流評価の風上化*

小河原 加久治^{*1}, 飯 田 誠 一^{*1}Upwinding of Least Square Convection Estimate
for Unstructured Grids

Kakuji OGAWARA and Sei-ichi IIDA

A new method for estimating convection using an incompressible Navier-Stokes solver is presented. A least squares identification method was applied to obtain derivatives around a reference point. Higher order derivatives were also utilized in order to reduce artificial diffusivity caused by first-order upwinding. An iterative method similar to SMAC (simplified marker and cell) was used for time marching, and least squares estimation was carried out to determine predictors of variables. Therefore, the estimation time can be neglected in the entire calculation. Flow around a cylinder and two-dimensional cavity flow were selected to examine the applicability of the current method. Static pressure distribution and velocity profiles agree fairly well with previously obtained data. However, it was found that artificial viscosity is not negligible, even if higher order derivatives were utilized.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Unstructured Grid, Up-Wind Scheme, SMAC

1. 緒言

グリッドレススキームとしてBatina⁽¹⁾が提唱する最小二乗推定による対流項評価法は、森西ら⁽²⁾により改良され格子を用いなくても通常の非構造格子によるオイラー解法と同程度の精度が得られることが示されている。グリッドレス法の特徴は流れの情報を計算する近接点をクラウドとして扱い、格子を生成する必要のないことである。しかし、すでに計算格子が用意されている場合でも近接格子点をクラウドとして扱う最小二乗推定法は格子点追加による高精度化に容易に対応できることが期待される。また、多次元空間での高次補間も容易でありCIP(cubic interpolated pseudo-particle)的な移流項の扱い⁽³⁾の際にも有用であると考えられる。また、非圧縮解法では最小二乗推定に要する時間がポアソン方程式計算に要する時間に比して小さいため、圧縮性ソルバーよりもその利点が生かしやすい。しかし、これまでのグリッドレススキームの研究においては流束を推定する際に流れ方向を考慮しておらず、いわば中心差分的な扱いをしている。それに伴って生じる数

値的不安定は人工粘性項を付加することにより抑制している。よって、加える人工粘性項の性質によっては高レイノルズ数流れにおける物質輸送問題において大きな誤差を生じる可能性がある。そこで、本研究の目的は最小二乗推定法を非圧縮粘性流れ解法へ適用し、風上化することにより移流拡散問題が適切に扱えるか否かを調べることにした。

2. 解法

高次精度風上化を施すために点*i*近傍での物理量 ϕ を以下のように近似する

$$\phi = a + b\Delta x + c\Delta y + d\Delta^2 x + e\Delta x\Delta y + f\Delta y^2. \dots (1)$$

ここで a, b, c, d, e, f が最小二乗推定により求めるべきパラメータであり、それぞれ

$$b = \frac{\partial \phi}{\partial x}, c = \frac{\partial \phi}{\partial y}, d = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, e = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, f = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \dots (2)$$

に相当する。 a は点*i*での ϕ であり今回は時刻*n*の既定値としているので、点*i*近傍クラウド内に最低5点が存在すれば上記微係数が求まる。森西は最小二乗推定の際に各ノード情報に重みをかけて加算することによ

* 原稿受付 1996年6月20日。

*¹ 正員, 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

り、点 i から遠い点の微係数に対する悪影響を軽減している。本研究ではそれに加えて風下側の重みを減らすことにより対流項を風上化する。点 i での速度ベクトルを $\mathbf{u}$ 、クラウド内の点 j への点 i からのベクトルを $\mathbf{r}=(\Delta x, \Delta y)$ とし、重み w_{ij} を

$$w_{ij} = \left(\frac{-\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{r}|} + 1}{2} \right)^p \quad (3)$$

より求める。これにより点 j が風上方向に存在するときには重みが 1、風下方向の時は重み 0 となる。二次元問題で参照する格子点数が風上側に 2 点存在する場合には最小二乗推定はラグランジュ補間となり、通常の二次風上化と一致する。さらにこれを p 乗することにより風上方向以外の点からの寄与を低減する工夫をしている。これらの重みの計算は速度の変化に応じて各時間ステップで行う必要があるが、最小二乗により導かれる連立方程式は、

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_{ij} \Delta x (\phi_j - \phi_i) \\ \sum w_{ij} \Delta y (\phi_j - \phi_i) \\ \sum w_{ij} \Delta x^2 (\phi_j - \phi_i) \\ \sum w_{ij} \Delta x \Delta y (\phi_j - \phi_i) \\ \sum w_{ij} \Delta y^2 (\phi_j - \phi_i) \end{pmatrix} \quad (4)$$

となるため、改良クラウド法により比較的高速に求められる。ここで $h_{11} = \sum w_{ij} \Delta x^2$, $h_{12} = h_{21} = \sum w_{ij} \Delta x \Delta y$, $h_{13} = h_{31} = \sum w_{ij} \Delta x^3$, $h_{14} = h_{41} = h_{23} = h_{32} = \sum w_{ij} \Delta x^2 \Delta y$, $h_{15} = h_{51} = h_{24} = h_{42} = \sum w_{ij} \Delta x \Delta y^2$, $h_{22} = \sum w_{ij} \Delta y^2$, $h_{25} = h_{52} = \sum w_{ij} \Delta y^3$, $h_{33} = \sum w_{ij} \Delta x^4$, $h_{34} = h_{43} = \sum w_{ij} \Delta x^3 \Delta y$, $h_{35} = h_{53} = h_{44} = \sum w_{ij} \Delta x^2 \Delta y^2$, $h_{45} = h_{54} = \sum w_{ij} \Delta x \Delta y^3$, $h_{55} = \sum w_{ij} \Delta y^4$, $\Delta x = x_j - x_i$, $\Delta y = y_j - y_i$

このようにして推定された微係数をナビエーストークス方程式に導入し、本研究では S M A C (Simplified Marker and Cell) 法で時間進行させている。スカラーポテンシャル ψ は各格子点で定義し、ポアソン方程式

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{u}^+ \quad (5)$$

を収束計算するが、その際速度予測子 $\mathbf{u}^+$ による *dilation* 計算は各要素で行っている。これは三角形一次要素では格子点で速度が与えられると簡単に連続の式の満たし具合を表す量である

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

が求まることを利用するためだが、圧力の修正も各要素で行っている。つまり、速度の補間次数よりも圧力のそれが低くなり、解の不安定化を抑制する効果をもたらしている。通常の S M A C では対流項の評価に速度の一階微分推定量である b, c しか必要でないが、本手法ではすでに二階微分の推定量である d, e, f が求まっているので、C I P 法⁽³⁾の移流フェーズにならない以下のように時間軸での高次精度化も行っている。

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t (ub + vc) - \Delta t^2 (u^2 d + uve + v^2 f) + (\text{圧力項}) + (\text{粘性項}) \quad (7)$$

粘性項は簡単のため

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Omega_i} \sum \lambda_{ij} (\phi_j - \phi_i) \quad (8)$$

としている⁽⁴⁾。ここで

$$\lambda_{ij} = \frac{q_{ij}}{l_{ij}} \quad (9)$$

であり、 l_{ij}, q_{ij}, Ω_i はそれぞれ格子点 i と格子点 j を結ぶリンク ij の長さ、リンク ij をはさむ双対格子点間の距離、双対格子の面積である⁽⁴⁾。

3. 結果

円柱周りの流れと二次元キャビティー内流れに本手法を適用した結果を示す。図 1 に示す計算格子は節点数 2258 要素数 4356 からなり、フロント伝播法により領域分割された後、ボイヤー法により自動生成されている。 $Re = 40$ の円柱表面での圧力分布を図 2 に示す。(3) 式のパラメータ p により風上化の指向性を変えられ、人工粘性を付加するのと同等の効果がある。 $p=0$ の場合は風上化が行われず、Jameson の人工粘性などを付加しないと一般に計算は不安定となる⁽²⁾。 $Re = 40$ の場合は $p=0$ でも計算は可能であったが、高レイノルズ数流れの計算では p を 2 以上に設定しないと安定な計算は不可能となる。図 2 に見るように風上化されていない $p=0$ の場合の圧力分布と風上化されている $p=1, 2, 4$ の圧力分布の差異は大きくない。しかし、今回使用した格子系では $p=4$ での計算は圧力場がチェッカーボード状となった。 $Re = 200$ における揚力変動から求めたストローハル数は 0.2 程度であり、実験値とおおよそ一致するがその変動は小さく直径の 3 倍程度下流では渦は減衰してカルマン渦は維持されない。これは今回のスキームが大きな数値粘性を生み出していることと、円柱の下流で格子サイズが渦を捉えるには大きすぎるためと考えられる。なお、最小二乗推定をする際に用いている節点数は点の位置によって異なるが、計算点一つに対して 10 点から 20 点とした。クラウドのサイズが大きく最小二乗

推定に使う計算点が多い場合には平均化作用が大きく人工粘性効果も大きくなることが考えられる。人工粘性を減らすためにはクラウドを小さくすることが望ましいが、二次以上の微係数の推定をするためには最低五つの点がクラウドの中に存在し、式(5)が解ける必要がある。しかし、境界点近傍などではこの条件を満たさないこともあるので、その場合にはその計算点に対してだけ一次精度風上化をすることとした。なお、ポアソン式や粘性項にも最小二乗推定で求めた二次の微係数を使うことも考えられるが、対流項とは別に風上化しない推定が必要となるため今回は(8)式を用いてラプラシアンを評価している。

二次元キャビティーの計算に用いた格子を図3に示す。計算点の配置と計算点数の違いが解に与える影響を見るために、節点数10201要素数20000を一様に配置したもの(図3a)と節点数1554要素数3026の壁境界近傍に格子点が集中するように自動生成された計算格子(図3b)を用いた。 $Re = 100$ および $Re = 1000$ でのx方向速度分布をGhia⁽⁴⁾らの結果と比較したのが図4である。均一に節点が配置された格子図3aによる計算結果はいずれのレイノルズ数でもGhia等の結果とよく一致している。それに対し格子節点数の少ない非均一格子図3bでは、いずれのレイノルズ数でも上部移動壁近傍でGhiaらの結果からずれている。流線図の比較によると、本手法による計算では左上部の反時計回りの渦がGhiaらのものより大きく発達している。これは用いた格子数が少なく、壁近傍に十分節点が集中できていないことにもよるが、境界角部での圧力誤差が大きいためである。角部での圧力修正法は今後検討が必要な課題である。しかし、Ghia等の計算は 129×129 の四角形構造格子を用いたものであり、図3bの格子は節点数がほぼ10分の1であることを考えると妥当な結果であるともいえる。また、 $Re = 10000$ 以上でも安定に計算が可能であったが、収束解はレイノルズ数に無関係に同一となった。今回の計算では特別な人工粘性項は付加していないが、対流項を最小二乗推定したことによって生じた数値粘性が $Re = 10000$ 以上では支配的となっていることが推察される。

次に、移流拡散問題に対する精度を確かめるために図5aのような初期分布をもつスカラー量 ϕ を対流させ、その分布の時間変化を調べる。速度場は $x=0, y=0$ に渦の中心を持つ強制渦とし、輸送されるスカラー量は流れに影響を与えない。また、拡散係数は0としているので ϕ の空間分布は初期分布形状を保ったまま流されるのが理論解である。図5b、図5cはそれぞれ最小二乗推定を中心差分的、一次風上の処理して半回転

Fig.1 Grid for flow around a cylinder

Fig.2 Pressure Distribution

Fig.3a Grid for flow in 2D Cavity (10201 nodes)

Fig.3b Grid for flow in 2D Cavity (1554 nodes)

Fig.4a U-velocity profile
(10201 nodes) Fig.4b U-velocity profile
(1554 nodes)

Fig.5c 1st order Up-wind

Fig.5d Present method

Fig.5a Initial condition

Fig.5b Central difference

分移流させてものである。図5dに本報告で述べた二次風上の処理による結果を示す。一次風上の処理とは(1)式の $\Delta x, \Delta y$ の二次以上の項を略して最小二乗推定式を構成しなおした手法であり、中心差分的とは(2)式による重みをすべて1とした以外は二次風上と同じ処理をする手法である。これらの結果を見ると、中心差分的推定法ではスカラー量のピーク値が初期状態より大きくなると同時に、対流した跡に振動(波)を生じている。また、一次風上の推定法では対流風上側に負の値を持つ振動は生じていないもののピーク値が初期状態に半分程度まで減少し、数値拡散効果が大きいことが分かる。一方、本論文で推奨する二次風上推定法による結果は、多少のオーバーシュートはあるもののピーク値はほぼ初期値を保っており、対流跡の振動の減衰も速く今回比較した3つの手法の中では最も良好な結果を示した。なお、これらの計算では流速を既知のものとして与えているが、運動量輸送にも最小二乗推定を使うナビエ・ストークス方程式にこれらを適用した場合、中心差分的手法では別個に人工粘性項を付加しない限り計算の安定性はかなり悪く、クーラン数を0.01の程度まで小さくする必要があった。

4. 結言

非構造格子用非圧縮流れ解法の対流項評価に最小二乗推定法を用いた解法を開発した。計算点の風上方向に位置する節点からの影響に対して重みを増すことにより、各種の風上化が可能であることを示した。中心差分と一次風上化推定法との比較において本報告で提案する手法が精度・安定性の両面で優れていることが確認された。二次元キャビティー流れによる速度分布の定量的精度検証の結果、本手法は高レイノルズ数流れも比較的安定に計算できことが分かった。しかし、これは最小二乗推定法を用いることにより陰に生じた数値粘性のためであると推察される。よって、今後推定値からの分散分析などにより数値粘性の定量的予測が必要であると考えられる。

文 献

- (1) Batina, J.T., AIAA Paper, 93-0333, (1993)
 - (2) 森西, 数値流体シンポジウム講演論文集, (1994), 61
 - (3) 矢部・青木, 計算工学, (1996), 19
 - (4) 鯉淵, 機械学会論文集(B), (1991), 3653
 - (5) Ghia et.al., J.Comp.Phys., (1982), 387-411
-